

MATEMÁTICAS 1º FP.-1

RAMAS: Administrativo, Peluquería, Estética, Metal, Electricidad, Electrónica, Automoción.

1ª PARTE

UNIDAD DIDÁCTICA I (NÚMEROS DECIMALES, OPERACIONES CON DECIMALES)

1-0) Introducción, 1-1) Escritura con decimales, 1-2) Lectura de decimales, 1-3) Ejercicios, 1-4) Suma de números decimales, 1-5) Diferencia de decimales, 1-6) Multiplicación de decimales, 1-7) Distintos casos en la división, 1-8) Multiplicación por la unidad seguida de ceros, 1-9) División por la unidad seguida de ceros, 1-10) Ejercicios.

UNIDAD DIDÁCTICA II (SISTEMA MÉTRICO DECIMAL)

II-1) Unidades de longitud, peso y capacidad, II-2) Unidades de superficie, II-3) Unidades de volumen, II-4) Equivalencias de capacidad, peso y volumen, II-5) Modo práctico de resolver estos ejercicios, II-6) Ejercicios resueltos, II-7) Ejercicios propuestos.

UNIDAD DIDÁCTICA III (NÚMEROS PRIMOS, DIVISIBILIDAD, MCD, MCM)

III-1) Definición de la división exacta, III-2) Números primos, III-3) Tabla de los números primos, III-4) Criterios de divisibilidad, III-5) Máximo común divisor (MCD) y mínimo común múltiplo (mcm), III-6) Teoremas sobre el MCD y mcm. de dos números, el algoritmo de Euclides, III-7) Determinación del MCD y mcm. Por descomposición en factores primos, III-8) Ejercicios.

UNIDAD DIDÁCTICA IV (OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES (FRACCIONES))

IV-1) Número racional o número fraccionario, o simplemente fracción, IV-2) Fracciones equivalentes, IV-3) Propiedad fundamental de las fracciones, IV-4) Simplificación de fracciones, IV-5) Reducción de fracciones a común denominador, IV-6) Suma de fracciones, IV-7) Diferencia de fracciones, IV-8) Fracción opuesta de otra, IV-9) Multiplicación de fracciones, IV-10) Fracción inversa de otra, IV-11) División de fracciones, IV-12) Multiplicación y división de un entero por una fracción, IV-13) Fracción decimal, IV-14) Fracción ordinaria, IV-15) Fracciones generatrices, IV-16) Ejercicios.

UNIDAD DIDÁCTICA V (POTENCIACIÓN, OPERACIONES CON POTENCIAS)

V-1) Potencia, V-2) Potencias de diez, V-3) Producto de potencias de igual base, V-4) Potencia de otra potencia, V-5) Potencia de exponente uno, V-6) Potencia de exponente cero, V-7) Potencia de exponente negativo, V-8) Potencia de un producto, V-9) Potencia de un cociente, V-10) Ejercicios.

UNIDAD DIDÁCTICA VI
(RADICACIÓN, OPERACIONES CON RAICES)

VI-1) La raíz como potencia de exponente fraccionario, VI-2) Raíz de un producto, VI-3) Raíz de un cociente, VI-4) Raíz de una raíz, VI-5) Racionalizar fracciones, VI-6) La raíz cuadrada, VI-7) Ejercicios.

UNIDAD DIDÁCTICA VII
(PROPIEDAD DISTRIBUTIVA)

VII-1) Regla de los signos, VII-2) Propiedad distributiva del producto respecto a la suma, VII-3) Operación de sacar factor común, VII-4) Producto, VII-5) Cuadrado de una suma y de una diferencia, VII-6) Cubo de una suma y de una diferencia, VII-7) Producto de una suma por una diferencia.

UNIDAD DIDÁCTICA VIII
(OPERACIONES CON POLINOMIOS Y MONOMIOS.)

VIII-1) Introducción: definición de monomios y polinomios, coeficientes indeterminados, grado de un polinomio completo, ordenado, homogéneo, VIII-2) Ejercicios, VIII-3) Suma de monomios, VIII-4) Suma y diferencia de polinomios, VIII-5) Producto de polinomios, VIII-6) Producto de un polinomio por un monomio, VIII-7) Producto de polinomios, VIII-8) Cociente de monomios, VIII-9) Cociente de un monomio por un monomio, VIII-10) Cociente de polinomios, VIII-11) Ejercicios.

UNIDAD DIDÁCTICA IX
(ECUACIÓN DE PRIMER GRADO)

IX-1) Resolución de la ecuación de 1^{er} grado, IX-2) Ejercicios de resolución de la ecuación de 1^{er} grado.

UNIDAD DIDÁCTICA X
(SISTEMAS DE ECUACIONES DE 2º GRADO)

X-1) Distintas formas de resolución de la ecuación de 2º grado, X-2) Breve discusión sobre la ecuación de 2º grado, X-3) Ejercicios sobre la ecuación de 2º grado.

UNIDAD DIDÁCTICA XI
(PROPORCIONES)

XI-1) Razón de dos números, XI-2) Razones inversas, XI-3) Proporciones, XI-4) Propiedades fundamentales de la proporciones, XI-5) Proporción continua, XI-6) Tercero proporcional, XI-7) Proporciones deducidas de otras, XI-8) Proporcionalidad directa, XI-9) Proporcionalidad inversa, XI-10) Regla de tres simple directa, XI-11) Regla de tres simple inversa, XI-12) Regla de tres compuesta, XI-13) El interés simple

como aplicación de la regla de tres compuesta, XI-14) Reparto proporcional simple directo, XII-15) Reparto proporcional simple inverso, XII-16) Ejercicios.

2º PARTE

UNIDAD DIDÁCTICA XII (ÁNGULOS)

XII-1) Ángulo, bisectriz, XII-2) Clases de ángulos: recto, agudo, llano, adyacente, opuesto por el vértice, complementarios y suplementarios, XII-3) Igualdad de ángulos.

UNIDAD DIDACTICA XIII (LA CIRCUNFERENCIA)

XIII-1) La circunferencia: radio, diámetro, secante, tangente y cuerda, XIII-2) Longitud de la circunferencia, XIII-3) Sector circular: su área, XIII-4) Segmento circular: su área, XIII-5) Ángulo central en una circunferencia, XIII-6) Ángulo interior, ángulo en una circunferencia, XIII-7) Ejercicios.

UNIDAD DIDACTICA XIV (POLÍGONOS)

XIV-1) Línea poligonal, línea poligonal convexa, línea poligonal cóncava, XIV-2) El polígono, XIV-3) Clasificación de los polígonos: a) por el número de lados, b) por su forma, c) por sus ángulos, XIV-4) Número de diagonales de un polígono, XIV-5) Suma de los ángulos interiores de un polígono convexo.

UNIDAD DIDÁCTICA XV (TRIÁNGULO)

XV-1) El triángulo, propiedades, XV-2) Rectas importantes del triángulo, XV-3) Clasificación de los triángulos, XV-4) Igualdad de triángulos.

UNIDAD DIDÁCTICA XVI (PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS, TEOREMA DE THALES)

XVI-1) Valor numérico, razón y proporcionalidad de segmentos, XVI-2) Paralelas equidistantes cortadas por una transversal, XVI-3) Paralela media en el triángulo, XVI-4) Paralela media en el trapecio, XVI-5) Teorema de Thales, XVI-6) Semejanza de triángulos, XVI-7) Teorema fundamental, XVI-8) Casos de semejanza de triángulos. XVI-9) Semejanza de polígonos.

UNIDAD DIDÁCTICA XVII (RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS)

XVII-1) Conceptos previos, proyección de un punto y un segmento, XVII-2) Teorema de Cateto, XVII-3) Teorema de Pitágoras, XVII-4) Procedimiento de construcción geométrica de la media proporcional, XVII-6) Ejercicios.

UNIDAD DIDÁCTICA XVIII
(CUADRILÁTEROS)

XVIII-1) Cuadriláteros, definición, XVIII-2) Suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero, XVIII-3) Clasificación de los cuadriláteros.

UNIDAD DIDÁCTICA XIX
(POLÍGONOS REGULARES)

XIX-1) Polígonos regulares, XIX-2) Centro, radio y apotema de un polígono regular, XIX-3) Cuadrado inscrito en una circunferencia, XIX-4) Hexágono regular inscrito en una circunferencia, XIX-5) Triángulo equilátero inscrito en una circunferencia, XIX-6) Ejercicios.

UNIDAD DIDÁCTICA XX
(ÁREAS DE LAS FIGURAS PLANAS)

XX-1) Área del triángulo, cuadrado, rombo, romboide, trapecio, trapezoide y de cualquier polígono regular, XX-2) Ejercicios de aplicación.

UNIDAD DIDÁCTICA XXI
(BREVE IDEA DE COORDENADAS CARTESIANAS Y REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES)

XXI-1) Coordenadas cartesianas, XXI-2) Representación de un punto, XXI-3) Breve idea de función, XXI-4) Representación de funciones, XXI-5) Ejercicios.

APÉNDICE:

A-1) Formas simbólicas o indeterminadas, A-2) Notación exponencial o científica, A-3) El alfabeto griego, A-4) Números romanos, A-5) Equivalentes métricos entre el sistema decimal, y las unidades inglesas de medida, A-6) Formulario.

UNIDAD DIDÁCTICA I

(Números decimales, operaciones con decimales)

1-0) INTRODUCCIÓN:

En la forma general de escribir existen dos partes:

- Parte entera que se encuentra a la izquierda de la coma, y
- Parte decimal que se encuentra a la derecha de la coma, es decir:

346'026. 346 es la parte entera y 026 es la parte decimal.

Recordaremos que las diferentes órdenes decimales para un número 2146'230121 son:

2	1	4	6	2	3
Unidad De millar	centena	decena	unidad	décima	centésima
0	1	2	1		
Milésima	diez milésima	cien milésima	millonésima		

1-1) ESCRITURA DE NÚMEROS DECIMALES:

Para escribir números decimales, hemos de tener en cuenta por tanto que:

1º Separemos la parte entera de la decimal mediante una coma.

2º Tendremos que apreciar el nº de cifras que tiene la cantidad decimal y observar si coincide o no con el orden que expresa. Si faltan habrá que rellenar con ceros. Es decir: supongamos que dictan 45 milésimas. Apreciamos que el nº 45 tiene dos cifras y que el orden decimal de las milésimas es tercero, por lo tanto necesitamos añadir un cero. Y como no hay parte entera pondremos otro cero a la izquierda de la coma, así: 0.045.

1-2) LECTURA DE NÚMEROS DECIMALES:

Para leer números decimales, tendremos en cuenta que:

1º Se leerá primero la cantidad entera.

2º Inmediatamente después contamos los órdenes hasta la última cifra decimal.

3º Se leerá la cantidad decimal como si fuese entera añadiendo el orden correspondiente.

Es decir, la cantidad 345'0846 se leerá primero "trescientos cuarenta y cinco" enteros; ahora nos fijamos en que el 6 (última cifra) ocupa el orden de las diez milésimas, con lo que continuaríamos leyendo "ochocientos cuarenta y seis diez milésimas".

1-3) EJERCICIOS:

1º Escribe con números: mil cuatro enteros con cuatrocientos seis diez-milésimas.

2º Quinientas, diez-milésimas.

3º Mil veinte cien milésimas.

4º Quinientas diez, milésimas.

SOLUCIÓN:

1º 1004'0406

2º 0'0500

3º 0'01020

4º 0'510

NOTA: tengamos en cuenta que:

- a) Los ceros después de la última cifra significativa a la derecha, y detrás de la coma no tienen valor alguno. Pero, los anteriores a las cifras significativas decimales indican el orden decimal y no pueden eliminarse.
- b) Los ceros anteriores a la coma decimal, si no tienen delante de ellos ninguna cifra significativa tampoco valen para nada, o sea, $0'05 = 000'05$, pero no es correcto escribir que $500'06 = 5'06$.

Según esto se podrá leer de la misma forma:

$0'0500 =$ quinientas diez milésimas, o bien:

$0'05 =$ cinco centésimas.

Es decir, podremos escribir $0'0500 = 0'05$, pero no sería correcto escribir $0'0500 = 0'500$, porque quinientas diez milésimas es distinto que quinientas milésimas.

EJERCICIOS: Lee los siguientes números y exprésalos por escrito:

$304'090$. Trescientos cuatro enteros con noventa milésimas.

$4008'00102$. Cuatro mil ocho enteros con ciento dos cien-milésimas

$0'0030$. Treinta diez-milésimas.

1-7) DIVISIÓN DE DECIMALES:

(Distintos casos)

En la división de decimales distinguiremos tres casos:

1º DIVIDIR UN DECIMAL POR UN ENTERO:

Se efectúa la división como se fuesen enteros pero cuando bajemos la primera cifra decimal hemos de poner una coma en el cociente. O sea:

$$\begin{array}{r} 24'12 : 12 = 2'01 \\ 24'12 \quad \underline{12} \\ 0012 \quad \underline{2'10} \\ \underline{00} \end{array}$$

He puesto la coma en el cociente al tiempo que he bajado el uno del dividendo.

2º DIVIDIR UN ENTERO POR UN DECIMAL:

Para ello hay que tener en cuenta que:

Al suprimir la coma hacemos mayor el divisor por tanto pondremos un nº de ceros en el dividendo igual al de cifras decimales del divisor y dividimos ahora como si fuesen enteros, o sea:

$$\begin{array}{r} 342 : 2'46 = 139.... \\ 34200 \quad \underline{246} \\ 0960 \quad \underline{139...} \\ 2220 \\ \underline{00067} \end{array}$$

3º DIVIDIR DOS DECIMALES:

a) Si tiene ambos el mismo nº de cifras decimales se eliminan las comas y se efectúan la división normalmente.

$$3'24 : 0'24 = 324 : 24$$

c) Si tienen distinto nº de cifras decimales se igualan estas con ceros, se eliminan las comas y luego se divide como si fuesen enteros, es decir:

$$\begin{array}{r} 3'24 : 2'4867 = 32400 : 24867 \\ 32400 \quad \underline{24867} \\ 07633 \quad \underline{1} \end{array}$$

NOTA: "Cualquiera" de los casos anteriores podrá resolverse mediante este último procedimiento.

1-4) SUMA DE NUMEROS DECIMALES:

Para sumar decimales colocaremos todas las cantidades en columnas de modo que en todos ellos la coma ocupe el mismo lugar. De esta manera se corresponderán los diferentes órdenes, luego la sumamos como si fuesen enteros, es decir:

$$\begin{array}{r} 23'027 \\ 0'00231 \\ 3'0012 \\ \underline{0'00026} \\ 26'03077 \end{array}$$

26'03077 = resultado veintiséis enteros con tres mil setenta y siete cien milésimas.

Las comas se hayan todas a la misma altura, y por lo tanto las unidades debajo de las unidades, decenas debajo de las decenas, etc....

1-5) DIFERENCIA DE NÚMEROS DECIMALES:

Para colocar ambas cantidades lo haremos como en el caso anterior y , efectuaremos luego, la diferencia como si fuesen enteros.

$$34'026 - 26'3423 = 07'6837 \text{ resultado.}$$

$$\begin{array}{r} 34'026 \\ \underline{26'3423} \\ 07'6837 \end{array}$$

07'6837. siete enteros con seis mil ochocientos treinta y siete diez-milésimas.

1-6) MULTIPLICACIÓN DE DECIMALES:

Efectuaremos el producto como si fuesen enteros; y en el resultado, situamos la coma en el siguiente lugar: se cuenta a partir de la última cifra del producto hacia la izquierda tantos lugares como cifras decimales tienen el multiplicando y el multiplicador.

2'32..... el multiplicando tiene 2 decimales.

4'01..... el multiplicador tiene 2 decimales.

$$\begin{array}{r} 2'32 \\ \times 4'01 \\ \hline 232 \\ 928 \end{array}$$

9'3032.... El producto tendrá 4 cifras decimales a partir de esta última hacia la izquierda.

1-8) MULTIPLICACIÓN POR LA UNIDAD DEGUIDA DE CEROS:

a) Si el n° es entero se añaden tantos ceros a la derecha del mismo como los que siguen a la unidad.

b) Si es un n° decimal se desplaza la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros siguen a la unidad. Es decir:

$$3'2472 \times 1000 = 3247'2$$

1-9) DIVISIÓN POR LA UNIDAD SEGUIDA DE CEROS:

- a) Si es un entero, contaremos a partir de la última cifra hacia la izquierda un número de lugares igual al número de ceros que siguen a la unidad (añadiendo ceros en el caso de que el entero no tuviese cifras suficientes) y pondremos la coma en ese lugar, o sea:

$$325 : 10.000 = 0'0325 \text{ a partir del cinco hacia la izquierda cuatro lugares.}$$

$$3225 : 10 = 322'5$$

- b) Si fuese decimal, se desplaza la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros siguen a la unidad:

$$73'0256 : 10 = 7'30256$$

$$0'6223 : 1000 = 0'0006223$$

1-10) EJERCICIOS:

1º Expresa en cifras las siguientes cantidades:

- a) siete mil veintiocho millonésimas.
b) Mil dos enteros con cuatrocientas cuatro cienmilésimas.
c) Dos billones, dos mil dos millones con dos milésimas.

SOLUCIÓN:

- a) 0'007028
b) 1002'00404
c) 2₂002002₁000000'002

2º Lee:

- a) 342'704
b) 0'00002
c) 3420₁12230'4
d) 100000003'433002

SOLUCIÓN.

- a) trescientos cuarenta y dos enteros con setecientos cuatro milésimas.
b) Dos milésimas
c) Tres mil cuatrocientos veinte millones, ciento veintidós mil, doscientas treinta con cuatro décimas.
d) Cien millones tres con cuatrocientas treinta y tres mil dos cienmillonésimas.

3º Suma:

$$a) 3'243263 + 623'00003 + 3'2223 + 55'222 = 684'687593$$

$$b) 3426'0002 + 24202'232232 + 100'2234 = 259960'2236$$

4º Resta:

$$a) 3'242 - 0'00232 = 3'23968$$

$$b) 63'002 - 20'3462 = 426558$$

5º Multiplica:

$$a) 37'0223 \cdot 34'22422 = 1267'059340106$$

$$b) 0'0023 \cdot 3'42201 = 0'007870623$$

$$c) 36'23 \cdot 222'002 = 8043'13246$$

$$d) 6523 \cdot 10000 = 65230000$$

$$e) 342'64 \cdot 10000 = 3426400$$

f) $0'0002 \cdot 1000000 = 200$

g) $63'002 \cdot 1000 = 63002$

6° Divide:

a) $342 : 0.062 = 5516'129032$

b) $0'223 : 5'42 = 0'041143911$

c) $0'223 : 4 = 0'05575$

d) $63 : 10000 = 0'0063$

e) $34'226 : 1000 = 0'034226$

f) $0'0023 : 10 = 0'00023$

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL
II: UNIDADES DE LONGITUS, PESO Y CAPACIDAD.

LONGITUD

- Mm. (Miriámetro) = 10.000m
- └ Km. (Kilómetro) = 1.000m
- └ Hm. (Hectómetro) = 100m
- └ Dm. (Decámetro) = 10m
- └ m (metro) = 1m
- └ dm. (decímetro) = 0'1m. 1/10m
- └ cm. (centímetro) = 0'01m. 1/100m
- └ mm. (milímetro) = 0'001m. 1/1000m.

PESO

- Tm. (Tonelada) = 1.000Kg. = 1.000.000gr.
- └ Qm. (Quintal) = 100Kr. = 100.000gr.
- └ Mg. (Miriagramo) = 10Kg. = 10.000gr.
- └ Kg. (Kilogramo) = 1Kg. = 1.000gr
- └ Hg. (Hectogramo) = 100gr
- └ Dg. (Decagramo) = 10gr.
- └ gr. (gramo) = 1gr.
- └ dg. (decigramo) = 0'1gr. 1/10gr.
- └ cg. (centigramo) = 0'01gr. 1/100gr.
- └ mg. (miligramo) = 0'001gr. 1/1.000gr.

CAPACIDAD

- Ml. (Mirialitro) = 10.000 l
- └ Kl. (Kilolitro) = 1.000 l
- └ Hl. (Hectolitro) = 100 l
- └ Dl. (Decalitro) = 10 l
- └ l. (litro) = 1 l
- └ dl. (decilitro) = 0'1 l. 1/10 l
- └ cl. (centilitro) = 0'01 l. 1/100 l
- └ ml. (mililitro) = 0'001 l. 1/1000 l

Estas unidades como veis aumentan y disminuyen de 10 en 10; la idea de la escalera es la siguiente: como subir una escalera e más difícil que bajarla y dividir es más difícil que multiplicar; luego para subir divido y para bajar multiplico. Para ver el número de ceros que han de acompañar a la unidad no hago más que contar los lugares (escalones) entre ambas unidades, estos lugares coinciden con el n° de ceros que han de acompañar a la unidad.

II-2) UNIDADES DE SUPERFICIE:

$Mm^2 = 100000000m^2$

↳ $Km^2 = 1000000m^2$

↳ $Hm^2 = 10000m^2$ (se le llama Hectárea) = Ha.

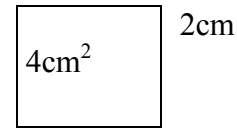
↳ $Dm^2 = 100m^2$ (se le llama Área) = a.

↳ $m^2 = 1m^2$ (se le llama Centiárea) = Ca.

↳ $dm^2 = 1/100m^2 = 0'01m^2$

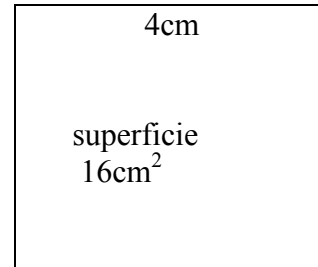
↳ $cm^2 = 1/1000m^2 = 0'0001m^2$

↳ $mm^2 = 1/1000000m^2 = 0'0000001m^2$



2cm

Longitud 4cm



4cm

Para pasar de unas unidades a otras procederemos: como en el caso anterior, pero teniendo en cuenta que las unidades de superficie aumentan y disminuyen de cien en cien. Por tanto cuento el nº de escalones que hay entre ambas unidades y divido o multiplico (según tenga que subir o bajar) por la unidad seguida de tantos pares de ceros como escalones haya contado.

II-3) UNIDADES DE VOLUMEN:

$Mm^3 = 1000000000000m^3$

↳ $Km^3 = 1000000000m^3$

↳ $Hm^3 = 1000000m^3$

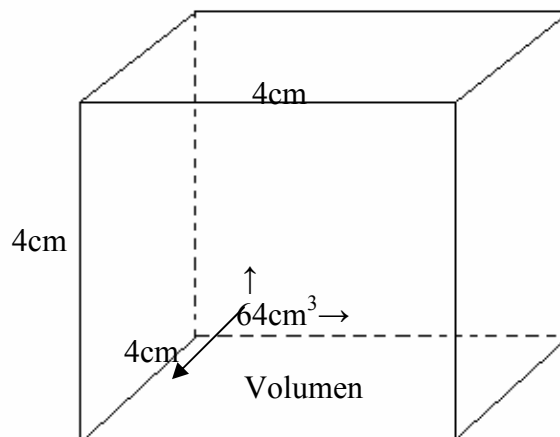
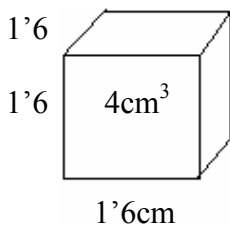
↳ $Dm^3 = 1000m^3$

↳ $m^3 = 1m^3$

↳ $dm^3 = 1/1000m^3 = 0'001m^3$

↳ $cm^3 = 1/1000000m^3 = 0'000001m^3$

↳ $mm^3 = 1/1000000000m^3 = 0'000000001m^3$



Se procede como en los de superficie, es decir: se cuentan los lugares que median entre la magnitud dada y el problema, se multiplica este n° por 3, ya que las unidades de volumen aumentan y disminuyen de mil en mil (recordar que de abajo a arriba: dividir y de arriba abajo: multiplicar).

II-4) EJERCICIOS RESUELTOS:

A) Reducir a m:

0'002Km; 0'0726Mm; 350cm; 0'006Hm; 3400mm; 0'64Dm:

SOLUCIONES:

$$0'002\text{Km} \times 1000 = \dots\dots\dots 2\text{m}$$

$$0'0726\text{Mm} \times 10000 = \dots\dots 726\text{m}$$

$$350\text{cm}: 100 = \dots\dots\dots 3'5\text{m}$$

$$0'006\text{Hm} \times 100 = \dots\dots\dots 0'6\text{m}$$

$$3400\text{mm}: 1000 = \dots\dots\dots 3'4\text{m}$$

$$0'64\text{Dm} \times 10 = \dots\dots\dots \frac{6'4\text{m}}{741'9\text{m}}$$

B) Reducir a Dg.

0'02Tm; 0'76Qm; 325gr; 66Kg; 0'0013Kg; 0'002Mg, 1723mg; 246'5cg:

SOLUCIONES:

$$0'02\text{Tm} \times 100000 = \dots\dots\dots 20000\text{Dg}$$

$$0'76\text{Qm} \times 10000 = \dots\dots\dots 7600\text{Dg}$$

$$325\text{g} \times 10 = \dots\dots\dots 32'5\text{Dg}$$

$$66\text{Kg} \times 100 = \dots\dots\dots 6600\text{Dg}$$

$$0'0013\text{Kg} \times 100 = \dots\dots\dots 0'13\text{Dg}$$

$$0'002\text{Mg} \times 1000 = \dots\dots\dots 2\text{Dg}$$

$$2\text{Hg} \times 10 = \dots\dots\dots 20\text{Dg}$$

$$1723\text{mg} \times 10000 = \dots\dots\dots 0'1723\text{Dg}$$

$$246'5\text{cg} \times 1000 = \dots\dots\dots \frac{0'2465\text{Dg}}{16255'0488\text{Dg}}$$

C) Reducir a cl:

20l; 73ml; 0'002Ml; 20'76Hl; 0'0006Kl.

SOLUCIONES.

$$20\text{l} \times 100 = \dots\dots\dots 2000\text{cl}$$

$$73\text{ml} \times 10 = \dots\dots\dots 7'3\text{cl}$$

$$0'002\text{Ml} \times 1000000 = \dots\dots\dots 2000\text{cl}$$

$$0'0006\text{Kl} \times 100000 = \dots\dots\dots 60\text{cl}$$

$$20'76\text{Hl} \times 10000 = \dots\dots\dots \frac{207600\text{cl}}{211667'3\text{cl}}$$

D) Reducir a dm²:

75ca; 0'23a; 0'0723Ha; 0'00025Km²; 12250cm²:

SOLUCIONES:

$$75\text{ca} = 75\text{m}^2 \times 100 = \dots\dots\dots 7500\text{dm}^2$$

$$0'23\text{a} = 0'23\text{Dm}^2 \times 10000 = \dots\dots\dots 2300\text{dm}^2$$

$$0'0723\text{Ha} = 0'0723\text{Hm}^2 \times 1000000 = \dots\dots\dots 72300\text{dm}^2$$

$$12250\text{cm}^2: 10000 = \dots\dots\dots \frac{1'2250\text{dm}^2}{107101'2250\text{dm}^2}$$

E) Reducir a Dm^3 :

3270m^3 ; $676234'5\text{mm}^3$; $0'006\text{Hm}^3$; $0'000723\text{Km}^3$:

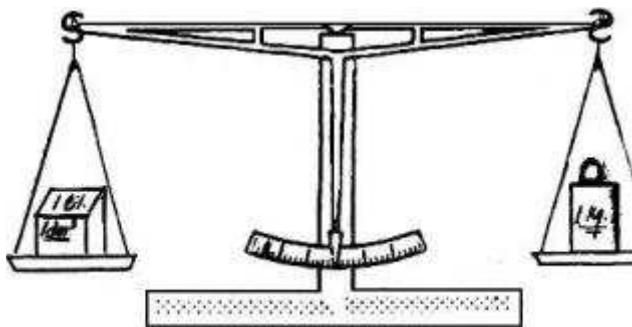
SOLUCIONES:

$$\begin{aligned}
 3270\text{m}^3 : 1000 &= \dots\dots\dots 3'27\text{Dm}^3 \\
 676234'5\text{mm}^3 : 1000 &= \dots\dots\dots 0'0000006762345\text{Dm}^3 \\
 0'006\text{Hm}^3 \times 1000 &= \dots\dots\dots 6\text{Dm}^3 \\
 0'000723\text{Km}^3 \times 1000000 &= \dots\dots\dots 723\text{Dm}^3 \\
 &738'2700006762345\text{Dm}^3
 \end{aligned}$$

II-5) EQUIVALENCIAS, CAPACIDAD, PESO, VOLUMEN:

<u>VOLUMEN</u>	<u>PESO</u>	<u>CAPACIDAD</u>
1cm^3	1Tm	1Kl
100dm^3	1Qm	1Hl
10dm^3	1Mg	1Dl
1dm^3	1Kl	1l
$0'1\text{dm}^3$	1Hg	1dl
$0'01\text{dm}^3$	1Dg	1cl
1cm^3	1g	1ml
$0'1\text{cm}^3$	1dg	$0'1\text{ml}$
$0'01\text{cm}^3$	1cg	$0'01\text{ml}$
1mm^3	1mg	$0'001\text{ml}$

Es recomendable una experiencia en el manejo de estas equivalencias.



En la figura II-2 observamos como un litro de agua pura y destilada ocupa un volumen de un decímetro cúbico y pesa un kilogramo.

II-6) MODO PRÁCTICO DE RESOLVER ESTOS EJERCICIOS DE EQUIVALENCIAS:

Si tenemos que reducir a dl: 400cm^3 ; $0'0000000682\text{Tm}$. 637dm^3 ; $126053'42\text{Kg}$; $0'0002\text{Kl}$; de agua pura y destilada (densidad 1). El procedimiento a seguir en este caso es el siguiente: observando la tabla nos movemos por la columna correspondiente hasta llegar a la fila en donde se encuentra los dl, es decir:

VOLUMEN	CAPACIDAD	PESO
.m ³	Kl	Tm
	HI	Qm
	DI	Mg
.dm ³	l	Kg
0'1dm ³ = 100cm ³	dl	Hg
0'01dm ³ = 10cm ³	cl	Dg
.cm ³	ml	g

Como podemos observar nos desplazamos por las unidades de volumen verticalmente (trazo sencillo) hacia arriba y llegamos a la fila que corresponde a los dl. En otras palabras los dl están dos lugares por encima de los cm³ y por tanto habrá que dividir por 100 como hasta ahora habíamos hecho para transformar unidades de capacidad o bien nos desplazamos horizontalmente (trazo grueso doble) para pasar de cm³ a 'ml' y de 'ml' hasta 'dl' verticalmente como para el caso de las unidades de capacidad.

$$400\text{cm}^3 : 100 = \text{-----}4\text{dl}$$

$$0'0000000632 \times 10000 = \text{-----}0'00632\text{dl}$$

$$126053'42\text{Kg} \times 10 = \text{-----}1260534'2\text{dl}$$

$$0'0002\text{Kl} \times 10000 = \text{-----}2\text{dl}$$

A) Reducir a cm³:

$$5\text{ml} \times 1 = \text{-----}5\text{cm}^3$$

$$0'005\text{Kg} \times 100 = \text{-----}5\text{cm}^3$$

$$36\text{Dg} \times 10 = \text{-----}360\text{cm}^3$$

$$25'76\text{Hg} \times 100 = \text{-----}2576\text{cm}^3$$

$$0'00000000007\text{m}^3 \times 1000000 = \text{-----}0'00007\text{cm}^3$$

$$0'0072\text{Hl} \times 100000 = \text{-----}720\text{cm}^3$$

$$0'0000003\text{Kl} \times 1000000 = \text{-----}0'3\text{cm}^3$$

$$\text{-----}3666'30007\text{cm}^3$$

B) Reducir a dm³:

$$5\text{ml} : 1000 = \text{-----}0'005\text{dm}^3$$

$$36\text{Dg} : 100 = \text{-----}0'36\text{dm}^3$$

$$20'75\text{Hg} : 10 = \text{-----}2'075\text{dm}^3$$

$$0'00000000007\text{m}^3 \times 1000 = \text{-----}0'00000007\text{dm}^3$$

$$0'0000003\text{Kl} \times 1000 = \text{-----}0'0003\text{dm}^3$$

$$0'0072\text{Hl} \times 100 = \text{-----}0'72\text{dm}^3$$

$$\text{-----}3'20530007\text{dm}^3$$

C) Reducir a l:

$$5\text{ml} : 1000 = \text{-----}0'005\text{l}$$

$$360\text{g} : 1000 = \text{-----}0'36\text{l}$$

$$25'76\text{Hg} : 10 = \text{-----}2'576\text{l}$$

$$0'00000000007\text{m}^3 \times 1000 = \text{-----}0'00000007\text{l}$$

$$0'0000003\text{Kl} \times 1000 = \text{-----}0'0003\text{l}$$

$$0'0072\text{Hl} \times 100 = \text{-----}0'72\text{l}$$

$$\text{-----}3'66130007\text{l}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

- 1) Reducir a m: 23cm, 54mm, 0'006Km, 0'00023Mm, 0'06mm, 0'26Dm, 0'0053cm.
R: 83'244053.
- 2) Reducir a mg: 0'00036Kg, 0'0002gr, 0'0006Hg, 0'0005cg, 0'34723Mg
R: 3472790'205
- 3) Reducir a cl: 0'0027Kl, 3'7434Ml, 64ml, 0'036dl, 34Dl, 0'064Hl.
R: 3778316'76.
- 4) Reducir a m: 3'2Km, 0'05Mm, 26000cm, 3'24Dm, 0'0026Hm, 2224mm.
R: 3994'884.
- 5) Reducir a m²: 10Ha, 0'23Km², 73ca, 5a, 3426cm², 100005mm².
R: 3305373'442605.
- 6) Reducir a áreas: 23m², 56Ha, 85ca, 2'23Ha, 63Km², 34223mm², 266cm².
R: 665823'58060823.
- 7) Reducir a dm³: 0'0000000027Km³, 0'62341Dm³, 0'000000326Hm³, 3247cm³,
623121mm³, 0'0000000000000000323Mm³.
R: 626443'100121.
- 8) Reducir a cm³: 5Dl, 3l, 46Kg, 37mm³, 2436g, 0'005Tm, 66Hl, de agua pura destilada
a 4°C de temperatura.
R: 6160.
- 9) Reducir a g: 2cm³, 0'0034l, 0'00007m³, 3'7432ml, 743243dl, 0'726cg, 67432mm³.
R: 74324743'18246.
- 10) Reducir a Dl: 0'2Kl, 36Kg, 0'63dm³, 0'00003m³, 0'0002Tm, 3723g, 66dl.
R: 24'7183.

UNIDAD DIDACTICA III.
(DIVISIBILIDAD, MCM Y MCD)

III-1) DEFINICION DE DIVISION EXACTA.

Una división entre dos números a y b es exacta, cuando al dividir a entre b su resto es cero, en este caso se dice que a es divisible por b.

III-2) NÚMEROS PRIMOS.

-Número primo absoluto (o simplemente primo) es aquel que solo es divisible por si mismo y por la unidad.

Ejemplo: 3, 11, 17, 19, son primos.

-Número compuesto: es el que admite otros divisores distintos de si mismo y de la unidad.

Ejemplo: 4, 16, 9, son compuestos.

Los números son primos relativos o primos entre si cuando no admiten mas divisor común que la unidad.

Ejemplo:

6 no es primo

35 no es primo..... Pero 6 y 35 son primos entre si.

El número 1 es primo.

Entre números primos y compuestos se verifican las siguientes propiedades:

a) El menor divisor de un número compuesto es primo, y su cuadrado es inferior o igual a este número.

Por ejemplo: sea el número compuesto 45, su menor divisor es 3, este número es primo y se verifica que 3^2 es menor que 45.

Si el número compuesto fuera el 49, su menor divisor es 7, este número es primo y se verifica que $7^2 = 49$.

c) Todo número compuesto se puede descomponer, de modo único, en producto de factores primos.

En efecto, supongamos que el número compuesto 180, su menor divisor es 2 primo, y se verifica que $180 = 2 \cdot 90$, pero también 90 es compuesto, su menor divisor es 2 y por lo tanto $90 = 2 \cdot 45$, seguimos igual y de 45 el menor divisor es 3, $45 = 3 \cdot 15$, y de $15 = 3 \cdot 5$. Estos dos son primos entonces puede escribir que $180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

Este proceso puede hacerse mediante divisiones sucesivas:

$$\begin{array}{r} 180 \quad \underline{|} 2 \\ 00 \quad 90 \quad \underline{|} 2 \\ 10 \quad 45 \quad \underline{|} 3 \\ 15 \quad 15 \quad \underline{|} 3 \\ 0 \quad 0 \quad 5 \end{array}$$

III-3) TABLA DE NÚMEROS PRIMOS (CRIBA DE ERATOSTENES)

Es un procedimiento sencillo para obtener números primos. Tratemos de hallar los números primos inferiores a 100. Escribimos la secuencia de 1 a 100 y comenzamos tachando números de 2 en 2 (a partir del 2), luego de 3 en 3 (a partir del 3), luego de 5 en 5 (a partir del 5), luego de 7 en 7 (a partir del 7). Los números primos buscados son los que no hemos tachado.

(1)	(2)	(3)	4	(5)	6	(7)	8	9	10
(11)	12	(13)	14	15	16	(17)	18	(19)	20
21	22	(23)	24	25	26	27	28	(29)	30
(31)	32	33	34	35	36	(37)	38	39	40
(41)	42	(43)	44	45	46	(47)	48	49	50
51	52	(53)	54	55	56	57	58	(59)	60
(61)	62	63	64	65	66	(67)	68	69	70
(71)	72	(73)	74	75	76	77	78	(79)	80
81	82	(83)	84	85	86	87	88	(89)	90
91	92	93	94	95	96	(97)	98	99	100

III-4) CRITERIOA DE DIVISIBILIDAD:

Se puede predecir “a priori” el número por el que es divisible un n° compuesto, ya que la divisibilidad obedece a un conjunto de reglas, tales como:

- 1° Un número es divisible por 2 cuando termina en cero o cifra par.
- 2° Un número es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras es 3 o múltiplo de 3.
- 3° Un número es divisible por 5 cuando termina en cero o en 5.
- 4° Un número es divisible por 7 cuando si al efectuar la división su resto es cero.
- 5° Un número es divisible por 11 cuando sumando las cifras que ocupan el lugar par y restando la suma de las que ocupan lugar impar, el resultado es cero, 11 o múltiplo de 11.

III-5) MCM Y MCD DE DOA NÚMEROS:

MAXIMO COMÚN DIVISOR (MCD) de dos números “a” y “b” es el mayor número que divide a ambos a la vez.

Ejemplo: el MCD de 36 y 60 es 12 ya que es el mayor número que divide a los dos.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (mcm) de dos números “a” y “b” es el menor número que es divisible por ambos a la vez.

Ejemplo: el mcm de 36 y 60 es 180.

Entre el MCD y el mcm de dos números existe la siguiente relación:

El producto del MCD y del mcm de dos números es igual al producto de los dos números:

En el ejemplo anterior tendremos que:

$$12 \cdot 180 = 36 \cdot 60$$

III-6) TEOREMA SOBRE EL MCD DE DOS NÚMEROS, EL ALGORITMO DE EUCLIDES:

Sobre el MCD podemos enunciar los siguientes teoremas:

1° Si dos números son divisibles el uno por el otro, el menor es el MCD de ambos.

Ejemplo: de 15 y 45 el MCD es 15 ya que es el mayor de los números que divide a ambos.

2° Si dos números no son divisibles el uno por el otro, su MCD es el mismo que el MCD del menor de ellos y del resto de la división de ambos.

Ejemplo: sean 48 y 36, su MCD es 12 ya que este es el mayor número que divide a ambos, la división entre 48 y 36 da de resto 12.

El teorema se expresaría así:

Si $a \neq b$ (no es múltiplo de b)

Y $a = pb + r$, donde: q = divisor; b = cociente; r = resto

$$\text{MCD}(a, b) = \text{MCD}(b, r)$$

La aplicación de los dos teoremas anteriores permite obtener el MCD de dos números por sucesivas divisiones.

Este método de obtención del MCD se denomina ALGORITMO DE EUCLIDES, y se puede anunciar así: para hallar el MCD de dos números se divide el mayor por el menor, si el resto es nulo el MCD es el menor.

Si el resto no es nulo, se divide el número menor por este resto, luego el primer resto por el segundo y así sucesivamente hasta que la división sea exacta. El último divisor utilizado es el MCD.

Ejemplo: hallar el MCD y el mcm de 624 y 348.

Vamos a aplicar el ALGORITMO DE EUCLIDES:

	1	1	3	1	5	Cociente
624	348	276	72	60	12	Divisiones
276	72	60	12	0		Restos

De donde concluimos que el MCD de 624 y 348 es 12.

Para obtener el mcm aplicaremos la propiedad estudiada anteriormente:

$\text{MCD} \cdot \text{mcm} = 624 \cdot 348$ de donde:

$$\text{MCD} = \frac{624 \times 348}{12} = 18096.$$

III-7) DETERMINACIÓN DE MCD Y MCM POR DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS:

1º Para obtener el MCD de varios números se descomponen en factores primos y se toman los factores primos comunes a ambos con el menor exponente, se multiplican y este resultado es el MCD.

2º Para obtener el ‘mcm’ se descomponen en factores primos, y se toman estos factores de ambos comunes y no comunes con el mayor exponente.

Ejemplo: obtener el MCD y mcm de los números: 222, 260, 420.

Solución descomposición en factores primos:

El 222 es divisible por 2 porque acaba en 2.

El 222 es divisible por 3 porque la suma de sus cifras es 6.

Las divisiones sucesivas las haríamos mentalmente:

$$\begin{array}{r|l} 222 & 2 \\ 111 & 3 \\ 37 & 37 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 222 \text{ es divisible por } 2, \text{ la mitad de } 2 \text{ es } 1 \text{ y no nos sobra nada} \\ \text{para añadir al siguiente } 2 \text{ y seguiríamos, la mitad de } 2 \text{ es el } 1 \\ \text{de nuevo y por último con el tercer } 2 \text{ haríamos igual, es decir,} \\ \text{la mitad de } 222 \text{ es } 111. \end{array}$$

111 es divisible por 3, (la suma de sus cifras es 3) y pensaríamos la tercera parte de 1 no es posible y tomaríamos la siguiente cifra para el cálculo de la tercera parte, en nuestro caso es 11, la tercera parte de 11 es 3 y sobran 2 ($3 \times 3 = 9$; $11 - 9 = 2$). Este 2 sería el que añadimos a la siguiente cifra para calcular su tercera parte, que al ser un 1 nos formaría el número 21, y la tercera parte de 21 es 7 (luego la tercera parte de 111 es 27) y nos

resulta un número primo el 37 que solo es divisible por si mismo y el cociente es la unidad. Hacemos lo mismo con los dos números.

$$\begin{array}{r|l} 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 5 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 5 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l} 222 = 2 \times 3 \times 37 \\ 1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \\ 420 = 2^2 \times 5 \times 3 \times 7 \end{array}$$

Luego tendremos que: $MCD = 2 \times 3 = 6$
 $mcm = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 37 = 46620$.

III-8) EJERCICIOS:

1º Descomponer en factores primos: 132, 230, 10, 339:

$$\begin{array}{r|l} 232 & 2 \\ 116 & 2 \\ 58 & 2 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l} 230 & 2 \\ 115 & 5 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l} 339 & 3 \\ 113 & 113 \\ 1 & \end{array}$$

$232 = 2^3 \times 29$; $230 = 2 \times 5 \times 23$; $10 = 2 \times 5$; $339 = 113 \times 3$.

2º Obtener el MCD y mcm de 525 y 225 utilizando el ALGORITMO DE EUCLIDES.

	2	3	COCIENTE
525	225	75	DIVISORES
75	0		RESTOS

Por tanto $MCD = 75$

Para obtener el MCD planteo la ecuación:

$$MCD \cdot mcm = 525 \cdot 225 / mcm = \frac{525 \times 225}{MCD} = \frac{525 \times 225}{75} = \frac{118125}{75} = 1575$$

3º Obtener por descomposición en factores primos el MCD y el mcm de 96, 360, 4680.

R:- $MCD = 2^3 \cdot 3 = 24$; $MCM = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 = 18.720$.

4º Obtener el MCD Y MCM, por descomposición en factores primos de:

540; 630; 960

R:- $MCD = 30$; $MCM = 60480$

UNIDAD DIDÁCTICA IV
OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES (FRACCIONES)

IV-1) NÚMERO RACIONAL O NÚMERO FRACCIONARIO (P SIMPLEMENTE FRACCIÓN)

El número fraccionario (racional) es de la forma a/b , donde ‘a’ y ‘b’ son números enteros. Al número ‘a’ se le llama numerador de la fracción, y al ‘b’ denominador. El significado del numerador es indicarnos las partes que se toman de la unidad dividida por el denominador.

Ejemplo: el ejemplo más bonito de número fraccionario es el de la tarta (fig. IV-1-a). Supongamos que cinco amigos se van a merendar una tarta, para esto dividen la tarta en 5 partes iguales y cada uno se coge su parte. Esto expresado en forma fraccionaria sería $1/5$; 1 es la parte que tomamos de la unidad, dividida por el denominador en 5 partes.

Supongamos ahora una naranja con doce gajos (fig. IV-1-b) y se la van a comer 4 amigos de modo que a cada uno de ellos les

Corresponde la misma cantidad. La unidad está dividida en 12 partes, es decir, el denominador es evidente que será 12. Pero ¿y el numerador?, pensamos que si hay doce gajos para que cada uno se coma la misma cantidad de naranja, tendrán que corresponderle 3 gajos a cada uno, pues $12:4=3$.

Esto se puede escribir en forma de número fraccionario diciendo que a cada uno le corresponde las $3/12$ partes de la naranja; (la unidad se divide en doce partes y de ellas tomamos 3).

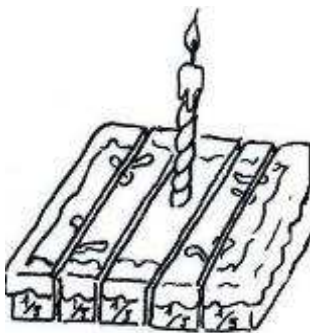


Fig. IV-1-a

Suponiendo la unidad dividida en 5 partes iguales, a cada uno le corresponde $1/5$ o la quinta parte de ella.

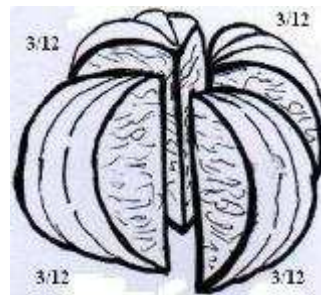


fig. IV-1-b

IV-2) FRACCIONES EQUIVALENTES:

Las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes, cuando se verifica que $a \cdot d = b \cdot c$ y se verifica además que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ puesto que ambas fracciones representan el mismo cociente o bien el mismo número racional.

IV-3) PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES:

El valor de una fracción no se altera al multiplicar el numerador y denominador de dicha fracción por el mismo número. O dicho de otra forma: al multiplicar i dividir los dos términos de una fracción por el mismo número, obtendremos otra equivalente.

Demostración: sea la fracción a/b , si multiplico o divido a y b por m obtengo una fracción equivalente a a/b ; veámoslo:

$$a/b = ma/mb \text{ porque } \underline{a \cdot m \cdot b = b \cdot m \cdot a}$$

$$a/b = \frac{a/b}{b/m} \text{ porque } \underline{a \cdot b \cdot m = b \cdot a \cdot m} \quad c \cdot q \cdot d$$

IV-4) SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES:

Simplificar una fracción es obtener otra equivalente de términos más sencillos.

Es decir, la fracción p/q simplificada sería $\frac{p/n}{q/n}$

Ejemplo: simplificar $121/44$, dividido por 11, el numerador y el denominador y obtengo $11/4$;

$$121/44 = 11/4$$

IV-5) REDUCCIÓN DE FRACCIONES A COMÚN DENOMINADOR:

Para sumar y restar quebrados, necesitamos previamente reducirlos a común denominador, expndremos dos métodos:

A) Se obtiene el MCM de los denominadores que se pone como denominador común, luego este MCM se divide entre cada denominador y se multiplica por el número. (este sería el nuevo numerador), es decir, reducir a común denominador:

$$a/b \text{ y } c/d \quad \frac{\frac{MCM(b,d) \times a}{b}}{MCM(b,d)} \quad , \quad \frac{\frac{MCM(b,d) \times c}{d}}{MCM(b,d)}$$

Ejemplo: reducir a c.d. $3/4$ y $7/8$:

$$\text{El MCM es } 8, \text{ entonces } \frac{3}{4}, \frac{7}{8} = \frac{2 \times 3}{8}, \frac{1 \times 7}{8} = \frac{6}{8}, \frac{7}{8}$$

B) El segundo método es como sigue:

Multiplicamos el numerador de cada fracción por los denominadores de los demás, excepto el suyo, con esto formamos los nuevos numeradores, como denominador común se pone el producto de los denominadores, es decir:

$a/b, c/d, e/f$ nos dará:

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} = \frac{a \times d \times f}{b \times d \times f}, \frac{c \times b \times f}{b \times d \times f}, \frac{e \times d \times b}{b \times d \times f}$$

Por ejemplo:

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7} = \frac{56}{84}, \frac{63}{84}, \frac{60}{84}$$

IV-6) SUMA DE FRACCIONES:

Para sumar fracciones, se reducen a común denominador y luego se suman los numeradores, (que será el nuevo numerador y como denominador el denominador común).

Ejemplos: $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{2}{6}$ = (si reducimos a común denominador por el primero de los métodos)

El MCM es 30, entonces:

$$\frac{10 \times 2}{30} + \frac{6 \times 3}{30} + \frac{5 \times 2}{30} = \frac{20 \times 18 \times 10}{30} = \frac{48}{30}$$

Haciéndolo por el segundo método:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{2} = \frac{2 \times 6 \times 5}{90} + \frac{3 \times 3 \times 6}{90} + \frac{2 \times 5 \times 3}{90} = \frac{60 + 54 + 30}{90} = \frac{144}{90} = \frac{48}{30}$$

Como podemos observar en ambos casos el resultado es idéntico, pero siempre será conveniente utilizar el método del MCM, porque la fracción resultante es siempre de términos más sencillos.

IV-7) DIFERENCIA DE FRACCIONES:

Para restar fracciones, se reducen a común denominador, luego restamos los numeradores y esta diferencia es el nuevo numerador, como denominador ponemos como en el caso anterior, el denominador común.

Ejemplo:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$$

En este caso el MCM de los denominadores coincide con su producto.

VI-8) FRACCIÓN OPUESTA DE OTRA:

De dos fracciones se dice que una es opuesta de otra cuando sumadas obtenemos el cero de los números racionales:

$$a/b + (-a/b) = \frac{a - a}{b} = \frac{0}{b} = 0;$$

La fracción opuesta a $3/4$ será $-3/4$ porque $3/4 + (-3/4) = 0$

IV-9) MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES:

Para multiplicar fracciones, multiplicaremos los numeradores u este producto es el nuevo numerador, luego multiplicamos los denominadores y tenemos el nuevo denominador.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{a \times c \times e}{b \times d \times f}$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 4} = \frac{6}{48}$$

IV-10) FRACCIÓN INVERSA DE OTRA:

Dadas dos fracciones decimos que una es inversa de otra cuando el producto de ambas da como resultado la unidad.

a/b y b/a son dos fracciones inversas porque.

$$a/b \cdot b/a = a \cdot b/b \cdot a = 1$$

Ejemplo: la fracción inversa de $2/3$ es $3/2$ porque $2/3 \cdot 3/2 = 6/6 = 1$

IV-11) DIVISIÓN DE FRACCIONES.

Para dividir dos fracciones, multiplicamos el numerador de la primera por el denominador de la segunda, lo que nos da el numerador del cociente, luego multiplicamos el denominador de la primera por el numerador de la segunda y obtenemos el denominador del cociente, es decir:

$$a/b : c/d = a \cdot d/b \cdot c$$

El cociente se puede expresar también de esta forma.

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Ejemplo: $3/4 : 2/5 = 3 \cdot 5/4 \cdot 2 = 15/8$

NOTA: la operación de dividir la podemos traducir a una operación de multiplicar ya que dividir no es más que multiplicar por el inverso, es decir:

$$a/b : c/d = a \cdot d/b \cdot c$$

$$a/b \cdot d/c = a \cdot d/b \cdot c$$

IV-12) MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE UN ENTERO POR UNA FRACCIÓN:

A) Para multiplicar un número por una fracción multiplicaremos el número por el numerador y dejamos el mismo denominador o bien dividimos el denominador entre el número y dejamos el mismo numerador, es decir:

$$a \cdot b/c = a \cdot b/c \quad \text{o bien;} \quad a \cdot b/c = b/c : a$$

B) Para dividir un número por una fracción, se multiplica el número por el denominador y obtenemos el nuevo numerador, el denominador nuevo será el numerador de la fracción.

Ejemplo: $3 : 4/5 = 3 \cdot 5/4$

C) Para dividir una fracción por un número hemos de tener en cuenta en primer lugar que no se trata del mismo caso que el anterior, puesto que, como sabemos, en la división no se cumple la propiedad conmutativa.

Para efectuar esta operación podemos proceder de dos formas:

1º) Dividimos el numerador de la fracción por el número y dejamos el mismo denominador.

$$a/b : c = \frac{a/c}{b}$$

2º) Multiplicamos el denominador de la fracción por el número y dejamos el mismo numerador.

$$a/b : c = a/b \cdot c$$

$$\text{Ejemplo: } 4/6 : 3 = 4/6 \cdot 3 = 4/18$$

En ambos casos el resultado final es el mismo.

NOTA: se puede evitar recordar el modo de proceder en los casos A), B), C), simplemente se escribe el entero en forma de fracción dividiéndolo por la unidad, y se opera como ya conocíamos de los apartados IV-9) y IV-11).

$$\text{Es decir: } a \cdot b/c = a/1 \cdot b/c = \frac{a \times b}{1 \times c}$$

$$a : b/c = a/1 : b/c = \frac{a \times c}{b \times 1}$$

$$a/b : c = a/b : c/1 = \frac{a \times 1}{b \times c}$$

También puede resultar muy cómodo en otras ocasiones, multiplicar por el inverso, en lugar de dividir, es decir:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

$$a : b/c = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \times c}{b}$$

Ejemplo:

$$2 : \frac{4}{3} = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{4}$$

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{4 \times 2} = \frac{3}{8}$$

IV-13) FRACCIÓN DECIMAL:

Es aquella cuyo denominador es una potencia de 10.

Ejemplo: $7/10 = 0'7$; $36/1000 = 0'036$ etc.

IV-14) FRACCIÓN ORDINARIA:

Es aquella cuyo denominador no es potencia de 10.

Ejemplo: $3/7$; $5/9$; etc.

Tanto las primeras como las segundas pueden ser:

A) **FRACCIONES PROPIAS:** son las que tienen el numerador menor que el denominador.

Fracción propia: a/b si $a < b$.

B) **FRACCIONES IMPROPIAS:** si tienen el numerador mayor o igual que el denominador.

Fracción impropia: a/b si $a > b$.

Si dividimos el numerador de una fracción por el denominador se pueden obtener las siguientes expresiones:

1) **DECIMAL EXACTA:** si la división es exacta.

Ejemplo: $7/25 = 0'28$.

2) DECIMAL PERIODICA PURA: si la división no es exacta y las cifras se repiten periódicamente a partir de la coma.

Ejemplo: $7/11 = 0,6363\dots = 0,\overline{63}$ (la representamos colocando un arco sobre las cifras que forman el periodo)

3) DECIMAL PERIODICA MIXTA: si la división es inexacta y las cifras se repiten periódicamente, pero no a partir de la coma.

Ejemplo: $7/15 = 0,466666\dots = 0,4\overline{6}$.

IV-15) FRACCIONES GENERATRICES:

Se llaman fracciones generatrices de las decimales exactas, periódicas puras y mixtas, las fracciones que las originan. Vemos como se obtienen:

1) FRACCIÓN GENERATRIZ DE UNA DECIMAL EXACTA:

Se obtiene poniendo por numerador el mismo decimal sin la coma y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga, es decir: $0,24 = 24/100 = 6/25$ (fracción simplificada).

2) FRACCIÓN GENERATRIZ DE UNA PERIODICA PURA:

a) Si la parte entera es nula, se obtiene poniendo de numerador el periodo y por denominador un número formado por tantos nueves como cifras tiene el periodo.

b) Si la parte entera no es nula, el numerador se forma restando a la parte entera seguida del periodo, la parte entera y por denominador se pone como en el caso anterior, tantos nueves como cifras tiene el periodo.

Ejemplo de a) $0,45 = 45/99 = 5/11$ (simplificada)

$$\text{de b) } 6,3\overline{6} = \frac{636 - 6}{99}$$

3) FRACCIÓN GENERATRIZ DE UNA PERIODICA MIXTA:

a) Si la parte entera es nula, el numerador se obtiene restando del número formado por el anteperiodo seguido del periodo, el anteperiodo. Y el denominador está formado por tantos nueves como cifras tiene el periodo y tantos ceros como cifras tienen el anteperiodo.

b) Si la parte entera no es nula, entonces restamos en el numerador del número decimal sin coma la parte entera seguida del anteperiodo, y como denominador ponemos tantos nueves como cifras tiene el periodo y ceros como cifras tiene el anteperiodo.

$$\text{Ejemplo de a) } 0,abc = \frac{abc - a}{990}$$

$$\text{de b) } a,abc = \frac{abc - ab}{90}$$

$$\text{Ejemplo numérico: } 0,23\overline{7} = \frac{237 - 2}{990} = \frac{235}{990} = \frac{47}{198}$$

IV-16) EJERCICIOS RESUELTOS:

1) Hallar las fracciones irreducibles equivalentes a:

$$\frac{1248}{4316}, \frac{7182}{9234}, \frac{6561}{65536}$$

1° Caso: $\frac{1248}{4316}$ DISCUSIÓN: podría solucionarse de la siguiente forma, si observamos

el numerador y denominador, ambos son múltiplos de 2, por tanto dividimos por 2 el numerador y el denominador, aplicando la propiedad fundamental de las fracciones,

$\frac{1248}{4316} = \frac{624}{2158}$, en esta fracción ocurre lo mismo que en la original, por tanto dividimos

de nuevo por 2 y tenemos $\frac{624}{2158} = \frac{312}{1079}$ y esta fracción es equivalente a la primera y ambas irreducibles porque numerador y denominador son primos entre si.

2° Caso: $\frac{7182}{9234}$ dividido por 2 = $\frac{3591}{4617}$ ambos son divisibles por 3 de donde obtengo la

fracción $\frac{1197}{1539} =$ dividiendo por 3 = $\frac{399}{513}$ dividido por 3 = $\frac{133}{171}$ = ambos son divisibles

por 7 = $\frac{7}{9}$, que es una fracción irreducible porque 7 y 9 son primos entre si.

4° Caso: $\frac{6561}{65556}$ dividido por 3 = $\frac{2187}{21852} = \frac{729}{7286} = \frac{243}{2428}$ y estos últimos son primos entre si. (*)

(*)Este proceso se puede simplificar descomponiendo numerador y denominador en factores primos, y eliminando los factores primos comunes del numerador con los del denominador como en este ejemplo:

$$\frac{567}{148} = \frac{3 \times 7}{3 \times 2} = \frac{7 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{7}{18}$$

OPERACIONES CON FRACCIONES:

5° $3/4 + 2/6 + 3/12 + 5/18 = \frac{27}{36} + \frac{12}{36} + \frac{9}{36} + \frac{10}{36} = \frac{27+12+9+10}{36} = \frac{58}{36} = \frac{29}{18}$ es la

fracción irreducible.

Para resolverlo primero obtenemos el mcm de los denominadores y este lo dividimos entre el numerador correspondiente.

$$4 = 2^2$$

$$6 = 2 \times 3 \quad \text{el mcm es } 2^2 \times 3^3 = 36$$

$$12 = 2^3 \times 3$$

$$18 = 2 \times 3^2$$

6° $2/4 + 3/6 + 5/8 + 3/5 =$ primero obtenemos el mcm de los denominadores.

$$4 = 2^2$$

$$6 = 2 \times 3 \quad \text{el mcm e } 2^3 \times 3 \times 5 = 120$$

$$8 = 2^3$$

$$5 = 5$$

Entonces tenemos que $2/4 + 3/6 + 5/8 + 3/5 = \frac{60+60+75+72}{120} = \frac{267}{120} = \frac{89}{40}$ es la

fracción irreducible.

Resolvamos por el método de tomar como denominador común el producto de todos los denominadores.

$2/4 + 3/6 + 5/8 + 3/5 = \frac{480}{960} + \frac{480}{960} + \frac{600}{960} + \frac{576}{960} = \frac{2136}{960}$ = si obtenemos la fracción irreducible de esta = $\frac{2136}{960} = \frac{1068}{480} = \frac{534}{240} = \frac{267}{120} = \frac{89}{40}$; como podemos ver la solución es idéntica en ambos casos.

7) $3/4 - 1/3$; esta diferencia se soluciona como en el caso de una suma, reduciendo primero a mcm y restando los numeradores, dejando como denominador común $3/4 - 1/3 = \frac{9-4}{12} = \frac{5}{12}$ es fracción irreducible.

El mcm es 12.

8) $2/3 - 4/5$ = el mcm es 15;

$2/3 - 4/5 = \frac{10-12}{15} = \frac{-2}{15}$ es irreducible.

9) Sea $2/4 + 3/6 + 5/8 - 2/6 + 3/5 - 3/4$ = (el mcm es 120)

$\frac{60}{120} + \frac{60}{120} + \frac{75}{120} - \frac{40}{120} + \frac{72}{120} - \frac{90}{120} = \frac{60+60+75-40+72-90}{120} = \frac{137}{120}$ es decir,

operamos como para sumar y ponemos como numerador los correspondientes resultados afectados de su signo.

10) $2/6 + 3/4 - 2 + 5/3 - 3$ = (el mcm es 24)

$\frac{8+18-48+4-72}{24} = \frac{90}{24} = \frac{-45}{12} = \frac{-15}{4}$ en este caso alternamos números enteros con

números fraccionarios (rationales), no representa ningún problema, ya que cualquier entero se puede escribir en forma de fracción tomando como denominador del mismo la unidad. Es decir, que el ejercicio propuesto siempre se puede escribir así:

$2/6 + 3/4 - 2/1 + 5/3 - 3/1 = -15/4$.

11) $2/4 \times 6/5 \times 4/9 \times 3/6$ = para efectuar la multiplicación, multiplicamos los numeradores y dividimos por el producto de los denominadores:

$= \frac{2 \times 6 \times 4 \times 3}{4 \times 5 \times 9 \times 6} = \frac{144}{1080} = \frac{72}{540} = \frac{36}{270} = \frac{18}{135} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$

12) La división puede venir planteada bajo dos aspectos:

Uno de ellos es $6/4 : 2/3$ = el numerador de la primera por el denominador de la segunda, resulta el numerador del cociente; el denominador de la primera por el denominador de la segunda nos da el denominador del cociente. (es decir, multiplicamos en cruz).

$6/2 : 2/3 = \frac{6 \times 3}{4 \times 2} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$

13) Otra forma de venir planteada la división es: $\frac{3/4}{2/3}$ esta división es lo mismo que

$3/4 : 2/3 = \frac{3 \times 3}{4 \times 2} = \frac{9}{8}$

14) Resolver $2 \times 3/4$. Este caso es el de multiplicar un número por una fracción, multiplicamos el número por el numerador o dividimos el denominador entre el número:

$2 \cdot 3/4 = \frac{2 \times 3}{4} = 6/4 = 3/2$ o bien

$2 \cdot 3/4 = \frac{3}{4 : 2} = 3/2$

15) Resolver $4/6 : 3$; este caso se trata de dividir una fracción por un número, para esto dividimos el numerador de la fracción por el número obteniendo así el nuevo numerador de la fracción resultante, el denominador sería el mismo, o bien dejamos el mismo numerador y multiplicamos el denominador por el número para obtener el nuevo denominador de la fracción, es decir:

$$4/6 : 3 = \frac{4/3}{6} = 0\widehat{2} \text{ o bien}$$

$$4/6 : 3 = \frac{4}{6 \times 3} = 0\widehat{2}$$

16) Resolver $2 : 6/3$, en este caso se divide un número por una fracción, es una situación distinta a la anterior, pues como sabemos, la división no cumple la propiedad conmutativa. En este caso el nuevo numerador de la fracción resultante se obtiene: multiplicando el número por el denominador de la fracción, el nuevo denominador será el numerador de la fracción.

$$2 : 6/3 = \frac{2 \times 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Pero estas tres últimas situaciones se pueden resolver muy fácilmente convirtiendo los enteros en fracciones en la forma que conocemos:

$$a \cdot b/c = a/1 \cdot b/c = \frac{a \times b}{1 \times c}$$

$$a/b : c = a/b : c/1 = \frac{a \times 1}{b \times c}$$

$$a : b/c = a/1 : b/c = \frac{a \times c}{b \times 1}$$

CASTILLOS:

$$17) \frac{\frac{(a)3/4 + 2}{(b)2/4 + 1}}{\frac{(c)2/3 + 2}{(d)3/2 \times 4}} =$$

Para realizar esta operación efectuamos por separado a, luego b, c y por último d.

$$(a) 3/4 + 2 = 3/4 + 8/4 = 11/4$$

$$(b) 2/4 + 1 = 2/4 + 4/4 = 6/4$$

$$(c) 2/3 + 2 = 2/3 + 6/3 = 8/3$$

$$(d) 3/2 \times 4 = \frac{3 \times 4}{2} = 12/2$$

Que nos quedará así:

$$(e) \frac{11/4}{6/4} =$$

$$(f) \frac{8/3}{12/2} =$$

Ahora efectuamos por separado (e) y (f).

$$(e) \frac{11/4}{6/4} = 11/4 : 6/4 = \frac{11 \times 4}{6 \times 4} = \frac{44}{24}$$

$$(f) \frac{8/3}{12/2} = 8/3 \cdot 2/12 = \frac{16}{36}$$

En definitiva nos queda $\frac{44/24}{16/36} = 44/24 : 16/36$

$$\frac{44 \times 36}{16 \times 24} = \frac{1584}{384} = \dots \frac{33}{8}$$

18)

$$\frac{(a)2/3 + 3/2}{(b)4/2 - 2/5} = \frac{(a)4 + 9}{(b)20 - 4} = \frac{(e)13/6}{(c)9/2} = \frac{(d)4/3 : 2/4}{(d)16/6} = \frac{16/10}{(f)9/2} = \frac{16/6}{16/6}$$

De donde tenemos que:

$$(e) = 13/6 : 16/10 = \frac{130}{96}$$

$$(f) = 9/2 : 16/6 = \frac{54}{32}$$

$$\text{Luego } e/f = \frac{130/96}{54/32} = \text{y por tanto} = 130/96 : 54/32 = \frac{4160}{5184}$$

$$19) \frac{3/4 + 2/3(p)}{3 \times 3/4 \times 2/3(j)} = \text{operamos por separado}$$

$$p = \frac{9 + 8}{12} = \frac{17}{12}$$

$$t = \frac{18 - 10}{30} = \frac{8}{30} = \frac{17/18}{18/12} = \frac{17/12 : 8/30}{18/12 : 30/4} = \frac{30/4}{30/4}$$

$$j = \frac{3 \times 2 \times 3}{4 \times 3} = \frac{18}{12} = \frac{17}{18} \cdot \frac{30}{8} = \frac{510}{72} = \frac{72}{360} = \frac{183600}{6912}$$

$$q = \frac{5 \times 6}{2 \times 2} = \frac{30}{4}$$

EJERCICIOS EN LOS QUE OPERAMOS CON NÚMEROS FRACCIONARIOS:

20) José tiene 1200 pesetas y Juan tiene las tres cuartas partes de lo que tiene José ¿Cuánto tienen en total?

Discusión:

José tiene 1200 pesetas

Juan tiene las 3/4 partes de 1200, para obtener 3/4 partes de una cantidad, se multiplica 3/4 por dicha cantidad. Esto no es más que recordar el concepto de número fraccionario:

“EL DENOMINADOR INDICA EL NÚMERO DE PARTES EN QUE SE DIVIDE LA UNIDAD Y EL NUMERADOR LAS PARTES QUE SE TOMAN DE ESTA UNIDAD DIVIDIDA”. En nuestro ejemplo la unidad a dividir son 1200 pesetas, que si lo dividimos entre 4 obtengo “300, 300, 300,300” (cuatro veces 300 pesetas). De estas cuatro partes tomo tres, es decir: $300 \times 3 = 900$, es decir: $\frac{3}{4} \times 1200 = \frac{3 \times 1200}{4} = \frac{3600}{4} = 900$. En total , ambos tendrán $1200+900= 2100$

21) Si una tableta de chocolate pesa 200gr. ¿Cuánto pesará la cuarta parte de la mitad de dicha tableta?

Es evidente que tendremos que obtener primero el peso de la mitad de la tableta y de esta mitad obtener la cuarta parte de la misma. Es decir:

La mitad de 200gr. es $200 \times \frac{1}{2} = \frac{200}{2} = 100$.

La cuarta parte de esto sería $100 \times \frac{1}{4} = \frac{100}{4} = 25$ gr.

También la cuarta parte de la mitad no deja de ser $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ de 200gr. sería $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times 200 = \frac{200}{8} = 25$ gr.

22) Repartimos 5.000 pesetas entre 3 hermanos. Al mayor le damos la mitad, al segundo los $\frac{3}{5}$ del mayor y al tercero la quinta parte del total. ¿Cuanto recibió cada hermano?

El 1º recibe la mitad, luego $5000 \times \frac{1}{2} = 2500$ pesetas.

El 2º recibe los $\frac{3}{5}$ de mayor, será: $\frac{3}{5} \times 2500 = \frac{7500}{5} = 1500$ pesetas.

El 3º recibe la $\frac{1}{5}$ parte del total, es decir: $\frac{1}{5} \times 5000 = \frac{5000}{5} = 1000$ pesetas.

UNIDAD DIDACTICA V
POTENCIACIÓN
OPERACIONES CON POTENCIAS

V-1 POTENCIA:

Cada potencia consta de dos términos:

‘‘a’’ base y ‘‘b’’ exponente.

x^n se lee x elevado a n, n es el exponente.

-Elevar un número a una potencia es repetirlo como factor tantas veces como se indica en el exponente:

$$X^n = x \cdot x \cdot x \cdot x \dots \dots \dots x \text{ (n veces)}$$

$$A^n = A \cdot A \cdot A \cdot A \dots \dots \dots A \text{ (n veces)}$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A \dots \dots \dots \text{ (Esto es 3 veces)}$$

V-2) POTENCIA DE ‘‘10’’:

A).Para transformar la unidad de ceros en una potencia de 10, se escribe como base el número 10 y como exponente ‘‘n’’, número entero igual al número de ceros que sigue a la unidad; es decir:

$$10 = 10^1$$

$$100 = 10^2$$

$$1000 = 10^3$$

$$10000 = 10^4$$

$$100000 = 10^5$$

$$1000000 = 10^6$$

.....
B).Cualquier número se puede escribir en forma de potencias de 10 sin que este número acabe en cero. Ya que siempre puede escribirse:

$$3245 = 324'5 \cdot 10^1$$

$$= 32'45 \cdot 10^2$$

$$= 3'245 \cdot 10^3$$

$$= 0'3245 \cdot 10^4$$

.....
Algunos le llaman a esta forma de escribir notación exponencial o científica, que se utiliza en algunas de sus calculadoras de bolsillo y en muchos ordenadores.

V-3) PRODUCTOS DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE:

Para multiplicar potencias de la misma base, se escribe la misma base, y como exponente la suma de los exponentes, es decir:

$$a^3 \cdot a^2 \cdot a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^9 = a^{3+2+4}$$

Por la propia definición de potencia.

V-4) COCIENTE DE POTENCIA DE IGUAL BASE.

Para dividir potencias de igual base, se escribe la misma base y como exponente la diferencia de los exponentes, es decir:

$$\frac{a^3}{a^2} = \frac{a \times a \times a}{a \times a} = a^1 = a^{3-2}$$

V-5) POTENCIA DE OTRA POTENCIA:

Para elevar una potencia a un exponente, se escribe la misma base, y como exponente el producto de los exponentes, es decir:

$$(a^3)^4 = (a \cdot a \cdot a)^4 = (a \cdot a \cdot a) (a \cdot a \cdot a) (a \cdot a \cdot a) (a \cdot a \cdot a) = a^{12} = a^{3 \times 4}$$

V-6) POTENCIA DE UN EXPONENTE:

Todo n° elevado a 1 es el mismo número, es decir:

$$a^1 = a$$

V-7) POTENCIA DE EXPONENTE ‘‘0’’:

Todo n° elevado a ‘‘0’’ es igual a la unidad, es decir:

$$a^0 = 1$$

V-8) POENCIAS DE EXPONENTE NEGATIVO:

Cualquier potencia de exponente negativo se puede escribir como la unidad dividida por esa misma potencia de exponente positivo:

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

V-9) POTENCIA DE UN PRODUCTO:

Para elevar un producto de varios factores a un exponente se eleva cada uno de estos factores, es decir:

$$(a \cdot b \cdot c)^3 = (a \cdot b \cdot c) (a \cdot b \cdot c) (a \cdot b \cdot c) = (a \cdot a \cdot a) (b \cdot b \cdot b) (c \cdot c \cdot c) = a^3 \cdot b^3 \cdot c^3$$

V-10) POTENCIA DE UN COCIENTE:

Para elevar un cociente de dos números a una potencia se elevan el dividendo y el divisor, es decir:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times a \times a}{b \times b \times b} = \frac{a^3}{b^3}$$

V-10) EJERCICIOS:

-Efectuar las siguientes operaciones:

$$1) 5^4 \cdot 5^5 \cdot 5^6 = 5^{4+5+6} = 5^{15}$$

$$2) [(5)^3]^4 = 5^{12}$$

$$3) [(-4)^2]^3 = (-4)^6 = 4^6$$

$$4) \frac{3^4}{3^6} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2}$$

$$5) (4 \cdot 3 \cdot 2)^2 = 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 = 16 \cdot 9 \cdot 4 = 576$$

$$6) \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

$$7) \left(\frac{6}{3}\right)^3 = \frac{6^3}{3^3} = \dots\dots\dots$$

$$8) (5^{-3} \cdot 5^{-4} \cdot 5^5) = 5^{(-3)+(-4)+5} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2}$$

$$9) \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{1}{\frac{2^3}{3^3}} = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$$

EJERCICIOS RESUELTOS:

$$1) \frac{a^2 \times a^3 \times a^{-3} \times a^5}{a^3 \times a^4 \times a^{-2} \times a} =$$

DISCUSIÓN: en este ejercicio se trata de simplificar al máximo esta expresión, hemos de pensar que estamos ante un producto de potencias de igual base y ante un cociente de potencias de igual base. Aplicaremos en el numerador u en el denominador las propiedades del producto de potencias de igual base y al resultado se le aplicará el concepto de potencias de igual base, es decir:

$$\frac{a^2 \times a^3 \times a^{-3} \times a^5}{a^3 \times a^4 \times a^{-2} \times a} = \frac{a^{2+3-3+5}}{a^{3+4-2+1}} = \frac{a^7}{a^8} = a^7 : a^8 = a^{7-8} = a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$2) \frac{a^2 \times a^5 \times a^6 \times a^{-3}}{a^2 \times a^5 \times a^6 \times a^{-2}} = \frac{a^{2+5+6-3}}{a^{2+5+6-2}} = \frac{a^{10}}{a^{11}} = a^{10-11} = a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$3) \frac{3 \times 27 \times 27^4 \times 9^{-2} \times 3^3}{81 \times 9^2 \times 9^6 \times 27 \times 81^{-2}} = (1)$$

DISCUSIÓN: de la observación del ejercicio deducimos que tanto 9 como 27 como 81 son potencias de 3. Para comprobarlo solo tengo que descomponer en factores primos y obtenemos:

$$\begin{array}{l}
 9 \left| \begin{array}{l} 3 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right. \quad 9 = 3^2 \\
 27 \left| \begin{array}{l} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right. \quad 27 = 3^3 \\
 81 \left| \begin{array}{l} 3 \\ 27 \\ 9 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right. \quad 81 = 3^4
 \end{array}$$

Introducimos este resultado en la expresión (1) y aplicamos las propiedades de las potencias:

Con lo que dicha expresión quedará así:

$$\frac{3 \times 3^3 \times (3^3)^4 \times (3^2)^{-2} \times 3^3}{3^4 \times (3^2)^2 \times (3^2)^6 \times 3^3 \times (3^4)^{-2}} = \frac{3 \times 3^3 \times 3^{12} \times 3^{-4} \times 3^3}{3^4 \times 3^4 \times 3^{12} \times 3^3 \times 3^{-8}} =$$

UNIDAD DIDACTICA VI RADICACIÓN:

VI-1) LA RAÍZ COMO POTENCIA: operaciones con raíces, exponente fraccionario:

Vamos a estudiar las raíces como potencias de exponente fraccionario; la expresión

$\sqrt[n]{a^m}$ se lee: raíz enésima de ‘a’ elevado a ‘m’. a = radicando
n = índice
m = exponente.

Esto también se puede escribir así: $a^{m/n}$; es decir: que toda raíz se puede escribir en forma de potencia con exponente fraccionario, cuyo numerador es el exponente y cuyo denominador es el índice de la raíz.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^5} &= a^{5/3} & b^{a/2} &= \sqrt[2]{b^a} \\ \sqrt{a} &= a^{1/2} & a^{-2/3} &= -\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} \end{aligned}$$

Como consecuencia de lo expuesto se puede decir que ‘tomas las operaciones que se pudieron efectuar con potencias, se podrán realizar también con raíces’.

VI-2) RAÍZ DE UN PRODUCTO:

La raíz de un producto de varios factores es igual al producto de las raíces de cada uno de los factores.

$\sqrt{a \cdot b \cdot c} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c}$ porque $(a \cdot b \cdot c)^{1/2} = a^{1/2} \cdot b^{1/2} \cdot c^{1/2}$ propiedad de las potencias.

VI-3) RAÍZ DE UN COCIENTE:

La raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ Porque } \left(\frac{a}{b}\right)^{1/2} = \frac{a^{1/2}}{b^{1/2}}.$$

VI-4) RAÍZ DE OTRA RAÍZ.

La raíz de otra raíz será análogo a potencia de otra potencia:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = (a^{1/m})^{1/n} = a^{1/m \times 1/n} = a^{1/mn} = \sqrt[mn]{a}$$

Tiene por radicando el mismo y por índice el producto de los índices.

VI-5) RACIONALIZACIÓN DE FRACCIONES:

Racionalizar una fracción es eliminar la raíz del denominador.
Consideremos dos casos:

a) Que el denominador tenga un solo término:

Para racionalizar una fracción del tipo $Q/\sqrt[n]{b^p}$ basta multiplicar numerador y denominador por $\sqrt[n]{b^{n-p}}$; si se tratase de una raíz cuadrada se multiplicaría numerador y denominador por el denominador.

Ejemplos:

a-1) Racionalizar: $\frac{7}{\sqrt[5]{2^3}}$

$$\frac{7}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{7 \times \sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^2}} = \frac{7 \times \sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{7 \times \sqrt[5]{2^2}}{2}$$

a-2) Racionalizar:

$$\frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{7 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

b) Que el denominador sea un binomio irracional cuadrático: UN BINOMIO

IRRACIONAL CUADRÁTICO es una expresión formada por dos términos tales que uno, o los dos son raíces cuadradas, por ejemplo: $a + \sqrt{p} - \sqrt{q}$ y $t\sqrt{p} + \sqrt{q}$ son dos binomios irracionales cuadráticos.

Dos binomios irracionales cuadráticos se llaman BINOMIOS CONJUGADOS, si solo difieren en el signo del segundo término es decir: $t\sqrt{p} - \sqrt{q}$ y $t\sqrt{p} + \sqrt{q}$ son dos binomios irracionales cuadráticos conjugados.

Para racionalizar es este caso se multiplican el numerador y denominador de la fracción por el binomio conjugado del denominador.

Ejemplo: racionalizar;

$$\frac{5}{2\sqrt{7} - \sqrt{3}} = \frac{5(2\sqrt{7} + \sqrt{3})}{(2\sqrt{7} - \sqrt{3})(2\sqrt{7} + \sqrt{3})} = \frac{5(2\sqrt{7} + \sqrt{3})}{(2\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{5(2\sqrt{7} + \sqrt{3})}{28 - 3} = \frac{5(2\sqrt{7} + \sqrt{3})}{25} = \frac{2\sqrt{7} + \sqrt{3}}{5}$$

VI-6) RAÍZ CUADRADA:

La raíz cuadrada es la única raíz cuyo cálculo directo es práctico. Si la raíz cuadrada de un número es exacta puede obtenerse mediante descomposición factorial del radicando. Pero el caso más general es que la raíz no sea exacta, es decir, sea raíz cuadrada entera. En la obtención de la raíz cuadrada entera se pueden considerar dos casos.

1º) El radicando es menor que 100: en este caso la raíz tiene una sola cifra, y para hallarla basta recordar los cuadrados de los nueve primeros números. El mayor número cuyo cuadrado esté contenido en el radicando es la raíz buscada.

Ejemplo: calcular $\sqrt{73}$.

Solución: la raíz entera es 8 porque este es el mayor número cuyo cuadrado está contenido en 73.

2º) El radicando mayor que 100: en este caso la raíz tiene más de una cifra. La regla para obtenerla, estudiada en cursos anteriores, es la siguiente:

Se comienza dividiendo el radicando en grupos de dos cifras, empezando por la derecha y pudiendo tener el primer grupo de la izquierda una sola cifra. Se extrae la raíz cuadrada del primer grupo de la izquierda y se obtiene la primera cifra de la raíz. El

cuadrado de esta cifra se resta del primer grupo de la izquierda y se tiene el primer resto parcial. A la derecha del resto obtenido se escribe el segundo grupo del radicando, separando con un punto la última cifra del número obtenido. El número a la izquierda del punto se divide por el duplo de la primera cifra de la raíz, escribiendo este divisor en la horizontal del resto parcial. El cociente hallado será la segunda cifra de la raíz o un número mayor que ella. Para averiguar si el cociente obtenido es la cifra adecuada se escribe a la derecha del divisor y se multiplica el número resultante por la cifra que se ensaya. Si el producto hallado se puede restar del resto parcial, la cifra es válida. Si no fuera la cifra apropiada, se ensayan las inmediatas inferiores. Se ensayará la cifra nueve siempre que el cociente hallado sea este número o mayor. Para obtener las restantes cifras de la raíz se reitera el proceso reseñado. Es interesante comprobar, al extraer cada cifra de la raíz, si el resto obtenido es ‘a’ le sumo el duplo de la raíz.

$$\sqrt{\text{radicando}} | \text{raíz}$$

Resto

Radicando = raíz + resto

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{2.46.59} & 157 \\ \underline{1} & 25 \times 5 \\ 146 & 307 \times 7 \\ \underline{125} & \\ 2159 & \\ \underline{2149} & \\ 10 & \end{array}$$

$$24.659 = 157^2 + 10$$

VI-7) EJERCICIOS RESUELTOS:

1º) Simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt{a} \times \sqrt[5]{a^2} \times a^{-2/5} \times \sqrt{a} \times a^6}{\sqrt{a^2} \times a^3 \times \sqrt{a^6}} = \frac{a^{1/2} \times a^{2/5} \times a^{-2/5} \times a^{1/2} \times a^6}{a^{2/2} \times a^3 \times a^{6/2}}$$

Nos encontramos ahora ante un producto de potencias de igual base, cuyos exponentes son fraccionarios. Sumamos estos exponentes fraccionarios tal y como sumamos fracciones, es decir, reduciendo a común denominador, sumando numeradores y dejando el denominador común de la siguiente forma:

$$= \frac{a^{1/2+1/2+2/5+6-2/5}}{a^{2/2+3+6/2}} = \frac{1/2+1/2+2/5+6-2/5}{2} = \frac{5+5+4-4+60}{10} = \frac{60+10}{10} = \frac{70}{10} = 7$$

$$2/2 + 3 + 6/2 = \frac{2+6+6}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Con lo que nos queda: $\frac{a^7}{a^7} = a^{7-7} = a^0 = a$

2º) Simplificar la expresión:

$$\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[6]{a^{-2}} \cdot \sqrt[5]{a^{-3/5}}}{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^{-2}} \cdot \sqrt{a}} = \text{transformando las raíces en potencias}$$

$$= \frac{a^{1/2} \cdot a^{2/6} \cdot a^{5/3} \cdot a^{-5/3}}{a^{1/3} \cdot a^{2/4} \cdot a^{1/2}} = \text{simplifico} = \frac{a^{1/2} \cdot a^{1/3}}{a^{1/3} \cdot a^{1/2} \cdot a^{1/2}} =$$

Aquí podemos proceder como en el caso anterior, o bien simplificar términos del numerador con los correspondientes del denominador; es decir:

$$\frac{a^{1/2} \cdot a^{1/3}}{a^{1/3} \cdot a^{1/2} \cdot a^{1/2}} = \frac{1}{a^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

3º) Obtener: $\frac{125 \cdot 5^3 \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt{625}}{25 \cdot 5^4 \cdot \sqrt{25^3}} = (*)$ se observa que tanto 25 como 125 y 625

son potencias de 5, para comprobarlo descompongo en factores y obtengo:

25	5	25 = 5 ²	125	5	125 = 5 ³	625	5	625 = 5 ⁴
	5			5			5	
	1			5			5	
				1			5	

Si los introducimos en la expresión (*) y aplicamos las propiedades de potencias, una vez hayamos transformado las raíces en potencias de exponente fraccionario, obtendremos:

$$(*) = \frac{5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^{2/2} \cdot 5^{3/3} \cdot 5^{4/2}}{5^2 \cdot 5^4 \cdot \sqrt{(5^2)^3}} = \frac{5^3 \cdot 5^3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5^2}{5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^{6/2}} = \frac{5^{3+3+1+1+2}}{5^{2+4+3}} = \frac{5^{10}}{5^9} = 5^{10-9} = 5$$

Otra forma de llegar al mismo resultado es: como hemos visto, sumar los exponentes fraccionarios, no olvidándonos de que como fracciones hay que reducir previamente a común denominador.

4º) $\frac{\sqrt{\sqrt{16^3} \sqrt{8} \cdot 32}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{256} \cdot 16} \cdot \sqrt[4]{16}}} = ?$

Si 126, 32 y 16 los descomponemos en potencias de 2, obtengo:

256	2	256 = 2 ⁸	32	2	32 = 2 ⁵	16	2	16 = 2 ⁴
	2			2			8	
	64			2			4	
	32			2			2	
	16			2				
	8			1				
	4							
	2							
	1							

Por tanto la expresión anterior quedará así:

$$\frac{[(2^4)^{1/2}]^{1/2} \cdot (2^3)^{1/3} \cdot 2^5}{\left\{[(2^8)^{1/2}]^{1/2}\right\}^{1/2} \cdot 2^4 \cdot (2^4)^{1/4}} = \frac{2^{4 \cdot 1/2 \cdot 1/2} \cdot 2^{3 \cdot 1/3} \cdot 2^5}{2^{8 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2} \cdot 2^4 \cdot 2^{4 \cdot 1/4}}$$

$$= \frac{2^{4/4} \cdot 2^{3/3} \cdot 2^5}{2^{8/8} \cdot 2^4 \cdot 2^{4/4}} = \frac{2 \cdot 2^{3/3} \cdot 2^5}{2 \cdot 2^4 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 2^{3/3} \cdot 2^5}{2 \cdot 2^4 \cdot 2} = \frac{2^{1+1+5}}{2^{1+4+1}} = \frac{2^7}{2^6} = 2^{7-6} = 2^1 = 2 //$$

5º) Operar utilizando la forma potencial con las siguientes raíces:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3^2} \cdot \sqrt[2]{3^3} = 3^{1/2} \cdot 3^{2/4} \cdot 3^{3/2} = 3^{1/2+2/4+3/2} = \sqrt{3^5}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{3^{1/2}}{3^{2/3}} = 3^{3/6-4/6} = 3^{-1/6} = \frac{1}{\sqrt[6]{3}}$

c) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

d) $\sqrt{\frac{4^3}{9^2}} = \frac{\sqrt{4^3}}{\sqrt{9^2}} = \frac{\sqrt{(2^2)^3}}{9} = \frac{\sqrt{2^6}}{9} = \frac{2^{6/2}}{9} = \frac{8}{9}$

e) $\sqrt{3 \cdot 4^3 \cdot 5^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{4^3} \cdot \sqrt{5} \dots\dots\dots$

f) $\sqrt{3^2} \cdot \sqrt[4]{3^8} \cdot 3^{-3} \cdot 3^{6/2} = 3 \cdot 3^2 \cdot 3^{-3} \cdot 3^3 = 3^3 = 27 //$

g) $\frac{\sqrt{9^2}}{\sqrt{3^4}} = 1; \frac{\sqrt[4]{27 \cdot 3}}{\sqrt[3]{9^3}} = \frac{1}{3^2}; \frac{\sqrt[6]{27^2}}{\sqrt[2]{9}} = 1 //$

h) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}} = \left\{[(256)^{1/2}]^{1/2}\right\}^{1/2} = 256^{1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2} = 256^{1/8} = \sqrt[8]{256} = 2 //$

i) $\sqrt[3]{\sqrt{729}} = [(729)^{1/2}]^{1/3} = 729^{1/2 \cdot 1/3} = 729^{1/6} = \sqrt[6]{729} = 3 //$

6º) Calcula: $\sqrt{65143}$

SOLUCIÓN: raíz_255
Resto_118

7º) Calcula: $\sqrt{99306144}$

SOLUCIÓN: raíz_33521
Resto_cero

8º) Calcula: $\sqrt{6600123}$

SOLUCIÓN: raíz_2569
Resto_362

UNIDAD DIDÁCTICA VII
PROPIEDAD DISTRIBUTIVA; OPERACIÓN DE SACAR F.C.

VII-1) REGLA DE LOS SIGNOS:

+	·	+	=	+
+	·	-	=	-
-	·	+	=	-
-	·	-	=	+

VII-2) PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.(Del producto respecto de la suma.)

Para multiplicar un número por la suma de otros varios, se multiplica el n° por cada uno de los sumandos.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$a \cdot (b-c) = a \cdot b - a \cdot c$$

$$(-a)(b+c) = -a \cdot b - a \cdot c$$

$$(-a)(b-c) = -a \cdot b + a \cdot c$$

Es decir multiplico el factor por cada sumando que se encuentra dentro del paréntesis.

VII-3) OPERACIÓN DE SACAR F.C.

Si nos encontramos ante una suma de productos de varios sumandos y en todos o en la mayoría de ellos existe el mismo factor, podemos aplicar la propiedad distributiva anterior, extrayendo este factor común fuera de un paréntesis, es decir: leyendo la 1ª igualdad de la sección VVI-2 de derecha a izquierda, como en este ejemplo:

$$a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + a \cdot e + a \cdot f = a(b+c+d+e+f)$$

Un caso más complejo de la operación de sacar F.C. son más de uno los F.C. y existen coeficientes, por ejemplo:

$$3px^2 + 9p^2x^3 + 27p^4x^6 + 6p^2x^2 = 3px^2(1 + 3px + 9p^3x^4 + 2p)$$

Es decir: el MCD de los números y las letras comunes elevadas al menor exponente dividiendo cada uno de los términos de la suma por este F.C.

VII-4) PRODUCTO DE DOS SUMAS:

Caso particular; un caso más complicado de la propiedad distributiva es el producto de dos sumas:

$$(a + b)(c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

Es decir, se multiplica cada sumando del primer factor por todos los sumandos del segundo factor.

VII-5) CUADRADO DE UNA SUMA Y DE UNA DIFERENCIA:

1º) Otra de las aplicaciones de la propiedad distributiva es el cuadrado de una suma, pues:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$

El cuadrado del 1º más el doble del 1º por el 2º más el cuadrado del 2º.

2º) Y también el cuadrado de una diferencia de dos números:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + (-b) \cdot (-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

El cuadrado del 1º menos el doble del 1º por el 2º más el cuadrado del 2º.

VII-6) CUBO DE UNA SUMA Y UNA DIFERENCIA:

Complicando un poco más los casos anteriores tenemos:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) \\ = a^2 \cdot a + a^2 \cdot b + 2ab \cdot a + 2ab \cdot b + b^2 \cdot a + b^2 \cdot b = \underline{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

El cubo del 1º + 3 veces el 1º por el cuadrado del 2º + el cubo del 2º.

Y también la DIFERENCIA:

$$(a-b)^3 = (a-b)^2 \cdot (a-b) = (a^2 + 2ab + b^2) = a^2 \cdot a - a^2b - 2ab \cdot a + 2ab \cdot b + b^2a - b^2 \cdot b \\ = \underline{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

VII-7) PRODUCTO DE UNA SUMA POR UNA DIFERENCIA DE DOS NÚMEROS:

$$(a-b) \cdot (a-b) = a \cdot a + b \cdot a - a \cdot b - b \cdot b = \underline{a^2 - b^2} \quad : \textit{El producto de una suma por una diferencia es igual a la diferencia de cuadrados.}$$

UNIDAD DIDÁCTICA VIII OPERACIONES CON MONOMIOS Y POLINOMIOS.

VIII-1) A.

MONOMIO:

Es toda expresión algebraica formada por números y letras no ligados por las operaciones de sumar o restar.

Ejemplo:

$$3x ; -5x^2y ; \frac{2}{9x^2}$$

Vamos a hablar de monomios enteros, es decir, aquellos en los que no hay denominadores ni raíces.

VIII-1) B.

COEFICIENTE:

Es el número o números que figuran como factores, es decir, 3 en el primer ejemplo y -5 en el segundo ejemplo.

VIII-1) C.

INDETERMINADAS:

Llamamos indeterminadas a las letras.

VIII-1) D.

GRADO DE UN MONOMIO:

Es la suma de los exponentes de sus letras (INDETERMINADAS).

$$\text{Ejemplo: } 5x^3 = \text{monomio de grado 3} \\ 5x^3y^4 = \text{monomio de grado 7}$$

VIII-1) E.POLINOMIOS:

2, 1) Es toda expresión algebraica que contiene varios monomios unidos mediante las operaciones de sumar y restar.

Ejemplo: $3x^2y - 4x + 7x^2y^2$ Binomio = 2 monomios
Trinomio = 3 monomios
Polinomio = a partir de 4 monomios

VIII-1) F.

2, 2 GRADO DE UN POLINOMIO:

El grado de un polinomio es el de su monomio de mayor grado.

Ejemplo: $3x^3y^4 + 2x^2y - 3x + 2x^5$, es un polinomio de grado 7.

VIII-1) G.

2, 3) POLINOMIO COMPLETO:

Es aquel que tiene términos de todos los grados, desde uno determinado hasta cero.

Ejemplo: un polinomio completo de 3º grado será:

$$5x^2 - 8 + 5x + 9x^3 \text{ término de grado cero.}$$

VIII-1) H.

2, 4) POLINOMIO ORDENADO:

Se dice que un polinomio está ordenado respecto de su indeterminada cuando los exponentes de la misma van aumentando o disminuyendo ordenadamente.

Ejemplo: $3x^3z - 6x^2y + x$; es un polinomio ordenado en x.

VIII-1) I.

2, 5) POLINOMIO HOMOGÉNEO:

Es aquel cuyos términos tienen todos el mismo grado. Ejemplo: $10xy^2 - 2x^2y - xyz$ es un trinomio homogéneo de 3º grado.

VIII-2)

Ejercicios:

- Un polinomio de 4º en x.
- Un polinomio completo y ordenado de 4º en y.
- Un polinomio completo y ordenado de 4º en z con una sola indeterminada.
- Un polinomio homogéneo en x e y, de 3º grado, ordenado y completo con relación a ambas letras.

SOLUCIONES:

- $3x^2 + 6x^4 - 2y$
- $3y^4z + 2y^3 - y^2x yx^2 - 1$
- $4z^4 - 3z^3 - 2z^2 - z$
- $3y^3 - 2xy^2 + 3x^2y + 5x^3$

2º PARTE.

VIII-3) OPERACIONES CON MONOMIOS Y POLINOMIOS:

MONOMIOS SEMEJANTES: Se llaman monomios semejantes los que tengan la misma parte literal pudiendo diferenciarse en el coeficiente.

Ejemplo: $3a^2b^3$; $-5a^2b^3$; a^2b^3 Los monomios son semejantes.

VIII-3) SUMA DE MONOMIOS:

Para sumar varios monomios se forma con todos ellos un polinomio, en el que aquellos figuran con sus propios signos. Si los monomios son semejantes se sumaran los coeficientes dejando las mismas indeterminadas con sus propios exponentes.

Ejemplo: sumar; $3a^2b^3 - (-5a^2b^3) + a^2b^3 = -a^2b^3$

VIII-4) SUMA Y DIFERENCIA DE POLINOMIOS:

Para sumar polinomios, se quitan paréntesis, formando un solo polinomio con todos los términos, y se reducen los términos semejantes, si los hay.

Ejemplo: $(5xy + 7x^3y^2) (6x^2 - 9x^3y^2 + 3xy^4 - z - 2) = 5xy + 7x^3y^2 - x^2 + 6x^2 - 9x^3y^4z - 2 =$ reduciendo términos semejantes $= 5xy - 2x^3y^2 + 5x^2 + 3xy^4z - 2$

Para restar polinomios, se quitan los paréntesis, cambiando el signo de todos los términos del sustraendo, y se reducen términos semejantes.

Ejemplo:

$(6ab^2 - 7b^3 + 2a^4b) - (4ac - 3b^3 + 2a^4b - c) = 6ab^2 - 7b^3 + 2a^4b - 4ac + 3b^3 + 2a^4b - c = 6ab^2 - 4b^3 - 4ac - c$

VIII-5) PRODUCTO DE MONOMIOS:

Para multiplicar monomios, se multiplican los coeficientes y con las indeterminadas que se repitan se opera de la misma manera que los hemos hecho cuando multiplicamos potencias de la misma base.

Ejemplo: $(2x^4y^2) \cdot (-xz^3) \cdot (7x^3y^5) = -14x^8y^7z^3$

VIII-6) PRODUCTO DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO:

Para esto no tengo más que aplicar la propiedad distributiva del capítulo anterior, es decir: se multiplican cada uno de los términos del polinomio por el monomio.

Ejemplo: $(a^3b^2 - 8b + 6a^2b^4c) \cdot (-4ac^3) = 4a^4b^2c^3 + 3^2 abc^3 - 2 4a^3b^4c^4$.

VIII-7) PRODUCTO DE POLINOMIOS:

Para esto, lógicamente, aplicando lo visto en el capítulo anterior, multiplicamos todos los términos del primer polinomio por todos los del segundo polinomio.

Es decir: $(2x^3 - 3y^2) \cdot (4x - 2) =$
 $2x^3 \cdot 4x - 4x^3 - 3y^2 \cdot 4x + 3y^2 \cdot 2 =$
 $8x^4 - 4x^3 - 12xy^2 + 6y^2$

Otra forma utilizada corrientemente para multiplicar polinomios es:

1º Ordenar ambos en orden creciente o decreciente.

2° Se coloca el multiplicando y debajo de este el multiplicador, como si se tratase de una multiplicación aritmética.

3° Se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno del multiplicador colocando los productos parciales de modo que se correspondan los términos semejantes.

4° Se reducen los términos semejantes.

Ejemplo: $(2x^3 - x - 2 - 5x^2) \cdot (1 + 2x^2 - 3x)$

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 5x^2 - x - 2 \\
 2x^2 - 3x + 1 \\
 \hline
 4x^5 + 10x^4 - 2x^3 - 4x^2 \\
 6x^4 - 15x^3 + 3x^2 + 6x \\
 2x^3 + 5x^2 + 5x - 2 \\
 \hline
 4x^5 + 4x^4 - 15x^3 + 4x^2 + 5x - 2
 \end{array}$$

VIII-8) COCIENTE DE MONOMIOS:

Para dividir monomios, se divide el coeficiente del dividendo por el del divisor, obteniéndose así el del cociente.

E cuanto a la parte literal, las letras comunes al dividendo y al divisor se escribirán en el cociente, con un exponente igual a la diferencia de los exponentes, los no comunes se quedan igual.

Ejemplo: $\frac{-6x^4 y^3}{-2x^2 yz^5} = \frac{3x^2 y^2}{z^5}$

VIII-9) COCIENTE DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO:

Para dividir un polinomio por un monomio se divide cada uno de los términos del primero por el segundo.

Ejemplo: $(-5a^2 b^3 - 7a^3 b^2 + a^4 b) : ab =$
 $5ab^2 - 7a^2 b + a^3$

VIII-10) COCIENTE DE POLINOMIOS:

Para dividir dos polinomios enteros en x, se ordenan ambos en orden creciente decreciente. Se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor; se multiplica el resultado por el divisor y se resta este producto por el dividendo. El primer término del resto se divide por el primero del divisor, se multiplica el término obtenido por el divisor y el producto se resta del dividendo parcial empleado. El resto será el nuevo dividendo parcial, con el que se hace lo mismo que con el anterior, hasta llegar a un resto nulo o cuyo grado sea menor que el del divisor.

Ejemplo: $12x^5 - 2x^4 - 11x^3 + 9x^2 - 5x - 3x \quad | \quad 4x^3 + 2x^2 - x + 3$

$$\begin{array}{r}
 12x^5 - 6x^4 + 3x^3 - 9x^2 \\
 \hline
 -8x^4 - 8x^3 \quad 0 \quad -5x \quad -3 \\
 8x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 6x \\
 \hline
 -4x^3 - 2x^2 \quad x \quad -3 \\
 4x^3 + 2x^2 - x \quad 3 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

VIII-11) Ejercicios:

Efectuar las siguientes operaciones:

$$1^\circ (3x - 5 + 4x^2) \cdot (2x + 3)$$

$$2^\circ (2 - 9x^3 + 2x - x^2) \cdot (3x + 1 - x^2)$$

$$3^\circ \text{ Obtener: } (a + b)^4$$

$$4^\circ (-15x^5y^2z^3) : (-3x^2yz^2)$$

$$5^\circ (15x^4 - 3x^5 + 6x^2) : (-3x^2)$$

$$6^\circ (x^2 - 11x^4 + 14 - 2x^3 + 2x^5 - 13x) : (-6x^2 + 3x + x^3 - 7)$$

$$7^\circ (10x^3 - 10x + 6 - 8x^2) \cdot (x - 7 + 5x^2)$$

VIII-12) EJERCICIOS:

1º Resolver: $(2x + y^2)^2$; esto es el cuadrado de una suma de dos sumandos.

$$(2x + y^2)^2 = (2x)^2 + 2(2x \cdot y^2) + (y^2)^2 = 4x^2 + 4xy^2 + y^4$$

Cuadrado
Del 1º | doble del 1º | cuadrado del
por el 2º | 2º

2º $(4x - y)^2$ = esto es el cuadrado de una diferencia.

$$(4x - y)^2 = (4x)^2 - 2(4x \cdot y) + y^2 = 16x^2 - 8xy + y^2.$$

3º $(3 + x)^3$ = es el cubo de una suma.

$$(3 + x)^3 = 3^3 + 3(3^2 \cdot x) + 3(x^2 \cdot 3) + x^3 = 27 + 27x + 9x^2 + x^3$$

Cubo
Del 1º | triple del | triple del | cubo del 2º
cuadrado | cuadrado
Del 1º x el 2º | del 1º x el 2º

4º $(2x^2 - y^2)^3$ = es el cubo de una diferencia.

$$(2x^2 - y^2)^3 = (2x^2)^3 - 3(2x^2)^2 \cdot y^2 + 3(y^2)^2 \cdot 2x^2 - (y^2)^3 = 8x^6 - 12x^4y^2 + 7y^4x^2 - y^6$$

5º $(x^2 + y) \cdot (x^2 - y)$ = es el producto de una suma por diferencia y el resultado es la diferencia de cuadrados.

$$(x^2 + y) \cdot (x^2 - y) = x^4 - y^2$$

$$6^\circ (x + y^2) \cdot (x - y^2) = x^2 - y^4$$

$$7^\circ (2x^3 - y^4) \cdot (2x^3 + y^4) = (2x^3)^2 - (y^4)^2 = 4x^6 - y^8$$

8º Obtener $(x + y)$ lo podemos transformar en $((x + y)^2)^2$ = el cuadrado del cuadrado de una suma =

$$(x^2 + 2xy + y^2)^2 = (x^2 + 2xy + y^2) \cdot (x^2 + 2xy + y^2) = \\ x^4 + 2x^3y + x^2y^2 + 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + y^2x^2 + 2xy^3 + y^4 = \\ x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

También podría obtenerse como:

$$(x + y)^3 \cdot (x + y) = (x^3 + 3x^2 + 3xy^2 + y^3) (x + y) = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

9º Sacar factor común: $2x + 3y + 3z - 3p - 3q =$

El único factor común es 3, por tanto:

$$3x + 3y + 3z - 3p - 3q = 3(x + y + z - p - q)$$

10º Sacar factor común: $2x^2y^2 + 4x^4y^5 - 8x^3y^3 + 64y^6x^4$

El MCD de los coeficientes es 2. Las letras comunes son x, y ambas tienen como mínimo de exponente el 2. Por tanto el f.c. es $2x^2y^2$, esto tendremos que dividirlo entre cada sumando y el cociente de la división es lo que introducimos entre paréntesis, es decir:

$$2x^2y^2 + 4x^4y^5 - 8x^3y^3 + 64y^6x^4 = 2x^2y^2(1 + 2x^2y^3 - 4xy + 32y^4x^2)$$

11º) Sacar factor común a:

$$3x^3y^2p - 6p^2xy^3 + 36p^3z - 9x^2yzp =$$

El MCD de los cocientes es 3, las letras comunes ‘p’ únicamente con exponente 1, por tanto el f.c. será 3p.

$$3x^3y^2p - 6p^2xy^3 + 36p^3z - 9x^2yzp = 3p(x^3y^2 - 2pxy^3 + 12p^2z - 3x^2yz)$$

21º) Simplificar la expresión:

$$\frac{(x^4 - y^4) \cdot (4x^2 + 4xy + y^2)}{(x^2 - y^2) \cdot (2x + y^2)} =$$

Es muy importante en estas situaciones observar término a término cada uno de los componentes de esta fracción algebraica. Por ejemplo:

$$(x^4 - y^4) \text{ es una diferencia de cuadrados} = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) \quad (1)$$

$$(4x^2 + 4xy + y^2) \text{ es el cuadrado de una suma} = (2x + y)^2 \quad (2)$$

$(x^2 - y^2)$ es también una diferencia de cuadrados, pero la puedo eliminar con la diferencia de cuadrados (1)

$((2x + y)^2)$ también lo puedo eliminar con (2), entonces tenemos:

$$\frac{(x^4 - y^4) \cdot (4x^2 + 4xy + y^2)}{(x^2 - y^2) \cdot (2x + y)^2} = \frac{(x^2 + y^2) \cdot (x^2 - y^2) \cdot (2x + y)^2}{(x^2 - y^2) \cdot (2x + y)^2} = x^2 + y^2$$

$$13º) \frac{(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) \cdot (x - y)^2}{(x + y)^2 \cdot (x + y) \cdot (x - y)} =$$

El primer término del numerador es el cubo de una suma. El 2º término es el cuadrado de una diferencia.

Por otro lado en el denominador es producto de $(x + y)^2 \cdot (x + y) = (x + y)^3$ es decir, el cubo de una suma.

Con estas consideraciones podremos escribir:

$$\frac{(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) \cdot (x - y)^2}{(x + y)^2 \cdot (x + y) \cdot (x - y)} = \frac{(x + y)^3 \cdot (x - y)^2}{(x + y)^3 \cdot (x - y)} = (x - y)$$

14º) Resolver:

$$\frac{(x^4 - y^4) \cdot (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) \cdot (x^2 + 2xy + y)}{(x^2 - y^2) \cdot (x^2 + y^2) \cdot (x + y)^5} =$$

El primer término del numerador es una diferencia de cuadrados:

$$(x^4 - y^4) = (x^2 - y^2) \cdot (x^2 + y^2)$$

El 2º término del numerador es el cubo de una suma:

$$(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) = (x + y)^3$$

El 3º término del numerador es el cuadrado de una suma:

$$(x^2 + 2xy + y^2) = (x + y)^2$$

Con todas estas consideraciones podemos escribir:

$$\frac{(x^4 - y^4) \cdot (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) \cdot (x^2 + 2xy + y^2)}{(x^2 - y^2) \cdot (x^2 + y^2) \cdot (x + y)^5} = \frac{(x^2 + y^2) \cdot (x^2 - y^2) \cdot (x + y)^5}{(x^2 - y^2) \cdot (x^2 + y^2) \cdot (x + y)^5} = 1$$

15° Resolver:

$$\frac{7a^2bx^3}{14ab^2x^2} = \frac{ax}{2b}$$

$$16°) \frac{5x^2 - 15x}{10x^3 + 15x^2} =$$

Si saco factor común al numerador y al denominador de la fracción podré escribir (el f.c. del numerador es 5x y el del denominador es 5x²)

$$\frac{5x^2 - 15x}{10x^3 + 15x^2} = \frac{5x \cdot (x - 3)}{5x^2(2x + 3)} = \frac{x - 3}{x(2x + 3)}$$

$$17°) \frac{3x^2 - 3}{5x + 5} = \frac{3(x^2 - 1)}{5(x + 1)} = \frac{3(x + 1) \cdot (x - 1)}{5(x + 1)} = \frac{3}{5}(x - 1)$$

$$18°) \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4} = \frac{2(x - 2)}{(x - 2)^2} = \frac{2}{(x - 2)}$$

19°) Resolver:

$$\frac{(2x^2 - 4x + 2) \cdot (3px^3 + 9x^2py + 9y^2xp + 3py^3)}{6(x^2 + 2x + y) \cdot (x + y) \cdot (x - 1)^2} = \text{sacando factor común y agrupando}$$

tenemos que:

$$\frac{2(x^2 - 2x + 1)3p(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)}{6(x^2 + 2x + y)(x + y)(x - 1)^2} = \frac{6p(x - 1)^2(x + y)^3}{6(x + y)^3(x - 1)^2} = p$$

20°) Resolver:

$$\frac{(2x^2 - 18) \cdot (2x^4 - 8) \cdot (8x^2 - 8x + 2)}{(2x - 1)^2(x - 3) \cdot (x^2 - 2) \cdot (x + 3)} = \frac{2(x^2 - 9)2(x^4 - 4) \cdot 2(4x^2 - 4x + 1)}{(2x - 1)^2(x - 3) \cdot (x^2 - 2) \cdot (x + 3)} =$$

$$\frac{2(x + 3) \cdot (x - 3)2(x^2 - 2) \cdot (x^2 + 2)2(2x - 1)^2}{(2x - 1)^2(x - 3) \cdot (x^2 - 2) \cdot (x + 3)} = 8(x^2 + 2)$$

UNIDAD DIDÁCTICA IX

IX-1) RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE 1º GRADO.

Toda ecuación de 1º grado tiene la forma general $Ax + B = 0$, donde A es el coeficiente, B el término independiente y x la incógnita. Los pasos a seguir para la resolución de esta ecuación son los siguientes:

1º Eliminar paréntesis, para esto no tenemos más que aplicar la propiedad distributiva, vista en capítulos anteriores.

Recordemos:

$$a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

2º Eliminar denominadores, para esto se reducen todos los términos de la ecuación a común denominador, por el conocido procedimiento del mcm. Luego se multiplica toda la ecuación por el denominador común, con lo que queda eliminado dicho denominador.

3º Transposición de términos, para esto se escribe en un miembro de la ecuación los términos que no contienen la incógnita y en el otro todos los que contienen a la incógnita, pero con signo cambiado todos aquellos que se cambian de miembro (continúan con su signo todos los que no cambian de miembro).

4º Reducir términos semejantes; se refiere a sumar los que contienen la incógnita, y por otra parte sumar el lado o lugar que no contienen la incógnita.

5º Aislar (despejar) la incógnita: para esto se procede de la siguiente forma, todo lo que multiplica a la incógnita pasa dividiendo, y al revés, todo lo que lo divide pasa multiplicando.

IX-2) EJERCICIOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE 1º GRADO.

1º)

$$2x + 3 = 7$$

$$2x = 7 - 3$$

$$2x = 4$$

$$x = \frac{4}{2} = 2 //$$

2º)

$$2(x-1) + 3(2x-3) - 4x = 7x + 2(4x-3)$$

$$2x - 2 + 6x - 9 - 4x = 7x + 8x - 6$$

$$2x + 6x - 4x - 7x - 8x = 2 - 6 + 9$$

$$-11x = 5$$

$$x = -\frac{5}{11} = //$$

3°)

$$3(2x-2) + \frac{5(2x+1)}{3} = \frac{2(x-2)}{4}$$

$$\text{mcm} = 12$$

$$\frac{36(2x-2)}{12} + \frac{20(2x+1)}{12} = \frac{6(x-2)}{12};$$

Aquí tenemos 1° la eliminación de denominadores y luego la eliminación de paréntesis.
Multiplicando toda la ecuación por 12.

$$36(2x-2) + 20(2x+1) = 6(x-2)$$

$$72x - 72 + 40x + 20 = 6x - 12$$

$$106x = 40$$

$$x = \frac{40}{106} = //$$

$$4°) \frac{2}{3}x + \frac{3}{2}x = \frac{1}{3}x$$

$$\text{MCM} = 6$$

$$4x + 9x = 2x; 13x - 2x = 0$$

$$11x = 0$$

$$x = \frac{0}{11} = 0 //$$

$$5°) \frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{3}{2}$$

$$\text{MCM} = 2x$$

$$\frac{2 \cdot 1}{2 \cdot x} + \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot x} = \frac{3 \cdot x}{2 \cdot x}; \text{ Multiplicada toda la ecuación por } 2x.$$

$$2 + 4 = 3x$$

$$6 = 3x$$

$$\frac{6}{3} = x$$

$$x = 2 //$$

$$6°) \frac{6}{2x} - \frac{2}{2x} - 1 = 0$$

$$\text{MCM} = 2x$$

$$x = 2 //$$

$$7°) 3(2x-2) + \frac{5(2x+1)}{3} = \frac{2(x-2)}{4} - \frac{3(4x-3)}{2};$$

$$x = \frac{74}{178} //$$

$$8^\circ) \frac{x}{3} + \frac{x}{2} + 2 = \left(\frac{x}{4} + \frac{x}{5} \right) = -3(2x - x) + \frac{6}{2}(x + 3)$$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} + \frac{2x}{4} + \frac{2x}{5} = -6x + 6 + \frac{6x}{2} + \frac{18}{2}$$

$$20x + 30x + 30x + 24x + 360x - 180x = 360 + 540$$

$$284x = 900$$

$$x = \frac{900}{284} //$$

9°) El doble de un número más el triple de este mismo número es igual a 15. calcular el número.

$$2x + 3x = 15$$

$$5x = 15$$

$$x = \frac{15}{5} = 3 //$$

10°) La edad de Pedro es el doble de la de Juan y ambos suman 30 años. Calcular la edad de ambos.

$$\text{Edad de Pedro} = 2x$$

$$\text{Edad de Juan} = x$$

$$x + 2x = 30$$

$$3x = 30$$

$$x = \frac{30}{3} = 10 //$$

11°) La tercera parte de la distancia entre Monforte y Lugo es igual a la distancia entre Monforte y Orense menos 24 km. Calcular la distancia de Monforte a Lugo, sabiendo que la distancia entre Orense y Monforte es de 47km.

UNIDAD DIDÁCTICA X
SISTEMAS DE ECUACIONES

X-1) DISTINTAS FORMAS DE RESOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DE 1º GRADO.

Un sistema de ecuaciones con dos incógnitas tiene la forma:

$$Ax + By = C$$

$$Dx + Ey = 7$$

Hay varios sistemas de solución, el primero que explicaremos es el de SUSTITUCIÓN.

SUSTITUCIÓN: despejamos una de las incógnitas en una cualquiera de las dos ecuaciones y este valor lo sustituimos en la otra, con lo que el sistema nos queda reducido a una sola ecuación, con una sola incógnita, es decir:

$$x = \frac{C - By}{A}$$

D $\frac{(C - By)}{A} + Ey = 7$; con esta ecuación obtengo ‘y’; posteriormente obtendré ‘x’ por

(1).

EJERCICIOS:

$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ) x + y = 4 \\ 2x + 3y = 10 \end{array} \right\}$$

$$x = 4 - y$$

$$2(4 - y) + 3y = 10$$

$$8 - 2y + 3y = 10$$

$$y = 10 - 8 = 2//$$

$$x = 4 - y$$

$$x = 4 - 2 = 2//$$

$$\left. \begin{array}{l} 2^\circ) \frac{3}{4}y + \frac{x}{2} = 7 \\ y - 2x = 4 \end{array} \right\}$$

$$y = 4 + 2x; y = 4 + 2 \cdot 2 = 8 //$$

$$3(4 + 2x) - 2x = 28$$

$$12 + 6x + 2x = 28$$

$$8x = 28 - 12 = 16$$

$$x = \frac{16}{8} = 2 //$$

El segundo método es el de REDUCCIÓN, que consiste en multiplicar una de las dos ecuaciones por un factor, de tal modo que pueda eliminarse una incógnita sumando ambas ecuaciones, e.d.

$$1^\circ) 3x + 2y = 22$$

2º) $x + 2y = 8$ multiplico la 2ª ecuación por 3 y la cambio de signo, y sumo luego miembro a miembro ambas ecuaciones.

Quedará:

$$3x + 2y = 22$$

$$\underline{-3x - 6y = -24}$$

$-4y = -2$ queda una sola ecuación con una sola incógnita.

$$y = \frac{-2}{-4} = 1/2 \quad // \text{ para obtener } x, \text{ introducimos el valor de } y \text{ en la } 2^\text{a} \text{ ecuación.}$$

$$x + 2 \cdot 1/2 = 8$$

$$x = 8 - 1 = 7 //$$

El tercer método es el llamado de IGUALACIÓN, que consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar obteniendo una sola ecuación con una sola incógnita. Es decir, resolvamos el ejercicio anterior por este método:

$$\left. \begin{array}{l} 1^\text{a} \ 3x + 2y = 22 \\ 2^\text{a} \ x + 2y = 8 \end{array} \right\}$$

A) Despejo x en ambas ecuaciones:

$$x = \frac{22 - 2y}{3}$$

$$x = 8 - 2y$$

B) Igualamos ambos valores de x , y queda:

$$\frac{22 - 2y}{3} = 8 - 2y$$

Ahora resuelvo esta ecuación con una sola incógnita:

$$22 - 2y = 24 - 6y$$

$$22 - 24 = -6 + 2y$$

$$-2 = -4y$$

$$y = 1/2 \quad //$$

El valor de x se puede obtener como en el caso anterior.

X-2) EJERCICIOS DE APLICACIÓN. SISTEMAS DE ECUACIÓN.

1º La suma de 2 números es 7 y su diferencia es 1. Calcular dichos números.

Solución:

Llamemos x e y a ambos números.

El sistema planteable resulta ser:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{array} \right\}$$

$$x = 1 + y$$

$$1 + y + y = 7$$

$$2y = 7 - 1$$

$$2y = 6$$

$$y = \frac{6}{2} = 3 //$$

$$x = 1 + y = 1 + 3 = 4 //$$

2° La edad de Pedro es igual a la de Juan disminuida en 5 años. Sabiendo que la mitad de la edad de Juan más el doble de la de Pedro suman 30 años. Calcular la edad de ambos.

x = edad de Pedro.

y = edad de Juan.

$$\left. \begin{array}{l} x = y - 5 \\ \frac{y}{2} + 2x = 30 \end{array} \right\}$$

$$\frac{y}{2} + (y - 5) = 30$$

$$y + 4(y - 5) = 60$$

$$y + 4y - 20 = 60$$

$$5y = 80$$

$$y = \frac{80}{5} = 16 //$$

$$x = 16 - 5 = 11 //$$

SISTEMA DE ECUACIONES

1-Representación gráfica:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ 3y - 2x = -1 \end{array} \right\}$$

$$y = 5 - 2x$$

$$3(5 - 2x) - 2x = -1$$

$$15 - 6x - 2x = -1 - 15$$

$$-8x = -16$$

$$x = \frac{-16}{-8}$$

$$x = 2$$

$$3y - 2 \cdot 2 = -1$$

$$3y - 4 = -1$$

$$3y = 3$$

$$y = \frac{3}{3}$$

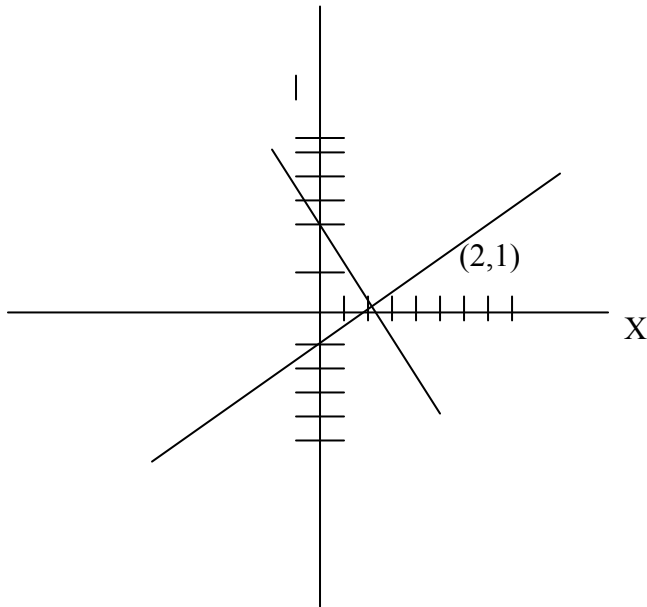
$$y = 1$$

Y

$$3y = -1 + 2x$$

$$y = \frac{-1 + 2x}{3}$$

1)	x	y	2)	x	y
	0	5		0	-1/3
	1	3		1	1/3
	2	1		2	1



2-Representación gráfica:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 2y = 2 \\ 3y - 2x = 0 \end{array} \right\}$$

$$y = \frac{2 - 2x}{2}$$

$$3 \frac{(2 - 2x)}{2} - 2x = 0$$

$$\frac{6 - 6x}{2} - 2x = 0$$

$$\frac{6}{2} - \frac{6x}{2} + 4x = 0$$

$$-6x + 4x = -6$$

$$-2x = -6$$

$$x = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$y = \frac{2 - 2 \cdot 3}{2}$$

$$y = \frac{2 - 6}{2}$$

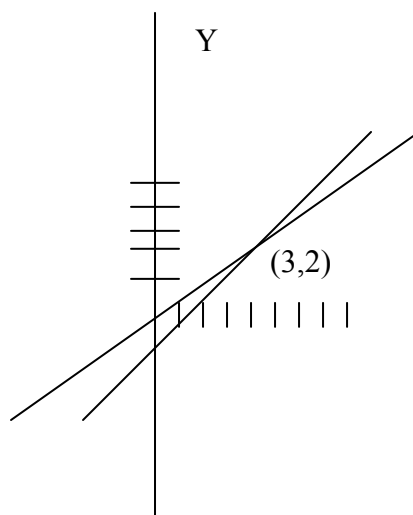
$$y = \frac{-4}{-2}$$

$$y = 2$$

$$y = \frac{2x - 2}{2}$$

$$y = \frac{2x}{3}$$

1)	x	y	2)	x	y
	0	-1		0	0
	1	0		1	2/3
	2	1		2	4/3





3) Representación gráfica:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ x - \frac{y}{7} = 3 \end{array} \right\}$$

$$-y = 1 - 2x$$

$$y = 2x - 1$$

$$x - \frac{(2x-1)}{7} = 3$$

$$\frac{7x}{7} - \frac{(2x-1)}{7} = \frac{21}{7}$$

$$7x - (2x - 1) = 21$$

$$7x - 2x + 1 = 21$$

$$5x = 20$$

$$x = \frac{20}{5}$$

$$x = 4$$

$$2 \cdot 4 - y = 1$$

$$8 - y = 1$$

$$-y = 1 - 8$$

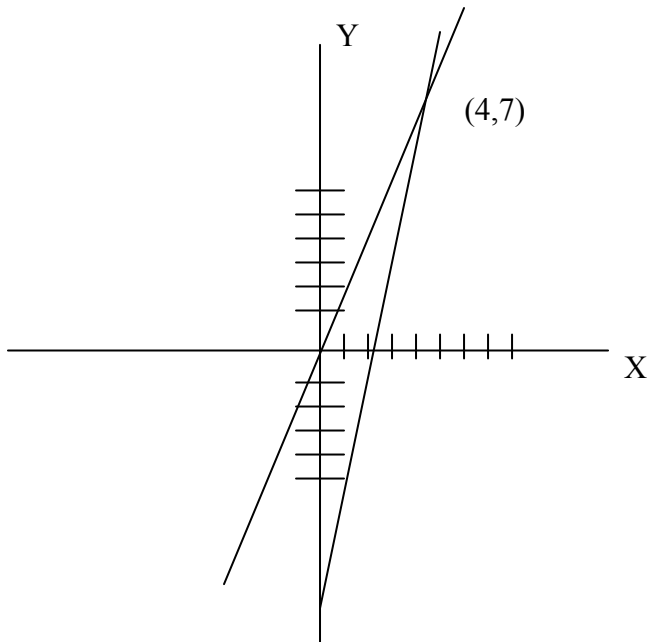
$$y = -1 + 8$$

$$y = 7$$

$$y = (-3 + x) \cdot 7$$

$$y = -21 + 7x$$

1)	x	y	2)	x	y
	0	-1		0	-21
	1	1		1	-14
	2	3		2	-7
	4	7		4	7



UNIADAD DIDÁCTICA XI
RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE 2º GRADO.

XI-1) FORMA Y SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN DE 2º GRADO.

La ecuación de 2º grado tiene la forma general.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a, b y c son los coeficientes de la ecuación.

c = término independiente.

La ecuación de 2º grado tiene dos soluciones, es decir, dos posibles resultados que cumplen la ecuación, a estas dos soluciones también se les llama raíces de la ecuación.

La solución general de una ecuación de 2º grado es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a}$$

x_1 y x_2 , son las soluciones o raíces de la ecuación.

XI-2) BREVE DISCUSIÓN SOBRE LAS ECUACIONES DE LA ECUACIÓN DE 2º GRADO.

1º Toda ecuación de 2º grado también se puede escribir como producto de sus raíces, es decir:

$$ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$$

Al término que actúa de radicando ($b^2 - 4ac$) se le llama discriminante y se representa por la letra A.

$$A = b^2 - 4ac$$

Y tenemos que pensar que si:

$A \leq 0$ la ecuación no tiene solución real.

$A = 0$ la ecuación tiene una raíz doble.

$A \geq 0$ la ecuación tiene dos raíces reales.

También hemos de pensar que si 1º $a = 0$ ecuación queda así $bx + c = 0$, es decir, es de 1º grado.

2º Si $b = 0$, tendré: $ax^2 + c = 0$

La solución de esta ecuación será:

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

$$x_1 = \frac{-c}{a} \quad x_2 = -\frac{-c}{a}$$

Y solo tendrá solución real, si c y 0 , o a 0 , e.d. si c ó a son negativos.

3° Si $c = 0$, tendré $ax^2 + bx = 0$

Sacando factor común x : $x(ax + b) = 0$, tengo un producto de dos factores igual a cero, para que se verifique tendrá que cumplirse que: al menos uno de los factores sea cero, es

decir, una de las soluciones es que; $x_1 = 0$ y otra que; $ax + b = 0$, es decir, $x_2 = -\frac{b}{a}$

Ejercicios de ecuaciones de 2° grado:

Resolver:

$$2x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$a = 2$$

$$b = 4$$

$$c = -3$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 2(-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 24}}{4}$$

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{40}}{4} \text{ dos raíces reales}$$

$$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{40}}{4}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$a = 1$$

$$b = -2$$

$$c = 1$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 2 \text{ raíz doble.}$$

El cuadrado de un número es igual al doble de este mismo número. Calcular dicho número.

$$x^2 = 2x$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 0}}{2} = \begin{matrix} \nearrow x_1 = \frac{2+2}{2} = 2 // \\ \searrow \end{matrix}$$

$$x_2 = \frac{2-2}{2} = 0 //$$

O bien $x(x-2) = 0$ $\begin{cases} \nearrow x_1 = 0 \\ \searrow x_2 = 2 \end{cases}$

XI-3) EJERCICIOS SOBRE LA ECUACIÓN DE 2º GRADO.

1º El producto de dos números entre consecutivos es 30.

Calcular ambos números.

$$N(N+1) = 30$$

$$N^2 + N = 30$$

$$N^2 + N - 30 = 0$$

$$N = \frac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{2}$$

$$\begin{cases} \nearrow N_1 = \frac{-1 + \sqrt{121}}{2} = 5 // \\ \searrow N_2 = -1 - \sqrt{121} = -6 // \end{cases}$$

El primer número es 5 y el otro es 6, o bien el primero número es -6 y el otro es -5.

2º El cuadrado de un nº supera en tres unidades al doble de este mismo número.

Calcular este número.

$$x^2 = 2x + 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2+4}{2} = 3 //$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = \frac{2-4}{2} = -1 //$$

El número puede ser 3 y -1.

UNIDAD DIDÁCTICA XII
PROPORCIONES

XII-1) DEFINICIÓN, RAZÓN DE DOS NÚMEROS:

Dice que la razón de dos números a y b es K, si $\frac{a}{b} = K$

a = antecedente.

b = consecuente.

XII-2) DEFINICIÓN RAZONES INVERSAS.

Se dice que dos razones son inversas cuando su producto es la unidad.

$\frac{2}{5}$ y $\frac{5}{2}$ Son dos razones inversas porque:

$$\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 2} = 1 //$$

En general la inversa de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$, porque $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1 //$

XII-3) PROPORCIONES:

Se llama proporción la igualdad de dos razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

a y d, se llaman extremos.

b y c, se llaman medios.

XII-4) PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS PROPORCIONES.

En toda proporción se verifica que: el producto de extremos es igual al producto de medios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad a \cdot d = b \cdot c$$

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9} \quad 2 \cdot 9 = 6 \cdot 3$$

XII-5) PROPORCIÓN CONTINUA.

Se llama proporción continua a la que tienen los medios iguales, ejemplo:

$$\frac{3}{6} = \frac{6}{12}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

x, es el llamado medio proporcional.

b, es el llamado tercero proporcional.

XII-6) TERCERO PROPORCIONAL.

Es una proporción continua como $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, el extremo b se llama 3º proporcional a las letras a, y, x.

XII-7) PROPORCIONES DEDUCIDAS DE OTRA.

De la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se deduce:

$$1^\circ \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \quad \text{o bien} \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$$

La suma de antecedentes dividida por la suma de consecuentes es igual a cualquiera de las razones.

En efecto: por ser una proporción que producto de exponentes = producto de medios, luego $(a+c)b = (b+d)a$ $ab + cb = ba + da$.

2º La diferencia de antecedentes dividida por la diferencia de consecuentes es igual a cualquiera de las razones.

3º Suma de antecedentes y consecuente de la 1ª razón dividido por su consecuente es igual a la suma de antecedente y consecuente de la 2ª razón dividido por su consecuente, etc.....

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{a+c}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$(a+b)d = (c+d)b$$

$$ad + bd = cb + bd$$

XII-8) PROPORCIONALIDAD DIRECTA.

Suponiendo que 1kg. De azúcar vale 100 pesetas, todos podemos deducir que 1/2kg, costará 50 pesetas, 1/4 de Kg., 25 pesetas, 2kg 200 pesetas.

Es decir que a mayor cantidad mayor precio.

.....y a menor cantidad menor precio.

Decimos entonces que la cantidad y su correspondiente precio están directamente relacionados o bien que son directamente proporcionales.

Matemáticamente la relación se expresa así:

$$\frac{25 \text{ ptas.}}{0'25 \text{ kg}} = \frac{50 \text{ ptas.}}{0'5 \text{ kg}} = \frac{100 \text{ ptas.}}{1 \text{ kg.}} = 100 \text{ ptas / kg.}$$

Al número 100ptas/Kg se le llama cte. de proporcionalidad, y en general

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots\dots\dots \frac{x_n}{y_n} = k \text{ (cte. de proporcionalidad)}$$

XII-9) PROPORCIONALIDAD INVERSA.

Supongamos ahora el caso de dos grifos que tienen que llenar un depósito, si uno de ellos tarda 1 hora, 2 grifos produciendo el mismo caudal tardarán 1/2 hora, y 3 grifos tardarán la 3ª parte del tiempo, 4 grifos la 4ª parte.

En este caso el nº de grifos y el tiempo están relacionados inversamente o bien son inversamente proporcionales.

A mayor cantidad menor tiempo.

A menor cantidad mayor tiempo.

Matemáticamente esta relación se expresa así:

$$1\text{h. } 1 \text{ grifo} = 1/2\text{h. } 2 \text{ grifos} =$$

1/3h. 3 grifos = ... = 1
 1 = cte. de proporcionalidad.

Y en general:

$$X_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = \dots = K$$

XII-10) REGLA DE TRES. SIMPLE DIRECTA.

Es una aplicación de la proporcionalidad directa, en la que no se trata más que obtener un extremo en una proporción, por los procedimientos conocidos.

Ejemplo: sabiendo que 1kg de café cuesta 800ptas. Cuanto costarán 3/4 de Kg.

1kg ----- 800ptas.

3/4kg ----- x ptas.

$$\frac{1}{3/4} = \frac{800}{x}$$

$$x = \frac{3/4 \cdot 800}{1} = 600 \text{ ptas. Los } 3/4\text{kg.}$$

XII-11) REGLA DE TRES. SIMPLE INVERSA.

Esto es una aplicación de la proporcionalidad inversa.

Veámoslo con un ejemplo:

Un obrero tarda en levantar una pared 2 días. Suponiendo otros obreros con la misma capacidad de trabajo que el primero ¿Cuánto tardarán 6 obreros?

1 obrero tarda ----- 2 días.

6 " " ----- x días.

Pondremos: $1 \cdot 2 = 6 \cdot x$

$$x = \frac{1 \cdot 2}{6} = 1/3 \text{ días (es decir, la } 3^{\text{a}} \text{ parte de un día)}$$

Para recordarlo pondremos la 1ª razón como está, y la 2ª razón la invertimos, es decir:

$$\frac{1}{6} = \frac{x}{2};$$

$$x = \frac{2 \cdot 1}{6} \text{ como ya habíamos visto.}$$

XII-12) REGLA DE TRES COMPUESTA.

La resolución de este problema se basa en el siguiente principio ‘si una magnitud es proporcional a otras varias, la razón de dos cantidades de la 1ª magnitud es igual al producto de la razones directas o inversas de las cantidades correspondientes de las demás’.

Como con esto no habéis entendido nada, vamos a ver si con un ejemplo lo entendéis:

Ejemplo: 12 oficiales trabajando 8 horas diarias durante 15 días, han roscado 17.280 tornillos. ¿Cuántas horas diarias tendrán que trabajar 15 oficiales del mismo rendimiento que los anteriores para roscar 36.000 tornillos en 20 días?

8 horas ----- 12 oficiales ----- 15 días ----- 17.280 T.

x horas ----- 15 " -----I-----20 " ----- 36.000 T.

$$\frac{8}{x} = \frac{15}{12} \cdot x \cdot \frac{20}{15} \cdot \frac{17.280}{36.000}$$

$$x = \frac{8 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 36000}{15 \cdot 20 \cdot 17280} = 104 //$$

Teniendo en cuenta que se hace corresponder al nº de horas el nº de oficiales, el nº de días y el nº de tornillos roscados, y estos están en relación inversa. (Más oficiales, menos horas, más días, menos horas, más tornillos, más horas).

XII-13) INTERÉS: aplicación de la regla de tres compuesta.

- a) INTERÉS: Es el beneficio que produce una cantidad de dinero, préstamo durante cierto tiempo.
- b) CAPITAL: Es la cantidad de dinero prestado.
- c) TANTO POR CIENTO O RÉDITO: Es el interés producido por cada 100 pesetas en un año.
- d) CAPITAL ACUMULADO: Es la suma del interés producido y el capital inicial.
- e) RENTA: Se llama renta al interés producido por el capital durante un año.
- f) TIEMPO: Al que dura el préstamo.

Si interés, capital, rédito y tiempo lo representamos por i, c, r, t. teniendo en cuenta que el interés es directamente proporcional al capital prestado, al tiempo que dura el préstamo y al rédito, entonces los problemas de interés, son problemas de regla de tres compuesta.

$$\begin{array}{l} 100 \text{ ptas.} \text{ ----- } 1 \text{ año} \text{ ----- } x \text{ ptas.} \\ C \text{ " } \text{ ----- } t \text{ " } \text{ ----- } i \text{ ptas.} \end{array}$$

De donde:

$$i = \frac{c \cdot r \cdot t}{100}$$

Ejemplo: ¿Qué interés producirán 40.000 pesetas al 6% durante 2 años?

$$i = \frac{c \cdot r \cdot t}{100} = \frac{40.000 \cdot 6 \cdot 2}{100} = 4.800 \text{ ptas.}$$

XII-14) REPARTO PROPORCIONAL, SIMPLE DIRECTO.

Repartir un número ‘N’ en partes proporcionales a los números ‘a’, ‘b’, ‘c’, es hallar los números x, y, z, tales que:

$$1^\circ) x + y + z = n$$

$$2^\circ) \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

Tendré entonces:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{n}{a+b+c}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{n}{a+b+c} \Leftrightarrow x = \frac{n \cdot a}{a+b+c}$$

$$\frac{y}{b} = \frac{n}{a+b+c} \Leftrightarrow y = \frac{n \cdot b}{a+b+c}$$

$$\frac{z}{c} = \frac{n}{a+b+c} \Leftrightarrow z = \frac{n \cdot c}{a+b+c}$$

XII-15) REPARTO PROPORCIONAL SIMPLE INVERSO.

Para repartir un número ‘n’ en partes inversamente proporcionales a los números a, b, c, se reparte en partes directamente proporcionales a sus inversos $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$

Ejemplo: repartir 12.400 pesetas entre 3 niños de 2, 3 y 5 años inversamente proporcionales a sus edades:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{15}{30}, \frac{10}{30}, \frac{6}{30}$$

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6} = \frac{x+y+z}{15+10+6} = \frac{12.400}{31}$$

$$\frac{x}{10} = \frac{12.400}{31} \Leftrightarrow x = \frac{12.400 \cdot 15}{31} = 6.000 \text{ Pesetas.}$$

$$\frac{y}{10} = \frac{12.400}{31} \Leftrightarrow y = \frac{12.400 \cdot 10}{31} = 4.000 \text{ Pesetas.}$$

$$\frac{z}{6} = \frac{12.400}{31} \Leftrightarrow z = \frac{12.400 \cdot 6}{31} = 2.400 \text{ Pesetas.}$$

XII-16) EJERCICIOS:

1º Calcular el medio proporcional entre los extremos 3 y 4.

$$\begin{aligned} \frac{3}{x} &= \frac{x}{4}, \\ x^2 &= 12 \\ x &= 12//. \end{aligned}$$

2º Calcular cuales son las magnitudes que están directamente relacionadas y las que lo están inversamente.

- Cantidad de una sustancia con el precio de la misma. (es evidente, que a mayor cantidad, mayor precio, por tanto están relacionadas directamente)
- Velocidad de llenado de un estante, con el número de grifos del mismo caudal que depositan agua en el. (cuantos más grifos depositen agua en el estanque, más rápido se llena el estanque, por tanto están relacionados directamente).
- Tiempo de llenado del depósito, con número de grifos. (aquí cuantos más grifos, menos tiempo, por tanto están relacionados inversamente).
- Velocidad con que se levanta una pared de ladrillos, con el número de obreros que trabajan en la misma. Suponiendo que todos los obreros trabajan a la misma velocidad o en las mismas condiciones. (en este caso a mayor nº de obreros, mayor es la velocidad de construcción, por tanto están directamente relacionados).

Sin embargo, el tiempo que tardan en levantar la pared, con el número de obreros que trabajan en la misma están inversamente relacionados, pues a mayor número de obreros tardarán menos tiempo en levantar la pared.

4° Si 3kg de azúcar cuestan 135 pesetas. Calcular cuanto costarán 5kg y medio.

5° Cinco obreros tardaran en levantar una pared 3 días ¿Cuánto tardarán 7 obreros (trabajando en las mismas condiciones y a la misma velocidad) en levantar la misma pared?

6° Siete grifos depositan agua sobre un depósito de 200 litros y lo llenan en 1/2hora. ¿Cuánto tiempo tardarán en llenar un depósito de 500 litros, 10 grifos iguales a los anteriores?

$$\begin{array}{l}
 7 \text{ grifos} \text{ ----- } 200 \text{ litros} \text{ ----- } 0'5 \text{ horas} \\
 10 \text{ ''} \text{ ----- } 500 \text{ litros} \text{ ----- } x \text{ ''} \\
 \frac{7}{10} \cdot x \cdot \frac{200}{500} = \frac{0'5}{x} \\
 x = \frac{10 \cdot 500 \cdot 0'5}{7 \cdot 200} = 1'7 \text{ Horas.}
 \end{array}$$

7° Dos zapateros arreglan 10 pares de zapatos diarios, trabajando durante 8 horas diarias. ¿Cuántos pares de zapatos diarios arreglan 6 zapateros trabajando 5 horas cada día?

$$\begin{array}{l}
 2 \text{ zapateros} \text{ ----- } 10 \text{ pares} \text{ ----- } 8 \text{ horas.} \\
 6 \text{ ''} \text{ ----- } x \text{ ''} \text{ ----- } 5 \text{ horas.} \\
 \frac{2}{6} \cdot x \cdot \frac{8}{5} = \frac{10}{x} \\
 x = \frac{6 \cdot 5 \cdot 10}{2 \cdot 8} = \frac{300}{16} = 18'75 \text{ Pares.}
 \end{array}$$

8° Calcular el interés que producirán 340.000 pesetas al 9% durante 2 años.

$$i = \frac{340000 \cdot 9 \cdot 5}{100 \cdot 12}$$

Es decir, la fracción de año será 5/12, o bien la regla de tres sería:

$$\begin{array}{l}
 100 \text{ pesetas} \text{ ----- } 12 \text{ meses} \text{ ----- } 9(r) \\
 \text{(c) } 340000 \text{ ''} \text{ ----- } 5 \text{ ''} \text{ ----- } i \text{ ptas.}
 \end{array}$$

$$i = \frac{c \cdot r \cdot t}{10 \cdot 12} \text{ (En meses)}$$

Si fuese el interés necesario contando el tiempo en días, sería:

$$\begin{array}{l}
 100 \text{ pesetas} \text{ ----- } 360 \text{ días} \text{ ----- } r \\
 C \text{ ----- } t \text{ ''} \text{ ----- } i \text{ pesetas}
 \end{array}$$

$$i = \frac{c \cdot r \cdot t}{100 \cdot 360} \text{ (En días)}$$

Otra incógnita puede ser el capital.

9° Por ejemplo: Calcular el capital prestado durante 2 años, sabiendo que ha sido colocado a 8% y ha producido 20.000 pesetas de intereses.

$$i = \frac{c \cdot r \cdot t}{100} \text{ (En años)}$$

$$I = 20.000$$

$$C = ?$$

$$R = 8\%$$

$$T = 2 \text{ años.}$$

No tengo más que despejar c en la ecuación anterior, es decir:

$$100 \cdot i = c \cdot r \cdot t$$

$$\text{Con lo que } \frac{100 \cdot i}{r \cdot t} = c$$

$$\frac{100 \cdot 20.000}{8 \cdot 2} = 125.000$$

Es decir, el capital prestado directamente ha sido de 125.000 pesetas.

10° Repartir 10.000 en partes directamente proporcionales a los números 5, 7 y 32.

11° Repartir 600, en partes inversamente proporcionales a 3, 4 y 5.

12° Dos hermanos tienen edades de 10 y 15 años. Su padre les da la paga del fin de semana, que consiste en 500 pesetas, diciéndoles que la repartan proporcionalmente a la edad que tienen. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS 10, 11 Y 12.

SOLUCIÓN AL N° 10.

$$a = 5$$

$$b = 7$$

$$c = 32$$

$$n = 10.000$$

$$x \ y \ z = n$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{n}{a+b+c}$$

Por tanto:

$$x = \frac{10.000 \cdot 5}{5+7+32} = 1.136'36$$

$$y = \frac{10.000 \cdot 7}{5+7+32} = 1.591$$

$$z = \frac{10.000 \cdot 32}{5+7+32} = 7.272'72$$

SOLUCIÓN AL N° 11.

$$a = 3$$

$$b = 4$$

$$c = 5$$

$$n = 600$$

Repartir directamente proporcional:

a, 1/3, 1/4, 1/5, es decir:

$$\frac{20}{60}, \frac{15}{60}, \frac{12}{60},$$

$$\frac{x}{20}, \frac{y}{15}, \frac{z}{12} = \frac{x+y+z}{20+15+12} = \frac{600}{47};$$

$$\frac{x}{20} = \frac{600}{47}; x = \frac{600 \cdot 15}{47} = 255'3$$

$$\frac{y}{15} = \frac{600}{47}; y = \frac{600 \cdot 15}{47} = 191'5$$

$$\frac{z}{12} = \frac{600}{47}; z = \frac{600 \cdot 12}{47} = 135'19$$

SOLUCIÓN AL N° 12.

Supondremos, como es lógico, que el de mayor edad recibirá más paga, por tanto hemos de repartir 500 pesetas en partes directamente proporcionales a 10 y 15.

$$a = 10$$

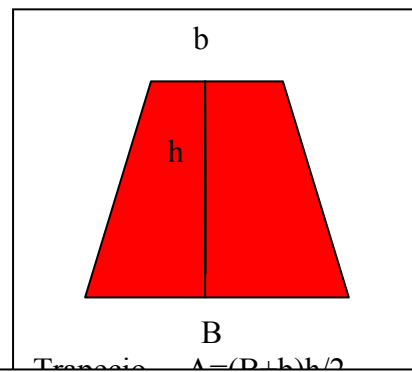
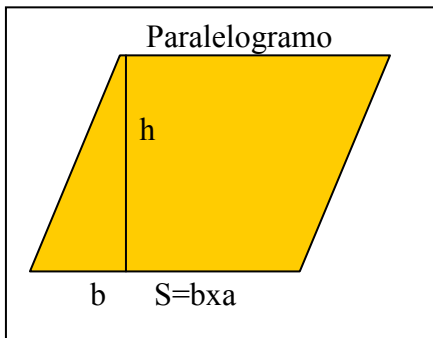
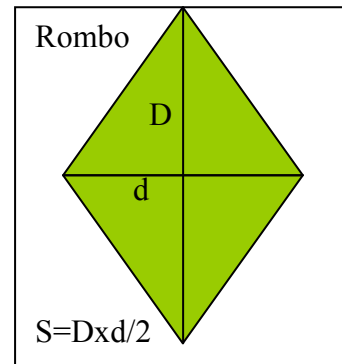
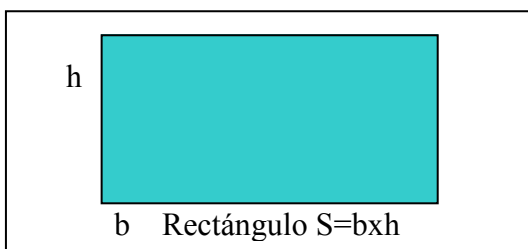
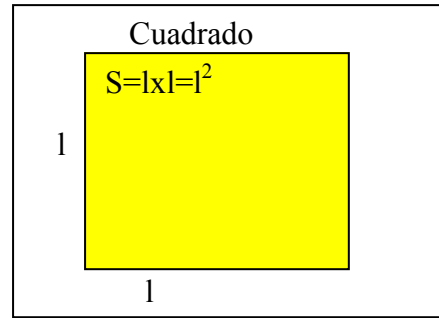
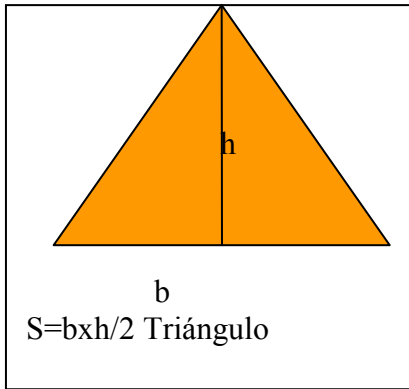
$$b = 15$$

$$n = 500$$

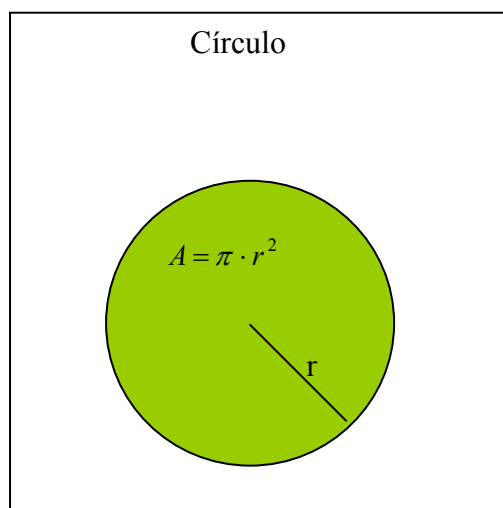
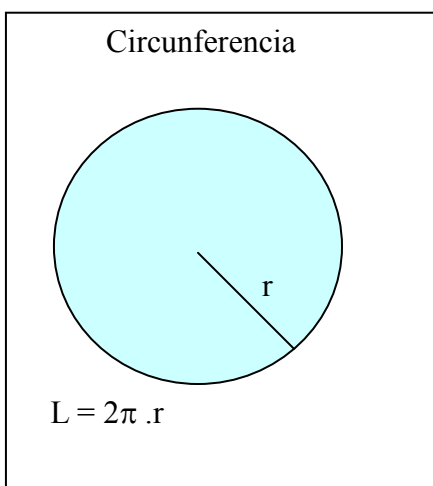
$$x + y = 500; \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{x+y}{a+b} = \frac{500}{25}; x = \frac{500 \cdot 10}{25} = 200 \quad y = \frac{500 \cdot 15}{25} = 300 \text{ (Parte del$$

mayor)

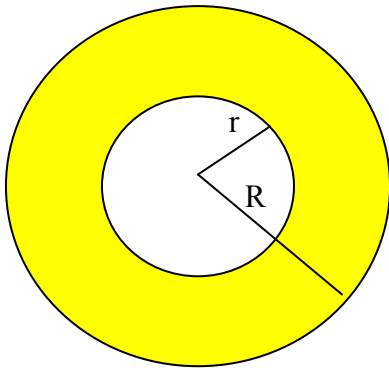
AREAS DE LAS FIGURAS PLANAS (1)



AREAS DE LAS FIGURAS PLANAS (2)

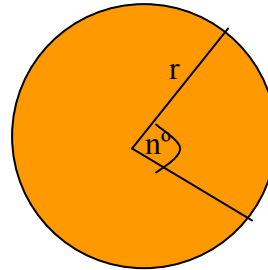


Corona circular



$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

Sector circular



$$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n^\circ}{360}$$

UNIDAD DIDÁCTICA XIII ÁNGULOS

XIII-1) DEFINICIÓN DE ÁNGULO:

Un ángulo es la porción de plano limitada por dos rectas (lados), que se cortan en un punto, que se llama vértice.

La nomenclatura de los ángulos se puede hacer de diversas formas:

1° Tres letras mayúsculas de tal modo que la señal, el vértice ocupe el 2° lugar invariablemente, es decir, el ángulo adjunto se nombraría: \overline{AOB}

2° Mediante números y diríamos que $\hat{1}$ es el ángulo "1"

3° Mediante las letras del alfabeto griego.

Ver apéndice A-4)

X = alfa

β = beta

θ = theta

λ = fi etc.....

DEFINICIÓN DE BISECTRIZ: Es la recta que pasa por el vértice y divide el ángulo en dos partes iguales (fig. XIII-1)

XIII-2) CLASES DE ÁNGULOS:

-RECTO: Cuando sus lados perpendiculares tienen una abertura de 90° (fig. XIII-2-a).

-AGUDO: Cuando sus lados tienen una abertura menor de 90° (fig. XIII-2-b).

-OBTUSO: Si esta abertura es mayor de 90° (fig. XIII-2-c).

-LLANO: Sus lados están en línea recta, tienen una abertura de 180° (dos rectos) (fig. XIII-2-d).

-ADYACENTES: Son dos ángulos que tienen un lado común y el mismo vértice (fig. XIII-2-e).

-OPUESTOS POR EL VERTICE: Son los cuatro ángulos que forman dos rectas que se cortan en el plano (son siempre iguales dos a dos) y la suma de todos ellos vale 360° (dos llanos) (fig. XIII-2-f).

-COMPLEMENTARIOS: Son los que sumados valen 90° , es decir, un recto. (fig. XIII-2-g).

-SUPLEMENTARIOS: Son los que sumados valen 180° , es decir, un llano (fig. XIII-2-h).

XIII-3) IGUALDAD DE ÁNGULOS: ÁNGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS PARALELAS Y UNA TRANSVERSAL COMÚN.

Al cortar dos rectas paralelas m y n por una transversal p se forman ocho ángulos que nombraremos: $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}, \hat{7}, \hat{8}$ (fig. XIII-3-a). Estos ángulos según la manera de asociarlos reciben distintos nombres:

1° Los ángulos $\hat{1}, \hat{2}, \hat{7}, \hat{8}$ son exteriores por estar fuera de la banda determinada por las paralelas m y n.

- 2° Los ángulos $\hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}$ son interiores por estar dentro de la banda determinada por las paralelas m y n.
- 3° Las parejas $(\hat{1}, \hat{5}), (\hat{2}, \hat{6}), (\hat{3}, \hat{7}), (\hat{4}, \hat{8})$ son correspondientes en cuanto a la disposición de los lados y a la abertura entre estos.
- 4° Las parejas $(\hat{3}, \hat{6}), (\hat{4}, \hat{5})$ son alternos internos.
- 5° Las parejas $(\hat{1}, \hat{8}), (\hat{2}, \hat{7})$ son alternos externos.
- 6° Las parejas $(\hat{1}, \hat{7}), (\hat{2}, \hat{8})$ son colaterales externos.
- 7° Las parejas $(\hat{3}, \hat{5}), (\hat{4}, \hat{6})$ son colaterales internos.

Entre estos ocho ángulos se observan las relaciones siguientes:

- 1° $\hat{1} = \hat{4}, \hat{2} = \hat{3}, \hat{5} = \hat{8}, \hat{6} = \hat{7}$ por opuestos por el vértice.
- 2° $\hat{1}$ y $\hat{2}, \hat{1}$ y $\hat{3}, \dots$ Son suplementarios.
- 3° Los correspondientes $\hat{1}$ y $\hat{5}, \hat{2}$ y $\hat{6} \dots$ Son iguales.
- 4° Los alternos internos y los alternos externos son suplementarios.
- 5° Los colaterales internos y los colaterales externos son suplementarios.

ÁNGULOS DE LADOS PARALELOS:

Se cumple el teorema siguiente:

Dos ángulos que tienen sus lados paralelos son iguales o suplementarios.

Sean los ángulos AOB y A'O'B' que tienen:

OA paralelo a A'O'.

OB paralelo a O'B'.

(fig. XIII-3-b).

Al prolongar O'B' hasta M, se observa que, por correspondientes:

$$\left. \begin{array}{l} AOB = X \\ A'O'B' = X \end{array} \right\} \longrightarrow AOB = A'O'B'.$$

En el caso de considerar los ángulos de lados paralelos AOB Y A'O'M' son suplementarios.

$AOB = A'O'B'$ y $A'O'B' + A'O'M' = 180^\circ$ por suplementarios.

Luego $AOB + A'O'M' = 180^\circ$ por suplementarios.

Los ángulos que tienen sus lados paralelos son iguales si los lados partiendo del vértice tienen el mismo sentido o sentido contrario.

Son suplementarios si tienen un lado en el mismo sentido y el otro en sentido contrario.

ÁNGULOS DE LADOS PERPENDICULARES DOS A DOS: Sea n los ángulos ABC y A'B'C' tales que A'B'/AB y B'C'/BC. Tracemos por B' las semirrectas B'A'//BA y B'C'//BC. Se tiene: A''B'C'' = A'B'C' = por lados paralelos.

$A''B'C'' = A'B'C'$ por complementos de A'B'C' puesto que A'B'A'' = 90° y C'B'£C'' = 90°.

Por consiguiente: $A'B'C' = ABC$.

Si son los ángulos ABC y A'B'C', en que uno es agudo y otro obtuso, se tiene:

$A'B'D' + A'B'C' = 180^\circ$ son suplementarios.

Luego $ABC + A'B'D' = 180^\circ$ son suplementarios.

Dos ángulos que tienen sus lados perpendiculares, son iguales si ambos son agudos u obtusos, o son suplementarios si uno es agudo y el otro obtuso.
