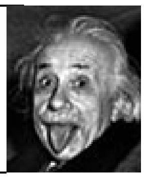
Cinemática vectorial



1. MOVIMIENTO Y TRAYECTORIA.

El lugar que ocupa un cuerpo en el espacio respecto a un sistema de referencia recibe el nombre de ***posición***. Se dice que *un cuerpo se* **mueve** *cuando cambia su posición con el tiempo con respecto a un sistema de referencia. Si dicho sistema de referencia lo consideremos fijo, el movimiento del cuerpo es* **absoluto**; *sin embargo, si el sistema también se mueve, el movimiento del cuerpo será* ***relativo***. Conviene resaltar que *en el Universo todos los movimientos son relativos*, ya que no existen puntos fijos o inmóviles. Cuando vamos en un coche en marcha, sentados en nuestro asiento, no nos movemos con respecto al coche, sin embargo sí lo hacemos con respecto a una casa. Del mismo modo, aun estando en reposo sobre la Tierra, nos movemos con respecto al Sol, el cual, a su vez, también está dotado de movimiento.

Existen muchas clases de sistemas de referencia, no obstante, el que usaremos en el presente curso será el *ortogonal tridimensional*. *El punto de referencia que utilizaremos será el origen O de los tres ejes cartesianos*.

Se denominan *sistemas de referencia inerciales a los que convencionalmente suponemos fijos o a aquellos que se mueven con movimiento rectilíneo uniforme*. Se demostrará, en el siguiente tema, que *dos sistemas de referencia, uno fijo y otro animado de un M.R.U. con respecto al primero son equivalentes, es decir, las leyes físicas son las mismas para observadores en ambos sistemas* (***principio de relatividad de Galileo-Newton***). Generalmente, *obviaremos los sistemas no inerciales, que son aquellos que están sometidos a aceleración*.

No existen móviles sin dimensiones, pero hay muchos cuerpos que en su movimiento se comportan como partículas materiales, es decir, sus dimensiones son despreciables frente a su distancia al origen de coordenadas. El móvil no tiene que ser necesariamente pequeño para ser considerado como partícula. Así un avión no se comporta como una partícula para su piloto pero sí para un observador situado en Tierra. La abstracción de considerar a un móvil como una partícula, prescindiendo del movimiento de todos sus puntos, simplifica notablemente el conocimiento acerca del movimiento del cuerpo real.

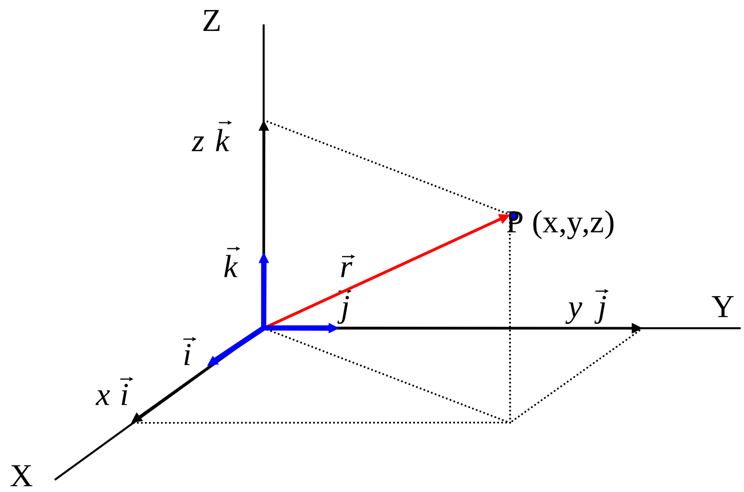
La posición de una partícula en un punto P en cualquier instante vendrá determinada por el denominado ***vector de posición*** $\vec{r}$ *que es aquel cuyo origen se halla siempre en el origen de coordenada y cuyo extremo coincide en cada instante con la posición del punto móvil.*

Una partícula inicialmente en un punto P (x,y,z) está ***en reposo*** *si sus coordenadas permanecen constantes con el tiempo con respecto a un sistema de referencia que consideramos fijo. Dicha partícula estará* ***en movimiento*** *cuando alguna de las coordenadas del vector de posición varía con el tiempo*. En general, habrá movimiento *si alguna de las coordenadas cambia con el tiempo*:

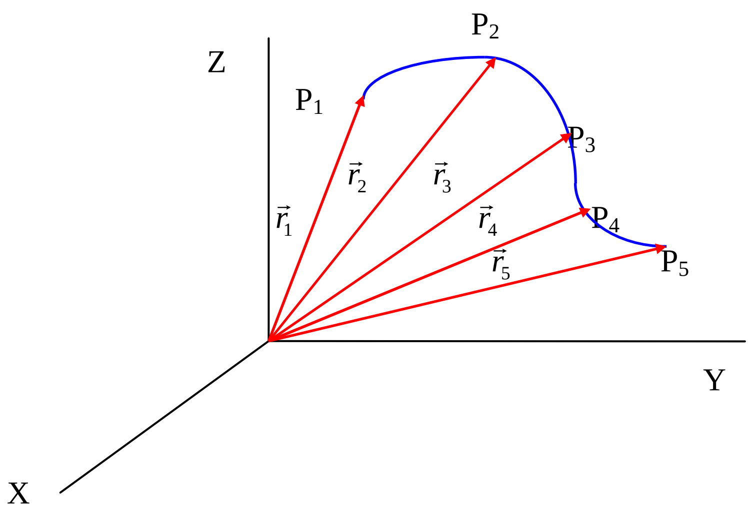
$$\vec{r} = f(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

Este vector, denominado ***vector de posición***, determinará la *posición de la partícula en cualquier instante*. Para hallar la *distancia que existe en cualquier instante entre la partícula y el punto de referencia debemos hallar el* ***módulo del vector de posición***:

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$$, con las misma unidades de longitud que x,y,z.



Se denomina ***trayectoria*** *al lugar geométrico de las sucesivas posiciones que va tomando la partícula móvil en el espacio, es decir, la línea descrita por la partícula en su movimiento.*

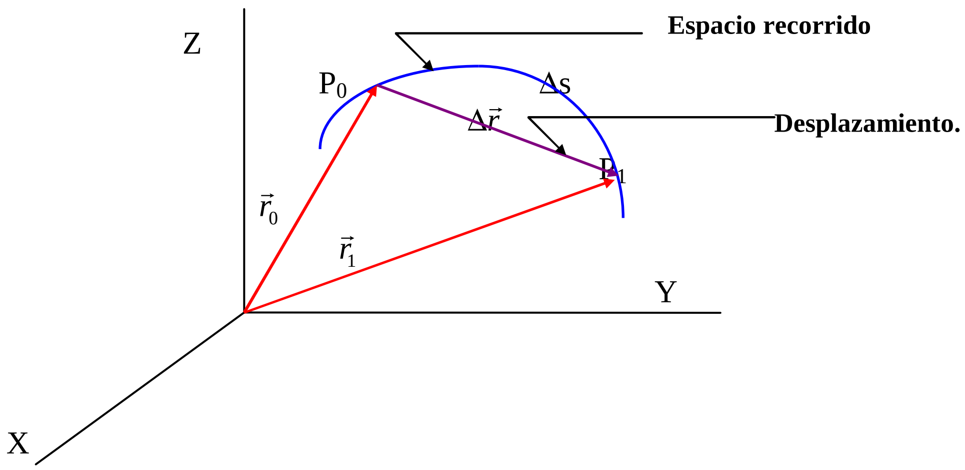


La *ecuación de la trayectoria* puede ser expresada en *forma vectorial* (mediante su vector de posición $\vec{r}$ = f(t), en *forma paramétrica* (x = f(t), y = f(t), z = f(t)) y en *forma contínua* (expresando una de las componentes espaciales en función de las otras).

2. VECTOR DESPLAZAMIENTO Y ESPACIO RECORRIDO.

Supongamos una partícula que inicialmente, en el instante $t_0 = 0$, se halla en la posición P_0 determinada por el vector de posición $\vec{r}_0$ y que transcurrido un tiempo t_1 la partícula se halla en la posición P_1 determinada por el vector de posición $\vec{r}_1$. Es evidente que la partícula se ha desplazado. Se denomina ***vector desplazamiento*** $\Delta\vec{r}$ *al vector que resulta de la diferencia de los vectores de posición en los instantes final e inicial. El vector desplazamiento entre dos posiciones siempre es el mismo independientemente de la trayectoria seguida*

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \left(x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k}\right) - \left(x_0\,\vec{i} + y_0\,\vec{j} + z_0\,\vec{k}\right) =$$
$$= \left(x_1 - x_0\right)\vec{i} + \left(y_1 - y_0\right)\vec{j} + \left(z_1 - z_0\right)\vec{k}$$



El espacio recorrido, s, *es una magnitud escalar que mide la longitud de la trayectoria. Solo coincidirá con el módulo del desplazamiento cuando el cuerpo se desplace en línea recta y no cambie de sentido el movimiento*. Así, si un cuerpo se desplaza sobre una recta desde un punto A a un punto B, en todo momento, el módulo del desplazamiento coincide con el espacio recorrido, pero, si se invierte el movimiento, aunque el espacio recorrido sigue aumentando el módulo del desplazamiento disminuye hasta el punto de que se puede anular en el punto A.

Ejercicio 1. La posición de un proyectil viene dada por la ecuación :

$$\vec{r} = 10 \cdot t\,\vec{i} + \left(40 \cdot t - 5 \cdot t^2\right)\vec{j} \quad \text{(en unidades del S.I.)}$$

Determinar : a) El *vector de posición* en los instantes *t = 0 s, t = 1 s, t = 2 s, t = 3 s, t = 4 s, t = 5 s, t =6 s, t = 7 s y t = 8 s.* b) La *distancia desde el proyectil al origen de coordenadas* en los instantes *t = 2 s y t = 6 s.* c) El *vector desplazamiento* y su *módulo* entre los instantes *t = 1 s y t = 4 s* y entre los instantes *t = 2 s y t = 7 s* . d) *Ecuaciones paramétrica y continua de la trayectoria*. e) ¿En qué *instantes* el proyectil está a 50 *m por encima del origen* y a qué *distancias horizontales* se encuentra del origen en esos instantes?. ***Resp.: a) …… b) 63, 2 m; 84,9 m. c) ……., 54,1 m; 55,9 m. d) …… e) 1,55 s, 15,5 m; 6,44 s, 64,4 m.***

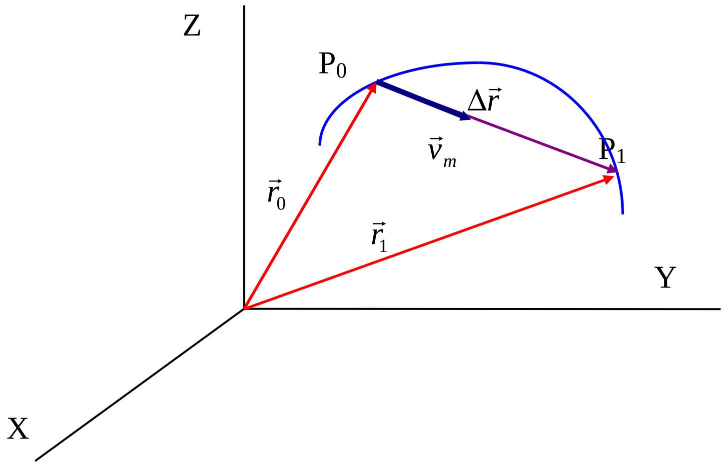
3. VECTOR VELOCIDAD.

Se define ***velocidad de una partícula*** como *la variación del vector de posición* $\vec{r}$ *con respecto al tiempo t.*

3.1. VECTOR VELOCIDAD MEDIA.

Sea una partícula móvil que entre los instantes t_0 y t_1 pasa de la posición P_0, (definida por el vector de posición $\vec{r}_0$) a la posición P_1 (definida por el vector de posición $\vec{r}_1$). Se define ***vector velocidad media*** *como el cociente entre el vector desplazamiento* $\Delta\vec{r}$ *y el tiempo Δt empleado en ello*:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{t_1 - t_0} = \frac{x_1 - x_0}{\Delta t}\vec{i} + \frac{y_1 - y_0}{\Delta t}\vec{j} + \frac{z_1 - z_0}{\Delta t}\vec{k}$$



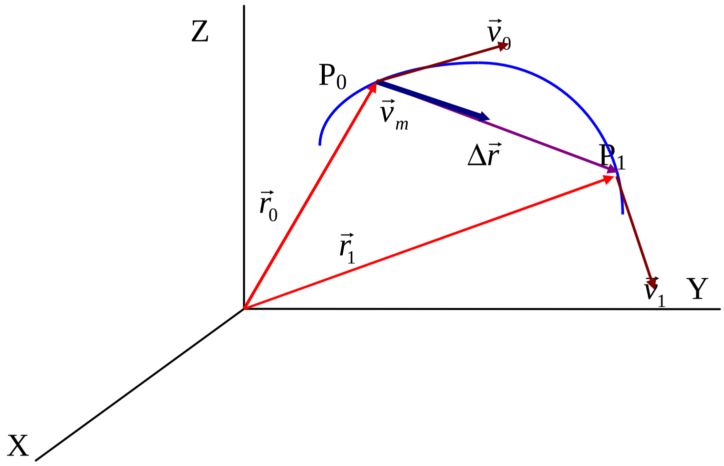
El vector $\vec{v}_m$ *tiene la misma dirección y sentido que el vector desplazamiento* $\Delta\vec{r}$.

Ejercicio 2. La ecuación de un movimiento es : $\vec{r} = (2\cdot t - 1)\,\vec{i} + 4\cdot t\,\vec{j}$ (S.I.). Determinar : a) Los *vectores de posición* en los instantes *t = 0 s, t = 1 s y t = 2 s*. b) La *ecuación continua de la trayectoria*. c) La *gráfica de la misma*. d) El *vector velocidad media* $\vec{v}_m$ y su *módulo* entre los instantes *t = 0 s y t = 2s*. e) *Comprobar que los puntos que indican los vectores de posición pertenecen a la trayectoria*. ***Resp.: a) …… b) y = 2 + 2x. c) …….d)*** $\vec{v}_{m(0\to 2)} = 2\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$ **m/s.** ***e) ……***

3.2. VECTOR VELOCIDAD INSTANTÁNEA.

El ***vector velocidad media,*** $\vec{v}_m$***,*** *nos suministra poca información acerca del movimiento*. No nos aporta ningún dato que nos haga pensar si la partícula ha llevado siempre la misma velocidad en todo el intervalo de tiempo. Incluso, la velocidad media de una partícula puede ser nula en un intervalo de tiempo (si el vector desplazamiento es cero) y no ser nula la velocidad en intervalos infinitesimales de tiempo, piénsese, en una partícula que recorriendo una trayectoria cerrada vuelve al mismo punto de partida.

Si los intervalos de tiempo Δt son los suficientemente pequeños también lo serán los desplazamientos efectuados. Sólo de este modo podremos llegar a saber el valor de la velocidad en un instante de terminado en cualquier punto de la trayectoria. Así se alcanza el concepto de ***velocidad instantánea***.



La ***velocidad instantánea*** *es aquella que posee una partícula en un instante determinado y matemáticamente coincide con el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.*

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Es decir, el ***vector velocidad instantánea*** *es la derivada del vector de posición con respecto al tiempo. Es un vector tangente a la trayectoria en el punto considerado y su sentido es el del movimiento.*

El vector velocidad instantánea puede descomponerse en tres componentes cartesianas referidas al sistema de referencia:

$$v = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

El *valor numérico de la velocidad instantánea se obtiene hallando su módulo*:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Ejercicio resuelto. La *posición de un proyectil* viene dada por la ecuación :

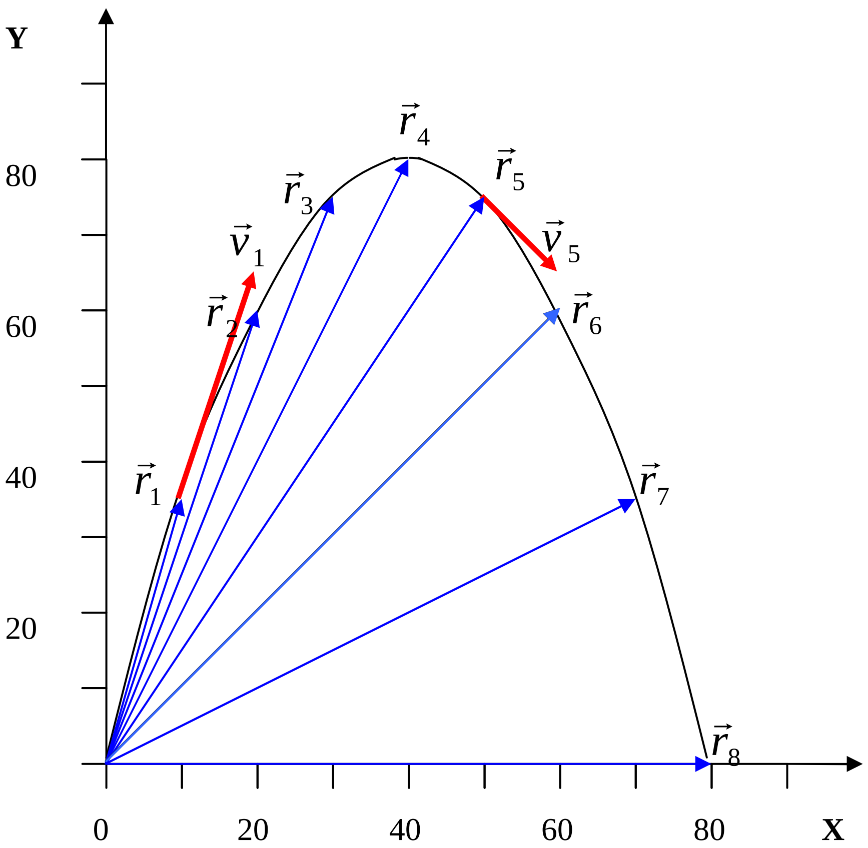
$\vec{r} = 10t\ \vec{i} + \left(40t - 5t^2\right)\vec{j}$ (en unidades del S.I)

I) Calcular la *velocidad media del proyectil* en los siguientes intervalos de tiempo. a) de *1 a 2 s*. b) de *1 a 1,1 s*. c) de *1 a 1,01 s*. II) a) ¿Cuál es la *velocidad instantánea* para *t = 1 s*?. b) ¿y para *t = 5 s*?.

En la siguiente <u>*figura*</u> se representa el *vector de posición* $\vec{r}$ del proyectil desde el instante *t = 1 s hasta t = 8 s* (sustituyendo los respectivos tiempos en la ecuación del vector de posición). *La trayectoria se obtiene uniendo los extremos finales de los diferentes vectores de posición que vamos obteniendo*. También se puede obtener sabiendo que:

$$\left.\begin{array}{l} x = 10t \\ y = 40t - 5t^2 \end{array}\right\} \xrightarrow{t=\frac{x}{10}} y = 40\frac{x}{10} - 5\left(\frac{x}{10}\right)^2 = 4x - 0{,}05x^2$$

(*Dándole valores a x obtenemos diferentes valores de y, con lo que podremos representar la ecuación de la trayectoria*).



Recuerda que ***vector desplazamiento,*** $\Delta\vec{r}$ *, es el vector que resulta de la diferencia de los vectores de posición en los instantes final e inicial*:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \left(x_1\ \vec{i} + y_1\ \vec{j} + z_1\ \vec{k}\right) - \left(x_0\ \vec{i} + y_0\ \vec{j} + z_0\ \vec{k}\right) =$$
$$= \left(x_1 - x_0\right)\ \vec{i} + \left(y_1 - y_0\right)\ \vec{j} + \left(z_1 - z_0\right)\ \vec{k}$$

Hemos visto que el ***vector velocidad media,*** $\vec{v}_m$***,*** *es el cociente entre el vector desplazamiento* $\Delta\vec{r}$ *y el tiempo Δt empleado en ello*:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{t_1 - t_0} = \frac{x_1 - x_0}{\Delta t}\vec{i} + \frac{y_1 - y_0}{\Delta t}\vec{j} + \frac{z_1 - z_0}{\Delta t}\vec{k}$$

I. Hallemos las *velocidades medias* en los *intervalos de tiempo señalados*.

a) *de 1 a 2 s*:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}_1 = 10\vec{i} + 35\vec{j} \\ \vec{r}_2 = 20\vec{i} + 60\vec{j}\end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_{m(1\rightarrow 2)} = \frac{\left(20\vec{i} + 60\vec{j}\right) - \left(10\vec{i} + 35\vec{j}\right)}{2-1} = 10\vec{i} + 25\vec{j}$$
$$\left|\vec{v}_{m(1\rightarrow 2)}\right| = 26{,}9258\ m/s$$

b) de *1 a 1,1* s:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}_1 = 10\vec{i} + 35\vec{j} \\ \vec{r}_{1,1} = 11\vec{i} + 37{,}95\vec{j}\end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_{m(1\rightarrow 1,1)} = \frac{\left(11\vec{i} + 37{,}95\vec{j}\right) - \left(10\vec{i} + 35\vec{j}\right)}{1{,}1-1} = 10\vec{i} + 29{,}5\vec{j}$$
$$\left|\vec{v}_{m(1\rightarrow 1,1)}\right| = 31{,}1488\ m/s$$

c) de *1 a 1,01 s*:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}_1 = 10\vec{i} + 35\vec{j} \\ \vec{r}_{1,01} = 10{,}1\vec{i} + 35{,}2995\vec{j}\end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_{m(1\rightarrow 1,01)} = \frac{\left(10{,}1\vec{i} + 35{,}2995\vec{j}\right) - \left(10\vec{i} + 35\vec{j}\right)}{1{,}01-1} = 10\vec{i} + 29{,}95\vec{j}$$
$$\left|\vec{v}_{m(1\rightarrow 1,1)}\right| = 31{,}5753\ m/s$$

Observemos que *cuanto más pequeño es el intervalo de tiempo entre el primer y segundo punto más nos acercaremos al valor exacto (31 y pico) que tiene la velocidad para t = 1 s. Nos acercaríamos a este valor tomando un intervalo de tiempo infinitamente pequeño (cuando Δt → 0).* Este cálculo, por este método, sería muy engorroso (y, por otra parte, *nunca* podríamos saber *exactamente* cuál es ese valor).

II. Un método que nos conduce a la ***solución real*** (velocidad instantánea para t = 1 s) surge del uso del *concepto de derivada*. *La* ***velocidad instantánea*** *es aquella que posee una partícula en un instante determinado y matemáticamente coincide con el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero*:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Es decir, el ***vector velocidad instantánea*** *es la derivada del vector de posición con respecto al tiempo. Es un vector tangente a la trayectoria en el punto considerado y su sentido es el del movimiento.*

Pero, *¿cómo se halla una derivada*?. Veámoslo para una función polinómica. Otras funciones (seno, coseno, log …) se tratarán en otras partes del curso (que se lo curre también el profe de matemáticas ….).

Sea la función: $y = a \cdot x^n$. La *derivada* de dicha función será:

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = a \cdot n \cdot x^{n-1}}$$

Nota: *la derivada de un sumando que sea una constante, es decir, un número (3, -500, π, ….) es cero.*

Ejemplos:

1. $\vec{r} = 20t\,\vec{i} + \left(80t^3 - 6t^2\right)\vec{j} \rightarrow \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 20\,\vec{i} + \left(240t^2 - 12t\right)\vec{j}$
2. $\vec{r} = \left(60t^3 + 8\right)\vec{i} - 4t^5\,\vec{j} \rightarrow \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 180t^2\,\vec{i} - 20t^4\,\vec{j}$
3. $\left.\begin{array}{l} \vec{r} = 90t^2\,\vec{i} + (6t+4)\,\vec{j} \\ \vec{r} = 90t^2\,\vec{i} + (6t+\pi)\,\vec{j} \\ \vec{r} = 90t^2\,\vec{i} + (6t-1000)\,\vec{j} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 180t\,\vec{i} + 6\,\vec{j}$

Por consiguiente, la *velocidad*: *derivada de nuestro vector de posición* será:

$$\vec{r} = 10t\,\vec{i} + \left(40t - 5t^2\right)\vec{j} \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 10\,\vec{i} + (40 - 10t)\,\vec{j}$$

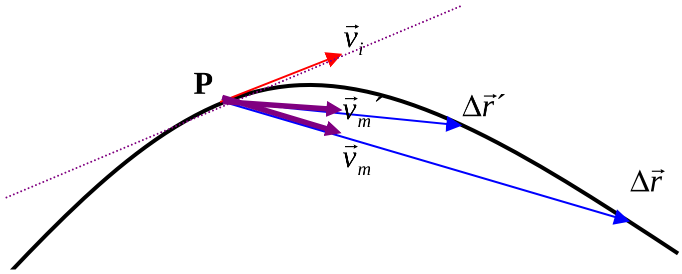
Como vemos, la velocidad depende del tiempo (en nuestro problema):

a) t = 1 s: $\vec{v}_1 = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 10\,\vec{i} + (40 - 10 \cdot 1)\,\vec{j} = 10\,\vec{i} + 30\,\vec{j} \rightarrow |\vec{v}_1| = 31{,}6228\ m/s$

Compárese dicho valor (real) con las velocidades medias (y por tanto valores aproximados) halladas en los diferentes intervalos de tiempo.

b) t = 5 s: $\vec{v}_5 = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 10\,\vec{i} + (40 - 10 \cdot 5)\,\vec{j} = 10\,\vec{i} - 10\,\vec{j} \rightarrow |\vec{v}_5| = 14{,}1421\ m/s$

Los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_5$ están representados en la *figura de la página 6. El vector velocidad en un punto es un vector tangente a la trayectoria en dicho punto* (véase <u>*figura de la página. 6*</u> y <u>*siguiente figura*</u>):



La dirección de la velocidad media, $\vec{v}_m$, coincide con la dirección del vector desplazamiento, $\Delta\vec{r}$. Cuando $\Delta\vec{r}$ tiende a cero, la velocidad media será la velocidad instantánea en dicho punto y en esa situación $\Delta\vec{r}$ será tangente a la trayectoria. Por ello, la velocidad instantánea en un punto, $\vec{v}_i$, es siempre tangente a la trayectoria en dicho punto.

Aprovechando esta exposición podemos adelantar el concepto de ***aceleración instantánea*** definiéndola *como la variación de la velocidad con respecto al tiempo en un instante determinado. Matemáticamente, coincide con el valor límite de la aceleración media (consultar pag. 11) cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.*

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

*El **vector aceleración instantánea** de una partícula coincide con la derivada del vector velocidad con respecto al tiempo o con la segunda derivada del vector de posición con respecto al tiempo en el instante considerado.*

Para nuestro problema:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(10\,\vec{i} + (40 - 10 \cdot t)\,\vec{j}\right) = -10\,\vec{j}\ m/s^2$$

El valor de la aceleración *(para nuestro problema)* es constante para cualquier tiempo. El valor de -10 m/s^2 (para ser exactos debería ser - 9,8 m/s^2) es la aceleración a la que esta sometida el proyectil para cualquier instante.

Ejercicio 3. La *posición* de un objeto viene dada por la ecuación: $\vec{r} = t^3\,\vec{i} + \left(40t - 5t^2\right)\vec{j}$ (en unidades del S.I). Calcular los vectores *velocidad* y *aceleración* en los instantes *t = 2 s* y *t = 4 s*. ***Resp.:*** $\vec{v}_2 = 12\,\vec{i} + 20\,\vec{j}$**,** $\vec{v}_4 = 48\,\vec{i}$ **;** $\vec{a}_2 = 12\,\vec{i} - 10\,\vec{j}$**,** $\vec{a}_4 = 24\,\vec{i} - 10\,\vec{j}$**. *(S.I.)***