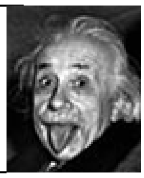
Introdución ao cálculo vectorial



1. MAGNITUDES ESCALARES E VECTORIAIS.

Magnitude física *é todo aquilo que se pode medir.*

Magnitudes escalares *son aquelas que están determinadas por un valor numérico expresado na unidade de medida correspondente*. O *tempo* é unha magnitude escalar xa que, cando dicimos que un proceso durou, por exemplo, 30 s, expresamos correctamente a nosa idea. Outras magnitudes escalares son a *masa, o volume, a densidade, a temperatura, a enerxía, a carga eléctrica*, etc.

Magnitudes vectoriais *son aquelas que para ser definidas necesitan, ademais do seu valor numérico (módulo) coa súa unidade de medida correspondente, a súa dirección e o seu sentido.* A *velocidade* é unha magnitude vectorial pois, non queda unicamente determinada polo seu módulo, é preciso especificar tamén a dirección e o sentido desta. Son tamén magnitudes vectoriais *a aceleración, a forza*, etc.

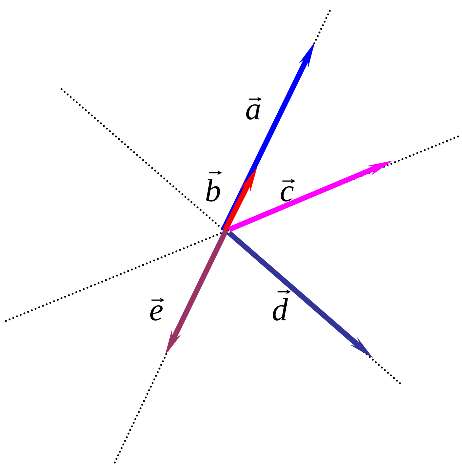
Unha magnitude vectorial represéntase por un ***vector*** *que é un segmento orientado no espacio*. En todo vector distínguense os seguintes elementos:

a) ***Orixe***: *é o punto de aplicación do vector.*

b) ***Módulo***: *é a lonxitude do segmento e representa o valor numérico da magnitude.*

c) ***Dirección***: *é a recta que o contén.*

d) ***Sentido***: *é o indicado pola punta da frecha.*



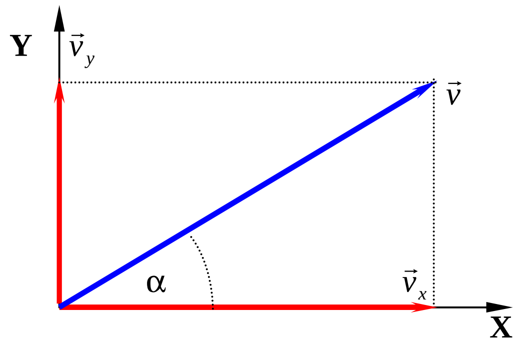
Pódese observar na figura que en tres direccións escollidas ao azar, os vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{e}$ están na mesma dirección, máis o $\vec{e}$ ten sentido contrario aos dous primeiros. Estes tres vectores teñen distinta dirección que os vectores $\vec{c}$ e $\vec{d}$. Pódese ver que o vector $\vec{a}$ é o triplo, en módulo, que o vector $\vec{b}$.

2. COMPOÑENTES CARTESIANAS DUN VECTOR.

En xeral, a *compoñente dun vector, segundo unha dirección, é a proxección do vector sobre devandita dirección.* As compoñentes máis usadas son as cartesianas.

Un vector, $\vec{v}$, no plano XY, pódese expresar como a suma dos vectores compoñentes, $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$, perpendiculares entre si.

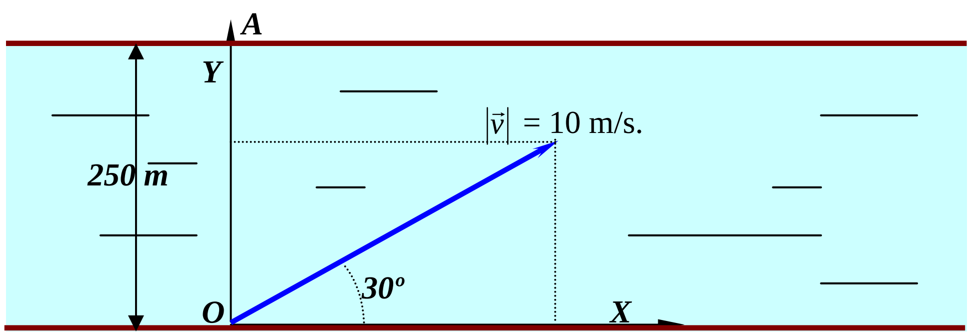
$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$



O *valor ou módulo* das compoñentes, $|\vec{v}_x|$ y $|\vec{v}_y|$, perpendiculares entre si, pódense obter, por trigonometría, tendo en conta o módulo do vector $\vec{v}$, $|\vec{v}|$:

$$|\vec{v}_x| = |\vec{v}| \cdot \cos\alpha \qquad |\vec{v}_y| = |\vec{v}| \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Exercicio 1. Un barco móvese con *velocidade constante* de *10 m/s* como se indica na figura. Calcule: a) *Módulos da velocidade do barco segundo as direccións X e Y*. b) *Canto tarda en cruzar o río*?. c) *A que distancia do punto A chega o barco á beira contraria*?.



Resp.: a)** $|\vec{v}_x|$ **= 8,66 m/s,** $|\vec{v}_y|$ **= 5 m/s. b) 50 s. c) 433 m.

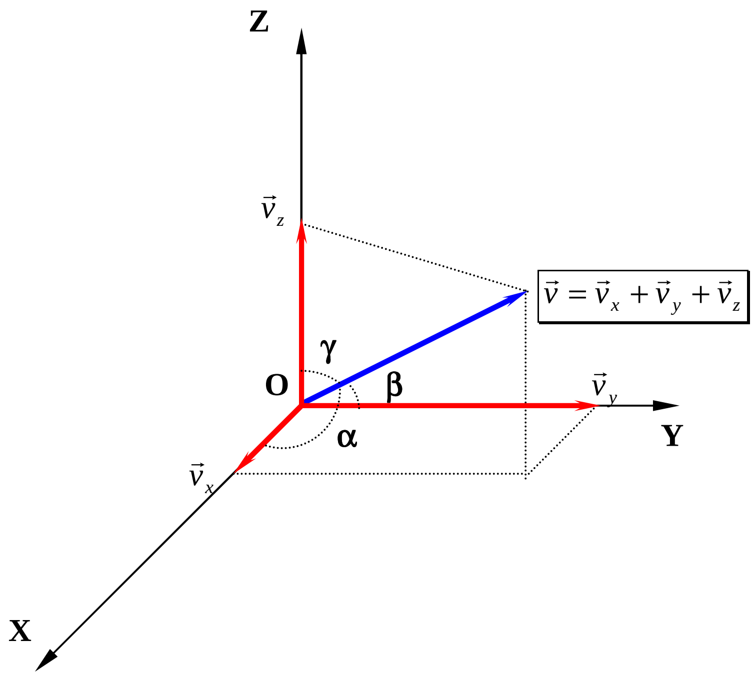
Se elevamos os módulos das compoñentes ao cadrado e as sumamos, chegaremos á seguinte expresión:

$$\left.\begin{array}{l}|\vec{v}_x|^2 = |\vec{v}|^2 \cdot \cos^2\alpha \\ |\vec{v}_y|^2 = |\vec{v}|^2 \cdot sen^2\alpha\end{array}\right\} \rightarrow \left(\cos^2\alpha + sen^2\alpha\right)\cdot|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_x|^2 + |\vec{v}_y|^2 \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{|\vec{v}_x|^2 + |\vec{v}_y|^2}$$

Polo tanto *o* ***módulo dun vector*** $|\vec{v}|$ *pódese calcular como a raíz cadrada da suma dos cadrados dos módulos das súas compoñentes cartesianas,* $|\vec{v}_x|$ *e* $|\vec{v}_y|$. A este resultado tamén se podería chegar se aplicamos o ***teorema de Pitágoras***.

Exercicio 2. Os *módulos das compoñentes cartesianas dunha forza son 6 N e 8 N*. Cal é o *módulo da forza resultante*?. ***Resp.:*** $\boldsymbol{F_R = 10}$ ***N.***

Supoñamos agora un <u>*sistema de coordenadas cartesiano tridimensional*</u>. *Calquera vector* $\vec{v}$ *pódese expresar como a suma dos seus vectores compoñentes nas tres direccións do espacio,* $\vec{v}_x, \vec{v}_y$ *e* $\vec{v}_z$.



Segundo a figura, pódese deducir, trigonométricamente, que os módulos das compoñentes son:

$$|\vec{v}_x| = |\vec{v}|\cdot\cos\alpha \qquad |\vec{v}_y| = |\vec{v}|\cdot\cos\beta \qquad |\vec{v}_z| = |\vec{v}|\cdot\cos\gamma$$

Por un razoamento análogo ao feito para o sistema de referencia bidimensional infírese que ó ***módulo*** *de calquera vector é a raíz cadrada da suma dos cadrados dos módulos das súas tres compoñentes cartesianas*:

$$|\vec{v}| = \sqrt{|\vec{v}_x|^2 + |\vec{v}_y|^2 + |\vec{v}_z|^2}$$

3. VECTOR UNITARIO.

O ***vector unitario***, *$\vec{u}_v$, correspondente a un vector dado, $\vec{v}$, é un vector cuxo módulo é a unidade con dirección e sentido do vector $\vec{v}$ do que é unitario.*

É dicir, calquera vector pode expresarse en función do seu vector unitario:

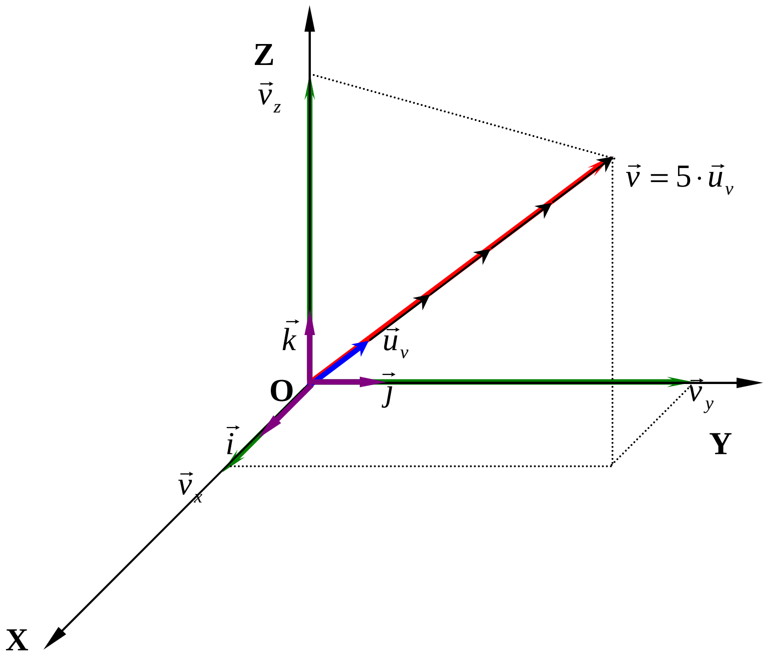
$$\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{u}_v$$

Na figura: $\vec{v} = 5 \cdot \vec{u}_v$. O vector $\vec{v}$ *é 5 veces maior que o vector unitario* $\vec{u}_v$.

Polo tanto, para achar un vector unitario a un vector dado usaremos a expresión:

$$\boxed{\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}$$

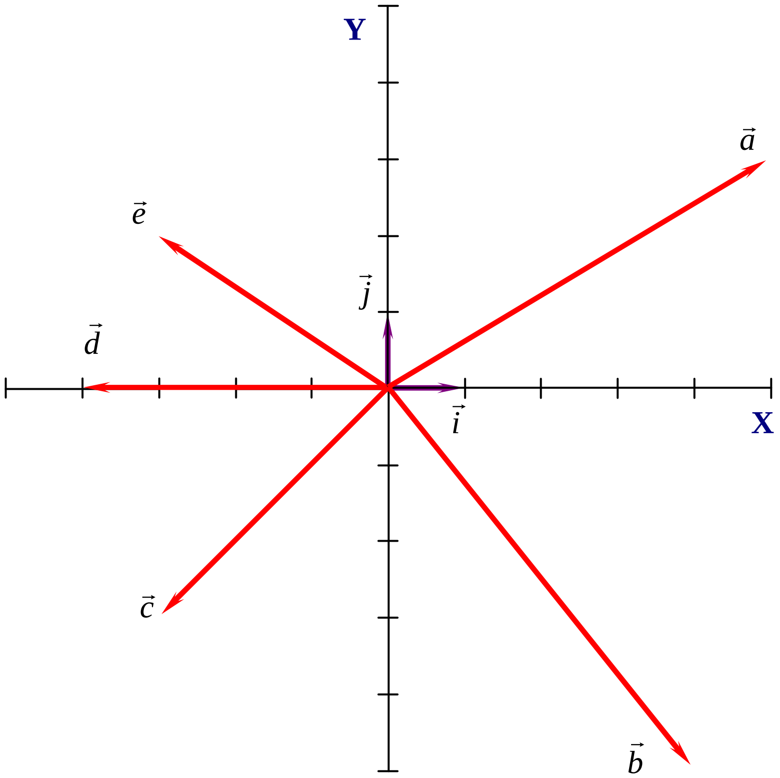
Os vectores unitarios na dirección dos eixes *X*, *Y e Z* no seu sentido positivo desígnanse por $\vec{i}$, $\vec{j}$ *e* $\vec{k}$. O máis normal é poñer o vector $\vec{v}$ en función dos vectores unitarios $\vec{i}$, $\vec{j}$ *e* $\vec{k}$.



Do anterior dedúcese que:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = |\vec{v}_x| \cdot \vec{i} + |\vec{v}_y| \cdot \vec{j} + |\vec{v}_z| \cdot \vec{k}$$

Exercicio 3. Exprese os diferentes *vectores que aparecen na figura en función dos vectores unitarios* dos eixes cartesianos.



Resp.: *$\vec{a} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{c} = -3\vec{i} - 3\vec{j}$, etc.*

Exercicio 4. Sexa o vector $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$. Determine: a) $\vec{v}_X$, $\vec{v}_Y$ e $|\vec{v}|$. b) Os *vectores unitarios* de $\vec{v}_X$, $\vec{v}_Y$ e $\vec{v}$. b) O *ángulo* que forma *co eixe X*. c) O *vector oposto* a $\vec{v}$ e o seu *módulo. Fai un debuxo a escala de todos os vectores e comproba o módulo de $\vec{v}$ e o seu vector unitario.*

Exercicio 5. Ache o *vector unitario* de $\vec{v} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$. Compróbese que o *módulo do vector unitario* é a *unidade*. ***Resp.:*** $\vec{u}_v = \frac{2}{\sqrt{29}}\vec{i} - \frac{4}{\sqrt{29}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{29}}$**, ...**

Exercicio 6. Un avión ten un *vector de posición* $\vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ *(km)* con respecto a un punto de observación O. Calcular: a) A que *distancia do punto O* se atopa o *avión*?. b) Que *ángulo* forma o *vector de posición co chan*?. ***Resp.: a) 5,39 km. b) 21,8º.***

Exercicio 7. Un vector, de *módulo 4* e situado no plano XY forma un ángulo *de 30º con eixe X. Expresa o vector en función dos vectores unitarios $\vec{i}$ e $\vec{j}$.*

4. SUMA E DIFERENZA DE VECTORES.

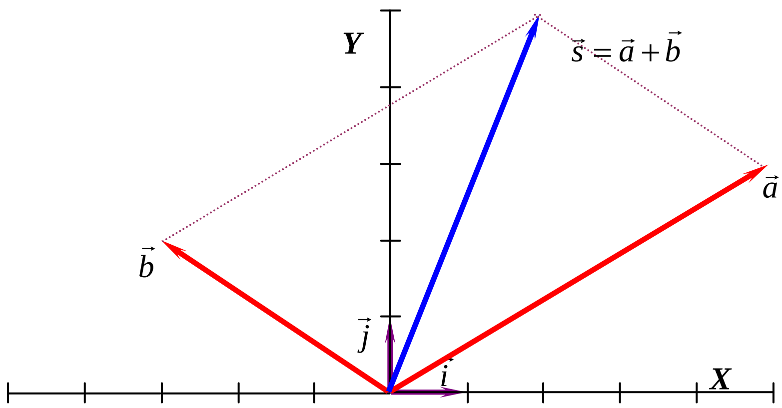
Sexan os vectores:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \text{ e } \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\ .$$

A ***suma analítica de dous vectores*** é igual *á suma das compoñentes dos vectores en cada eixe.*

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$$

Para sumar *graficamente* dous vectores habemos de acudir ao método do paralelogramo. Este método baséase en *debuxar rectas paralelas aos vectores polos seus extremos, de tal modo que estas rectas intersecten nun punto; o vector suma será aquel que parte da orixe común de ambos vectores e termina no punto de intersección anteriormente achado.*



Calculemos *analiticamente* a suma vectorial na figura anterior:

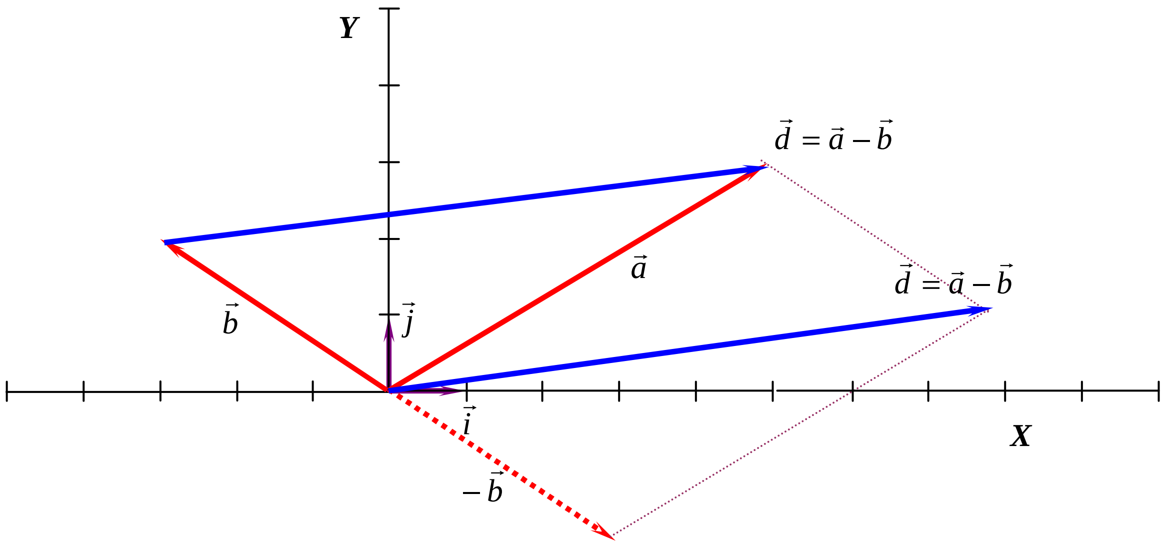
$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (5\vec{i} + 3\vec{j}) + (-3\vec{i} + 2\vec{j}) = (5-3)\vec{i} + (3+2)\vec{j} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$$

Exercicio 8. A *suma dun vector* $\vec{a} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$ *e* un *vector* $\vec{b} =$? *é* $\vec{s} = -3\vec{j}$. Cales son as *coordenadas do vector* $\vec{b}$?.

A diferenza analítica de dúas vectores é igual á diferenza das compoñentes dos vectores en cada eixe.

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k}$$

Graficamente, é un *vector que vai desde o segundo ao primeiro, xa que se ha de sumar o oposto do segundo vector.*

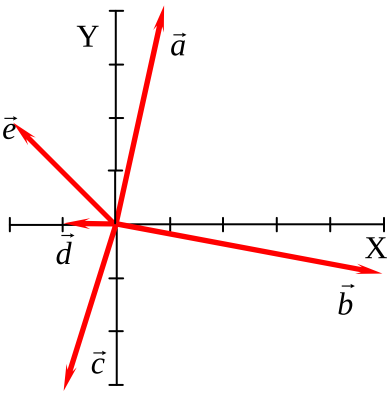


Calculemos *analiticamente* a diferenza vectorial na figura anterior:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \left(5\vec{i} + 3\vec{j}\right) - \left(-3\vec{i} + 2\vec{j}\right) = \left(5 - (-3)\right)\vec{i} + \left(3 - 2\right)\vec{j} = 8\vec{i} + \vec{j}$$

Exercicio 9. Dados os vectores: $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ e $\vec{b} = -4\vec{i} - \vec{j}$. Achar: $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$, *analiticamente e graficamente*. ***Resp.:*** $\vec{a} + \vec{b}$ **= 2** $\vec{j}$**,** $\vec{a} - \vec{b}$ **= 8** $\vec{i}$ **+ 4** $\vec{j}$

Exercicio 10. a) Expresar en *compoñentes cartesianas os vectores* da figura. b) Calcula *analiticamente e graficamente*: $\vec{a} + \vec{d}$; $\vec{a} - \vec{e}$.



Exercicio 11. Dados os vectores: $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = 8\vec{i} - 6\vec{j}$ *e* $\vec{c} = -\vec{i} + 2\vec{j}$. Calcular: a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ (*analiticamente e graficamente*). b) $3\cdot\vec{a}$ *; levan a mesma dirección* $\vec{a}$ *e* $3\cdot\vec{a}$ *?*. c) *Vectores unitarios* de $\vec{a}$ *e* $\vec{c}$.

Exercicio 12. Un vector, no plano XY, ten un *módulo igual a 5 e forma un ángulo de 36,9º* co eixe X^+. Cales son as *compoñentes cartesianas do vector*?. E o seu *vector unitario*?. ***Resp..: a)*** $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ ***. b) .....***