

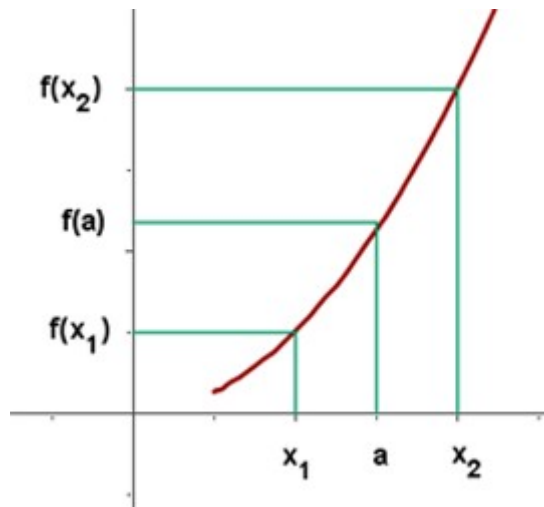
TEMA 3: APLICACIONES DAS DERIVADAS

Monotonía: Crecemento e decrecemento

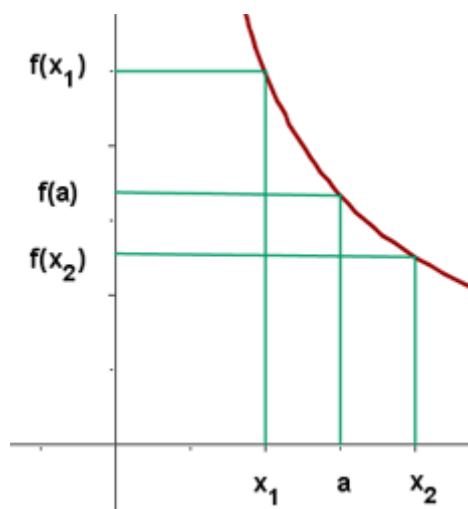
Sexa $f:D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unha función

Definicións:

Diremos que f é *crecente* en $x = a$ se existe unha veciñanza de a para a que se cumpre: $f(a) < f(x)$ para todo punto x de dita veciñanza e con $x > a$
 $f(a) > f(x)$ para todo punto x de dita veciñanza e con $x < a$

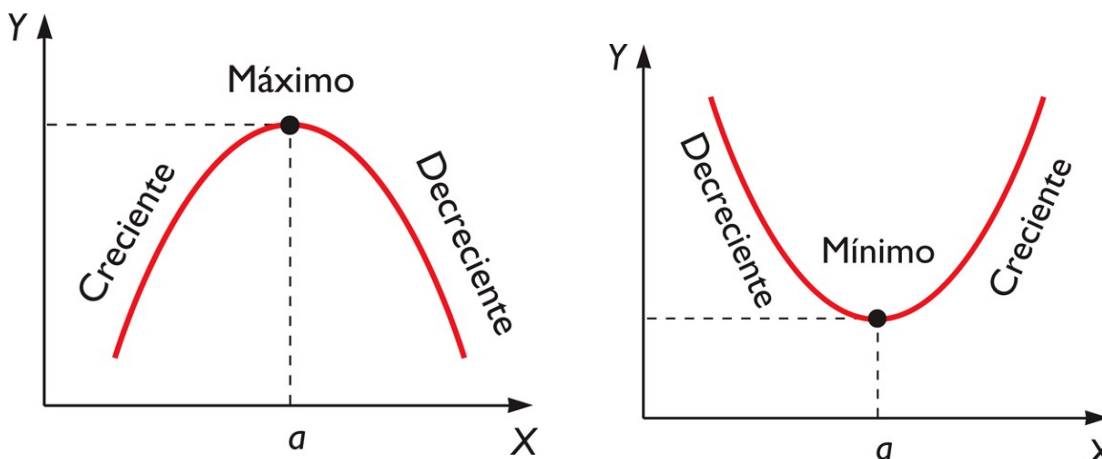


Diremos que f é *decrecente* en $x = a$ se existe unha veciñanza de a para a que se cumpre: $f(a) > f(x)$ para todo punto x de dita veciñanza e con $x > a$
 $f(a) < f(x)$ para todo punto x de dita veciñanza e con $x < a$



Diremos que f presenta un *máximo relativo* (ou local) no punto $x = a$ se existe unha veciñanza de a na que $f(x) < f(a)$ para todo punto x desa veciñanza

Diremos que f presenta un *mínimo relativo* (ou local) no punto $x = a$ se existe unha veciñanza de a na que $f(x) > f(a)$ para todo punto x desa veciñanza



É dicir, un máximo relativo é un punto onde a función pasa de crecer a decrecer, e un mínimo é un punto onde a función pasa de decrecer a crecer

Relación entre a monotonía e a derivada

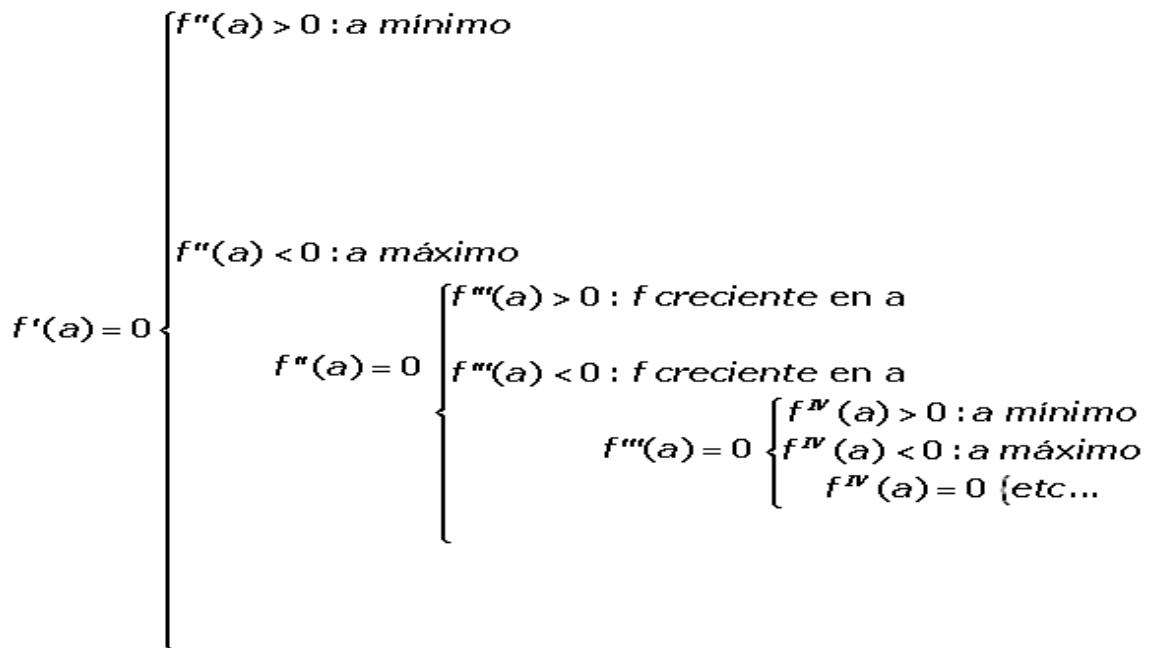
Se f é unha función derivable no punto $x = a$ se cumpre que:

- i) Se $f'(a) > 0$ entón f é crecente no punto $x = a$
- ii) Se $f'(a) < 0$ entón f é decrecente no punto $x = a$
- iii) Se f ten un máximo ou mínimo relativo en $x = a$ entón $f'(a) = 0$

Observacións:

· Nos puntos onde a función non sexa derivable, non podemos utilizar esta propiedade, nestes casos haberá que facer un estudio de que ocorre nas proximidades dese punto.

· O punto iii) non garantiza que si $f'(a) = 0$ entón a sexa un extremo (máximo ou mínimo) relativo. Por exemplo, a función $f(x) = x^3$, cumpre que $f'(0) = 0$ pero o punto $x = 0$ non é máximo nin mínimo relativo. Para asegurar que hai un extremo teremos que comprobar se hai un cambio de decrecer a crecer ou viceversa. Tamén podemos utilizar a seguinte propiedade:



Esquema para estudiar o crecemento dunha función

- 1) Calculamos o dominio da función
- 2) Calculamos a derivada da función
- 3) Calculamos os puntos onde a derivada é cero, é dicir, resolvemos a ecuación $f'(x) = 0$
- 4) Estudiamos o signo que ten a derivada en cada un dos intervalos en que queda dividida a recta real ao considerar os puntos críticos (puntos con derivada cero) e os puntos onde a función non é derivable ou non é continua

Exemplo: Estudiar o crecemento da función $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, a función é continua e derivable no dominio por ser unha función racional

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2} \quad ; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Pto de control	$f'(-3) = 6/25$	$f'(-1) = 2/9$	$f'(1) = -2/9$	$f'(3) = -6/25$
Signo de f'	+	+	-	-
Comportamento de f	Crece	Crece	Decrece	Decrece

Por tanto : A función é crecente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

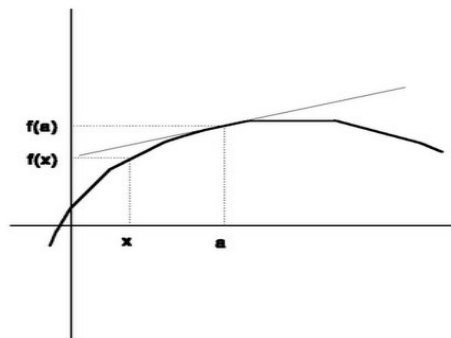
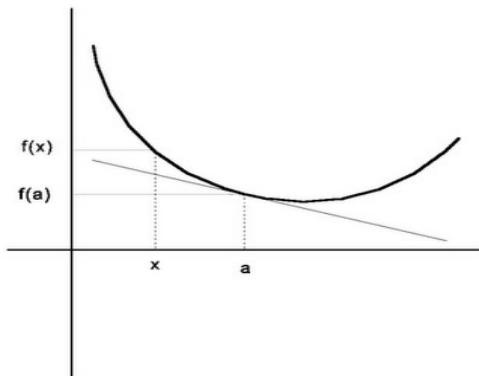
A función é decrecente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

A función ten un máximo relativo no punto $(0, f(0)) = (0, -1/4)$

Curvatura dunha función. Puntos de inflexión

Definición: Temos unha curva $y = f(x)$, trazamos a recta tanxente a ela nun punto P , que chamaremos $t(x)$, entón:

- Se nas proximidades de P é $f(x) > t(x)$ entón a curva é *convexa* en P
- Se nas proximidades de P é $f(x) < t(x)$ entón a curva é *cóncava* en P
- Se a tanxente atravesa a curva en P , é dicir, se á esquerda de P é $f(x) < t(x)$ e á dereita é $f(x) > t(x)$ ou viceversa, entón P é un *punto de inflexión*. Un punto de inflexión é un punto onde hai un cambio de cóncava a convexa ou viceversa.



Relación entre a curvatura e a derivada

Se f é unha función definida en $x = a$ e tal que existe $f''(a)$ entón:

- Se $f''(a) > 0$ entón f é convexa en a
- Se $f''(a) < 0$ entón f é cóncava en a
- Se f ten un punto de inflexión en a entón $f''(a) = 0$

Esquema para estudar a curvatura dunha función

- 1) Calculamos o dominio da función
- 2) Calculamos a derivada segunda da función
- 3) Calculamos os puntos onde a derivada segunda é cero, é dicir, resolvemos a ecuación $f''(x) = 0$
- 4) Estudiamos o signo que ten a derivada segunda en cada un dos intervalos en que queda dividida a recta real ao considerar os puntos con derivada segunda cero e os puntos onde a función non é derivable ou non é continua

Exemplo: $f(x) = x^3 + 3x^2$

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$; $f'(x) = 3x^2 + 6x$; $f''(x) = 6x + 6$; $6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
Pto de control	$f''(-2) = -6$	$f''(0) = 6$
Signo de f''	-	+
Comportamento de f	Cóncava	Convexa

Por tanto: f é cóncava en $(-\infty, -1)$

f é convexa en $(-1, \infty)$

f ten un punto de inflexión no punto $(-1, f(-1)) = (-1, 2)$

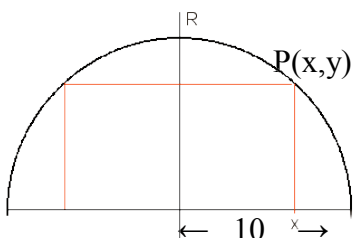
Problemas de optimización

Con moita frecuencia aparecen problemas físicos, xeométricos, económicos, biolóxicos,... nos que se trata de optimizar (encontrar o valor máximo ou mínimo) unha función (facer máximo un volume, uns beneficios, unha poboación; facer mínimos uns custos, unha área,...). Neste tipo de problemas interesa calcular o máximo ou mínimo absoluto nun certo conxunto.

Os pasos máis razoables para resolver problemas deste tipo serían:

- 1) Se nomean as variables correspondentes e se escribe a función que hai que optimizar
- 2) Esta función, normalmente, dependerá de máis dunha variable. Se busca unha relación entre elas, desdexando a máis axeitada i escribindo a función a optimizar en termos dunha soa variable
- 3) Se establece o conxunto no que, polo contexto do problema, se moverá a variable elegida. Normalmente será un intervalo do tipo $[a, b]$, polo que se a función é continua temos garantizado que existen máximo e mínimo absoluto.
- 4) Se busca o máximo ou o mínimo de f en $[a, b]$. Para elo se pode proceder:
 - a) Se f é derivable en $[a, b]$, o máximo e mínimo absoluto se alcanzará nun máximo ou mínimo relativo ou nun punto dos extremos do intervalo. Polo tanto, se calculan os extremos relativos comprendidos entre a e b , $x_1, x_2, \dots, x_n$ e se calculan $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$; o maior será o máximo absoluto e o menor será o mínimo absoluto
 - b) Se hai algún punto de $[a, b]$ no que f non sexa derivable pero si continua, calcularemos ademais o valor de f nese punto, pois podería ser un extremo absoluto
 - c) Se f non é continua nalgún punto de $[a, b]$ se estudiará o comportamento da función nas proximidades dese punto

Exemplo: Nun xardín con forma de semicírculo de raio 10 m vaise instalar un parterre rectangular, un de cuxos lados está sobre o diámetro e o oposto ten os extremos na parte curva. Calcula as dimensións do parterre para que a súa área sexa máxima.



Se $P(x,y)$ é un punto da circunferencia a área do parterre será: $A = 2xy$
Como $P(x,y)$ pertence á circunferencia se cumpre que: $x^2 + y^2 = 100$ entón $y = \sqrt{100 - x^2}$, logo:

$A = 2x\sqrt{100 - x^2}$ e teremos que buscar o máximo desa función no intervalo $[0, 10]$

Sol: $5\sqrt{2}$

Regra de L'Hôpital

Se as funcións $f(x)$ y $g(x)$ son derivables nun entorno de a e tales que

$f(a) = g(a) = 0$, entón, se existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

A regra de L'Hôpital tamén se pode aplicar cando $x \rightarrow \infty$, pois facendo o cambio de variable $x = \frac{1}{y}$ estaríamos no caso anterior.

É válida a mesma regra cando $f(x)$ e $g(x)$ tenden a ∞ cando $x \rightarrow a$.

Polo tanto, serve para resolver as indeterminacións $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, ademais, mediante determinadas transformacións tamén poderemos resolver as indeterminacións: $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$

Exemplos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - x - 2} = \left(\frac{0}{0} \right)$$

Aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x + 2}{2x - 1} = \frac{6 \cdot 2 + 2}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{14}{3}$$

A veces é necesario aplicar máis dunha vez a regra de L'Hôpital para quitar a indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-x)e^x - x - 2}{x^3} = \left(\frac{(2-0)e^0 - 0 - 2}{0^3} = \frac{0}{0} \right)$$

Entón:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-x)e^x - x - 2}{x^3} = \{ \text{aplicando L'Hôpital} \} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x + (2-x)e^x - 1}{3x^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} =$$

Novamente aplicaríamos a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - xe^x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^x - xe^x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-xe^x}{6x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\}$$

Aplicamos, outra vez, a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-xe^x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x - xe^x}{6} = \frac{-e^0 - 0 \cdot e^0}{6} = -\frac{1}{6}$$

Para as outras indeterminacións teríamos:

- **Límites da forma $0 \cdot \infty$**

Supoñendo que $f \rightarrow 0$ y $g \rightarrow \infty$, se efectúa o cambio $f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$ co que pasaríamos á indeterminación $\frac{0}{0}$ e, entón, aplicaríamos a regra de L'Hôpital.

Tamén se pode facer $f \cdot g = \frac{g}{\frac{1}{f}}$ e nos quedaría a indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot Lx = 0 \cdot L0 = 0 \cdot \infty$$

Efectuando calquera das transformacións anteriores, nos queda:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot Lx = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Lx}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot Lx = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Lx}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

- **Límite da forma $\infty - \infty$**

Si supoñemos que f e g tenden a ∞ para estudar o límite de $f - g$ podemos facer o cambio: $f - g = f \cdot \left(1 - \frac{g}{f}\right)$ que posiblemente será un límite máis fácil de calcular.

Exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \infty - \infty$$

Neste caso, nos resulta máis cómodo efectuar a diferenza para pasar á indeterminación $\frac{0}{0}$ e aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \cdot \sin x} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \\ &= \frac{-\sin 0}{2 \cdot \cos 0 - 0 \cdot \sin 0} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

- Límites de la forma 1^∞ , ∞^0 , 0^0 .

Para quitar este tipo de indeterminación se puede utilizar la expresión:
 $f^g = e^{g \ln f}$ pasando así a alguna de las indeterminaciones anteriores.

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = 1^\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} \cdot L(\cos 2x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot L(\cos 2x)}{x^2}} = e^{\left\{ \frac{0}{0} \right\}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \frac{-2 \sin 2x}{\cos 2x}}{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6 \sin 2x}{2x}} = e^{\left\{ \frac{0}{0} \right\}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6 \cdot 2(1 + \tan^2 2x)}{2}} = e^{\frac{-6 \cdot 2(1 + 0)}{2}} = e^{-6} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x} = \infty^0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \tan x \cdot L\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \tan x \cdot (-Lx)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-Lx}{\tan x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-Lx}{\cot x}} = e^{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin^2 x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}} = e^{\left(\frac{0}{0} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{1}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

EXERCICIOS.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - \frac{1}{3}x^3}{x - \tan x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{Lx} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (Lx)^{\frac{1}{e^x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \ln(\tan x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{2}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot L\left(\frac{1+x}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sqrt[n]{a-1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x-1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

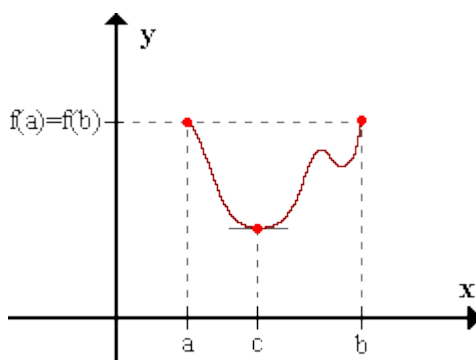
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos 2x} - \frac{\tan x}{1 - \frac{4x}{\pi}} \right)$$

Teorema de Rolle

Se f é unha función continua no intervalo $[a, b]$ e derivable no intervalo (a, b) e ademais $f(a) = f(b)$ entón existe un punto c do intervalo (a, b) tal que $f'(c) = 0$

Interpretación xeométrica

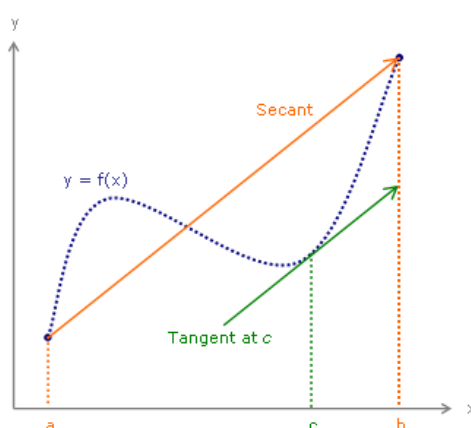


Que $f'(c) = 0$ quere dicir que a pendente da recta tanxente á curva nese punto vale cero, por tanto, se se cumpren as hipóteses do teorema de Rolle entón podemos asegurar que polo menos existe un punto entre a e b onde a recta tanxente á curva nese punto é horizontal.

Teorema do valor medio do cálculo diferencial

Se f é unha función continua no intervalo $[a, b]$ e derivable no intervalo (a, b) entón existe un punto c do intervalo (a, b) tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Interpretación xeométrica



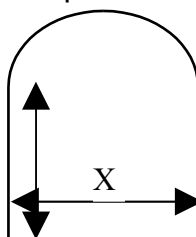
Por un lado, a recta que une os puntos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ ten por pendente $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, por outro lado $f'(c)$ é a pendente da recta tanxente á curva no punto $(c, f(c))$. Polo tanto se se cumpren as hipóteses do teorema do valor medio, podemos garantir que polo menos existe un punto onde a recta tanxente é paralela á recta que une os puntos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$.

Exercicios

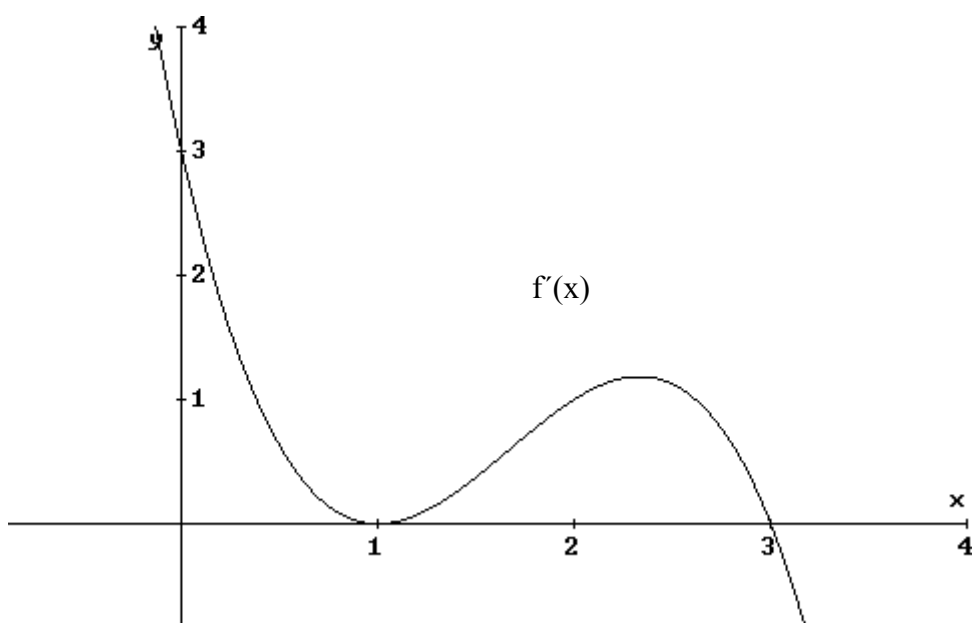
1) Se considera unha caixa sen tapadera (consta de catro caras laterais e o fondo). Sabendo que o fondo é un cadrado e coñecendo que a área total (das cinco caras) é de 12 cm^2 , calcular as súas dimensións para que teña a maior capacidade posible.

2) Se considera unha ventá como a que se indica na figura (A parte inferior é rectangular, a superior unha semicircunferencia). O perímetro da ventá mide 6 m. Calcular as dimensións x e y para que a superficie da ventá sexa máxima.

Expresar os resultados en función de π



3) A gráfica da figura corresponde á primeira derivada dunha función $f(x)$. Qué pode decirse sobre os posibles máximos e mínimos relativos da función $f(x)$? Razoar a resposta.



4) Calcular

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x (1 - \sin x)}{\cos^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\tan x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-x)e^x - (2-x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x}$$

5) Se considera a función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + nx & \text{si } x < -2 \\ x^3 + m & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

- Determinar m e n para que se cumpran as hipóteses do teorema do valor medio no intervalo $[-4, 2]$.
- Achar os puntos do intervalo cuxa existencia garante dito teorema.

6) Se considera a función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x > 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Contestar, razoadamente, ás seguintes preguntas:

- É continua no punto $x = 0$?
- É derivable no punto $x = 0$?
- Alcanza algún extremo?

7) Sexa $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumpre $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$, e ten dous extremos relativos para $x = 1$ e $x = 2$.

- Determinar a, b, c e d .
- Son máximos ou mínimos os extremos relativos?

8) a) Si é posible, debuxar de forma clara a gráfica dunha función continua no intervalo $[0, 4]$ que teña ó menos un máximo relativo no punto $(2, 3)$ e un mínimo relativo no punto $(3, 4)$

b) Si a función fora polinómica, cal ha de ser como mínimo o grao?

9) Sexa a función $f(x) = 2x + \sin 2x$. Estudiar a monotonía e a existencia de extremos relativos.

10) Dados tres números reais cualesquiera r_1 , r_2 y r_3 , achar o número real x que minimiza a función: $D(x) = (r_1 - x)^2 + (r_2 - x)^2 + (r_3 - x)^2$

11) Se considera a función

$$f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$$

- Indicar o dominio de definición da función f e achar as asíntotas.
- Calcular os extremos relativos da función f e os intervalos de concavidade e convexidade.
- Achar seu máximo e seu mínimo absolutos no intervalo $[-1, 1]$.

12) Se consideran as funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = ax^2 + b$

- Calcular a e b para que as gráficas de f e g sexan tanxentes no punto de abscisa $x=2$
- Para os valores de a e b calculados no apartado anterior, debuxar as gráficas de ambas funcións e achar a ecuación da recta tanxente común.

13) a) Determinar os extremos relativos da función $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Debuxar súa gráfica.

b) Achar as ecuacións das dúas rectas tanxentes á gráfica de f que pasan polo punto $P(3, -5)$.

14) Se considera a función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$$

Calcular a ecuación cartesiana da recta tanxente no punto de inflexión de abscisa positiva da gráfica de f .

15) Dada $f(x) = x^2 + mx$ definida en $[-2, 0]$

a) Determinar m para que $f(x)$ cumpra as condicións do teorema de Rolle

b) Para os valores obtidos, existe algún punto de $(-2, 0)$ no que a recta tanxente sexa horizontal?

16) Comproba se as seguintes funcións cumpren o teorema de Rolle

a) $f(x) = |x-2|$ en $[0, 4]$ b) $f(x) = \operatorname{tg} x$ en $[0, \pi]$

17) Sábese que $f(x)$ definida en $[0, 5]$ por $f(x) = \begin{cases} ax + bx^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ c + \sqrt{x-1}, & 2 < x \leq 5 \end{cases}$ é derivable en $(0, 5)$ e $f(0) = f(5)$. Calcular a, b, c

18) Calcular os valores de a tales que as rectas tanxentes á gráfica da función $f(x) = ax^3 + 2x^2 + 3$ nos puntos $x = 1$ e $x = -1$ sexan perpendiculares entre si.

19) Determinar a, b, c, d para que a curva correspondente a $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pase pola orixe e teña no punto $(2, 1)$ un punto de inflexión con tanxente horizontal.

20) Calcular os extremos relativos de $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$

21) Dada $f(x) = x^3 + ax^2 + 5$, determinar o valor de a para que teña un extremo relativo en $x = 2$. Estudiar a monotonía e curvatura.

22) Calcular os extremos relativos de $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$

23) Demostrar que a ecuación $x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$ admite unha solución e so unha no intervalo $(1, 2)$.

24) Demostrar que a función derivada do polinomio $P(x) = x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)$ ten todas as súas raíces reais.

25) Demostrar que no intervalo $[6, 7]$ a ecuación $x^3 - 6x^2 - 4 = 0$ ten unha única solución.