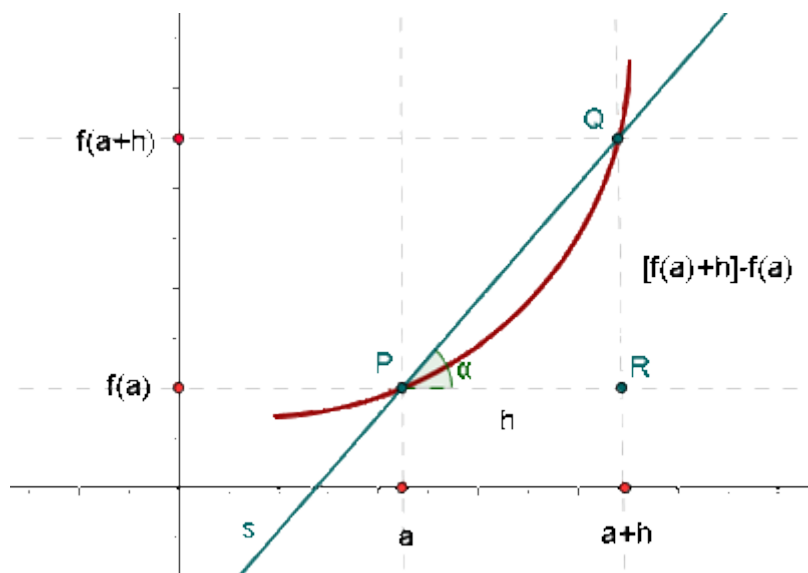


TEMA 2: DERIVADA DUNHA FUNCIÓN

Tasa de variación

Dada unha función $y = f(x)$, se define a tasa de variación no intervalo $[a, a + h]$ como: $f(a+h) - f(a)$ e se define a tasa de variación media como: $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$



A tasa de variación dunha función da unha primeira idea da rapidez con que crece ou decrece, aínda que non o suficientemente precisa. A tasa de variación media responde á pregunta: Cantas unidades crece (ou decrece) a variable y por cada unha que crece a variable x ? A resposta ven dada polo cociente ou razón incremental que representa a tasa de variación media: $TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Moitas veces é interesante coñecer o comportamento da función nun punto, para iso, fanse os intervalos $[a, a + h]$ cada vez máis pequenos, é dicir, faise que h tenda a cero, desta forma obteríamos a tasa de variación instantánea, polo tanto, a tasa de variación instantánea será o límite das tasas de variación media cando os intervalos se fan cada vez máis pequenos, i eso é o que chamaremos derivada da función no punto a

Derivada dunha función nun punto

Diremos que unha función é derivable no punto $x = a$ cando $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ é un número real. Este número é a derivada de f en a e se designa por $f'(a)$

Si facemos $x = a+h$, entón $h = x - a$ e cando $h \rightarrow 0$ entón $x \rightarrow a$, substituindo na definición de derivada se obtén outra forma de escribir a derivada:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Interpretación física da derivada

Cando dúas magnitudes x e y están relacionadas por unha función, $y = f(x)$, entón a derivada determina o ritmo de cambio de y respecto de x , é dicir, como de rápido crece ou decrece y cando x varía.

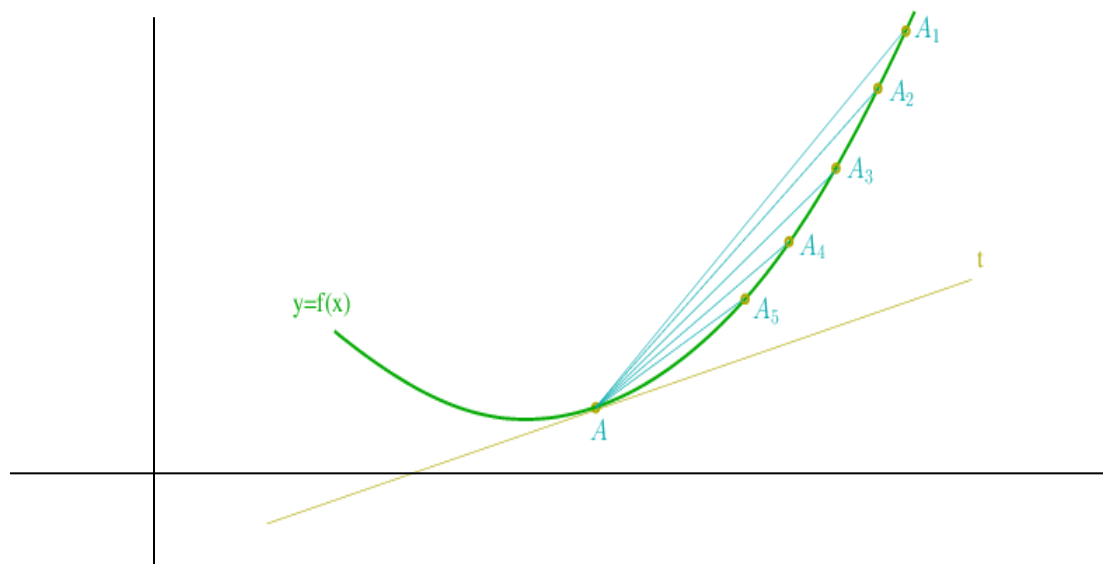
O exemplo máis destacado en física aparece cando se considera a y como o espazo que recorre un móbil e a x o tempo transcorrido, si $y(x)$ é a posición dun móbil nun instante determinado, a velocidade media nun intervalo $[x, x+h]$ e a velocidade instantánea no instante x serán:

$$V_m = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \quad v_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

obtemos así que a velocidade instantánea é a derivada do espazo respecto ó tempo. Da mesma forma, obteríamos que a aceleración instantánea dun móbil é a derivada da velocidade respecto ó tempo.

Interpretación xeométrica da derivada

Temos unha función $y = f(x)$ e un punto $A(a, f(a))$. Consideramos un conxunto de puntos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ aproximándose ó punto A . Si os puntos A_i tenden a A , as rectas secantes $AA_1, AA_2, \dots, AA_n, \dots$ se aproximan a unha recta t que coincide coa idea intuitiva de recta tanxente á gráfica da función no punto A . Polo tanto, a recta tanxente a unha curva no punto A é a posición límite, se existe, das rectas secantes determinadas por A e A_n cando A_n se aproxima a A .



As rectas secantes que pasan por A quedan completamente determinadas pola súa pendente, xa que o punto A é fixo. Si $A(a, f(a))$ e $A_i(x_i, f(x_i))$ son as coordenadas de A e un punto calquera A_i , a pendente da recta secante AA_i

$$\text{será: } m_i = \frac{f(x_i) - f(a)}{x_i - a} \quad (\text{tasa de variación media entre } A \text{ e } A_i)$$

Se os puntos A_i se aproximan a A entón as abscisas x_i tenderán ao punto a . Polo tanto, se chamamos m_t á pendente da recta tanxente en A , resulta:

$$m_t = \lim_{x_i \rightarrow a} \frac{f(x_i) - f(a)}{x_i - a}, \text{ que é a derivada da función } f \text{ no punto } x = a$$

En consecuencia: **A derivada da función f no punto $x = a$ é a pendente da recta tanxente á gráfica de f no punto de abscisa $x = a$. $m_t = f'(a)$**

Desta maneira, a ecuación da recta tanxente á gráfica de f no punto $(a, f(a))$ será: $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$

e a ecuación da recta normal á gráfica de f no punto $(a, f(a))$ (recta perpendicular á tanxente nese punto) será: $y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)} \cdot (x - a)$

Derivadas laterais

Hai funcións que non son derivables nun punto $x = a$ porque aínda que existen os límites laterais non son iguais (esta situación adoita aparecer en funcións definidas a anacos), neste caso se fala de derivada pola dereita e derivada pola esquerda.

Unha función é derivable pola esquerda no punto $x = a$ se o seguinte límite é un número real

$$f'(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Unha función é derivable pola dereita no punto $x = a$ se o seguinte límite é un número real

$$f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

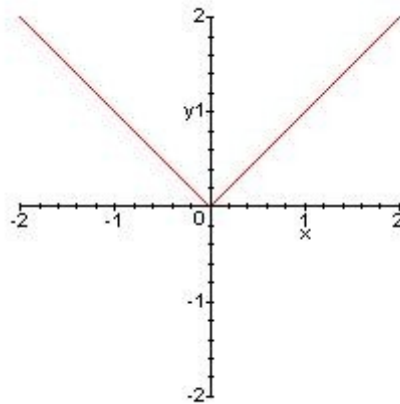
Evidentemente, para que unha función sexa derivable no punto $x = a$ teñen que existir as derivadas laterais e ser iguais.

Relación entre continuidade e derivabilidade

Se unha función é derivable nun punto $x = a$ entón tamén é continua nese punto. Polo tanto, se unha función non é continua nun punto tampouco é derivable nese punto.

O recíproco non é certo, é dicir, existen funcións continuas nun punto que non son derivables nese punto, por exemplo $f(x) = |x|$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$ e $f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$. Polo tanto a función non é derivable en $x = 0$ pero si é continua en $x = 0$

En xeral, nos puntos onde a función fai un “pico” (ou puntos angulosos) a función non é derivable aínda que sexa continua.

Función derivada

Se unha función f é derivable nun subconxunto D' do seu dominio D , é posible definir unha nova función que asocie a cada número de D' a súa derivada nese punto. Esta función así definida se chama función derivada e se denota por f'

$$\begin{aligned} f': D' \subset D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

Tamén se pode falar da función derivada de f' , é dicir, da función $(f')'(x)$, que se representa por $f''(x)$ e se denomina derivada segunda de f .

De forma análoga defínense as derivadas terceiras, cuartas,... e de calquera orde.

Reglas de derivación

Funcion simple	Derivada
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = u(x) + v(x)$	$y' = u'(x) + v'(x)$
$y = k \cdot u(x)$	$y' = k \cdot u'(x)$
$y = u(x) \cdot v(x)$	$y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$y = \frac{u(x)}{v(x)}$	$y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \log_a e$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$y = \cot x$	$y' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -[1 + \cot^2 x]$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arctan x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$

REGRA DA CADEA

Supóñase que f e g son dos funcións derivables, entón:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Función compuesta	Derivada
$y = u^n(x)$	$y' = n \cdot u^{n-1}(x) \cdot u'(x)$
$y = \ln u(x)$	$y' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
$y = \log_a u(x)$	$y' = \frac{u'(x)}{u(x)} \log_a e$
$y = e^{u(x)}$	$y' = e^{u(x)} \cdot u'(x)$
$y = a^{u(x)}$	$y' = a^{u(x)} \cdot u'(x) \cdot \ln a$
$y = \operatorname{sen} u(x)$	$y' = u'(x) \cos u(x)$
$y = \operatorname{cos} u(x)$	$y' = -u'(x) \operatorname{sen} u(x)$
$y = \operatorname{tg} u(x)$	$y' = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$
$y = \operatorname{cotg} u(x)$	$y' = \frac{-u'(x)}{\operatorname{sen}^2 u(x)}$
$y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} u(x)$	$y' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$
$y = \operatorname{arc} \operatorname{cos} u(x)$	$y' = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$
$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} u(x)$	$y' = \frac{u'(x)}{1 + u^2(x)}$

Estudo da derivabilidade dunha función definida a anacos

Consideremos unha función $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \leq a \\ f_2(x) & \text{se } x > a \end{cases}$ na que $f_1(x)$ é derivable en (q, a) e $f_2(x)$ é derivable en (a, p) . Para estudar se $f(x)$ é derivable no punto a , seguiremos os seguintes pasos:

1. Estudamos se f é continua en $x = a$. Se non o fose xa non sería derivable

2. Calculamos $f'(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} f'_1(x)$ e $f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'_2(x)$

Se os dous límites existen e son iguais entón f é derivable en $x = a$ e ese é o valor da derivada. En caso contrario non é derivable

$$\text{Exemplo: } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & \text{se } x \leq -1 \\ 1 & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ 2x^2 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Derivación logarítmica

Utilízase para derivar funcións expoñenciais nas que nin a base nin o expoñente son constantes

Derivación implícita

Hai ocasións en que, aínda que non é posible despregar y en termos de x , si se pode calcular a súa derivada en función das coordenadas dos pares (x, y)

Exercicios

1) Calcular a e b para que a seguinte función sexa continua e derivable no dominio:

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{se } x < 0 \\ ax + b & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ x^3 - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases} \quad \text{ii) } f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \leq 0 \\ -ax + b & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 5 & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

2) Calcula os valores de a, b e c para que as gráficas das funcións $f(x) = x^2 + ax + b$ e $g(x) = x^3 + c$ pasen polo punto (1, 2) e teñan nel a mesma recta tangente. Calcular dita tangente.

3) Sexa $f: [0,4] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ cx + 1 & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$. Calcular a, b e c sabendo que f é continua en [0,4], derivable en (0,4) e $f(0) = f(4)$

4) Acha a área do triángulo formado polo eixo OX e as rectas tangente e normal á curva $y = e^{-x}$ no punto de abscisa $x = -1$

5) Se considera $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$. Calcular a e b para que a gráfica de f pase polo punto (-2,-6) e admita en dito punto unha recta tangente horizontal.

6) Calcula en que puntos a recta tangente á curva $y = x^3 - 3x + 1$ é paralela ó eixo X. Escribe a ecuación de dita tangente.

7) Demostrar que a tangente a unha circunferencia é perpendicular ó radio

8) Sexa a un número estritamente positivo. A recta tangente á gráfica da función $y = \ln x$ no punto (a, ln a) corta ó eixo de ordenadas no punto P_a . Se Q_a é o punto de intersección do eixo de ordenadas coa recta $y = \ln a$, probar que a distancia entre os puntos P_a e Q_a é unha constante.

9) Determinar o polinomio $P(x)$ de grado menor ou igual a 3, tal que a curva $y = P(x)$ sexa tangente ás rectas $y = 2 - x$, $x + y = 0$ nos puntos $x = 0$ e $x = 1$, respectivamente.

10) Sábese que $f(x)$ definida en [0,5] por $f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & , 0 \leq x \leq 2 \\ c + \sqrt{x-1} & , 2 < x \leq 5 \end{cases}$

é derivable en (0,5) e $f(0) = f(5)$. Calcular a, b, c

11) Calcular os valores de a tales que as rectas tangentes á gráfica da función $f(x) = ax^3 + 2x^2 + 3$ nos puntos $x = 1$ e $x = -1$ sexan perpendiculares entre si.

12) Dada a función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{se } x \leq 1 \\ -x^2 + nx & \text{se } x > 1 \end{cases}$

a) Calcula m e n para que sexa derivable en $\mathbb{R}$

b) En que puntos é $f'(x) = 0$?

13) Comproba se a seguinte función é continua e derivable,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

14) Calcular o valor de k para que a función $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + k}$ teña un único punto de tanxente horizontal.

15) Calcula a e b para que a seguinte función sexa continua en $\mathbb{R}$. Para os valores obtidos estudia a derivabilidade de f.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{se } x \leq -1 \\ ax + b & \text{se } -1 < x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{se } 0 \leq x \end{cases}$$

16) Calcula k para que a seguinte función sexa derivable no seu dominio

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ k(1 - e^{1-x}) & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

17) Estudiar a continuidade e derivabilidade da función $f(x) = \frac{1}{1 + |x|}$

18) Estudiar a derivabilidade da función:

a) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$.

b) $f(x) = x|x-1|$