

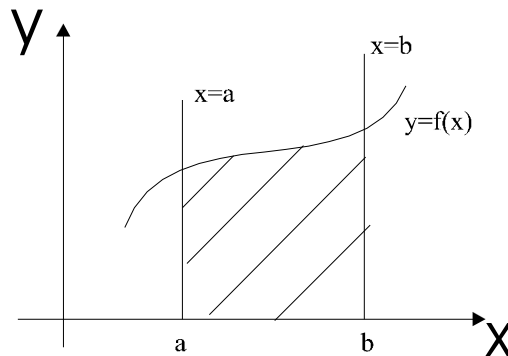
INTEGRAL DEFINIDA

Resolveremos o seguinte problema:

Dada unha función $f(x)$ continua $f(x) > 0$ en $[a,b]$.

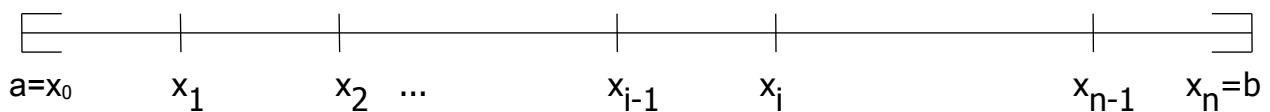
Cal é a área da rexión delimitada pola gráfica de $y=f(x)$, as rectas $x=a$ e $x=b$ e o eixe OX [chamada $R(f,a,b)$]?.

A idea será tratar de aproximar a área desa rexión usando áreas de figuras xa coñecidas: **rectángulos**.



DEFINICION

Partición dun intervalo $[a, b]$ é un conxunto de puntos $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n\}$ con $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{i+1} < x_i < \dots < x_n = b$, que definen os intervalos pechados $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\dots$, $[x_{i-1}, x_i]$, $\dots$, $[x_{n-1}, x_n]$.



Definición : Dadas dúas particións P_1 e P_2 dun mesmo intervalo $[a,b]$.

Dise que **P_2 é máis fina que P_1** se $P_1 \subset P_2$ (P_1 está incluída en P_2)

(Ou sexa, se en P_2 están os puntos de P_1 , e hai máis puntos en P_2 que en P_1)

Exemplo :

Unha partición de $[0, 1]$ sería $P_1 = \{0, 1/2, 1\}$

Outra partición de $[0,1]$: $P_2 = \{0, 1/4, 1/2, 1\}$

A partición P_2 é **máis fina** que a partición P_1

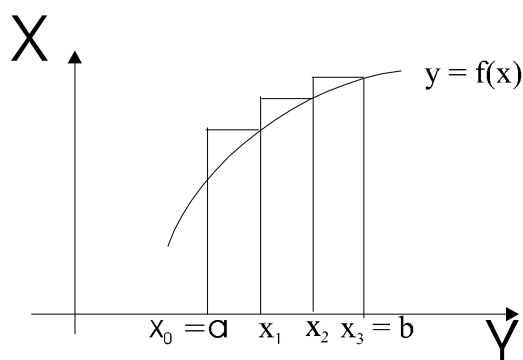
Recorda: **(Teorema de Weierstrass)**

f continua nun intervalo pechado $[a, b] \Rightarrow f$ **alcanza máximo (M) e mínimo (m) en $[a, b]$.**

Logo tamén é certo

f continua nun intervalo pechado $[a, b] \Rightarrow f$ continua en cada intervalo pechado $[x_{i-1}, x_i]$ determinado por unha partición P calquera dese intervalo $\Rightarrow f$ **alcanza máximo (chamarémoslle M_i) e mínimo (chamarémoslle m_i) en cada un dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ determinados pola partición P .**

Definición : Suma superior de f asociada a unha partición P : $S(f, P)$



É a **suma das áreas dos rectángulos** que teñen:

Base : os subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, determinados pola partición P

Altura : o **máximo M_i** da función en cada un deses subintervalos

$S(f, P) = (x_1 - x_0)M_1 + (x_2 - x_1)M_2 + \dots + (x_n - x_{n-1})M_n$ ou escrita como un sumatorio

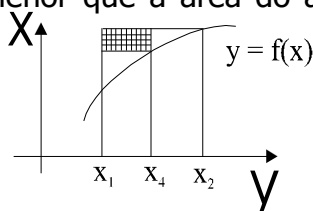
$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})M_i$$

É unha **aproximación por exceso da área da rexión $R(f, a, b)$**

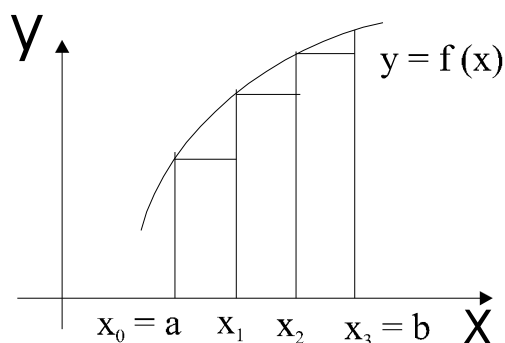
(Na gráfica de exemplo os máximos alcázanse nos extremos da dereita de cada un dos tres subintervalos da partición)

A suma superior de f decrece a medida que construímos particións máis finas aumentando os puntos da partición.

Por exemplo se entre os puntos x_1 e x_2 introducimos un novo punto x_4 teríamos dous novos rectángulos, de bases $[x_1, x_4]$ e $[x_4, x_2]$ en vez do rectángulo de base $[x_1, x_2]$ pero a suma das áreas destes dous novos é menor que a área do anterior, xa que **coa nova partición non estaría a zona raiada**



Definición : Suma inferior de f asociada a unha partición $P : I(f, P)$



É a **suma das áreas dos rectángulos** que teñen:

Base: Os subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, determinados pola partición P .

Altura: o **mínimo** m_i da función en cada un deses subintervalos.

$I(f, P) = (x_1 - x_0)m_1 + (x_2 - x_1)m_2 + \dots + (x_n - x_{n-1})m_n$ ou escrita como un sumatorio

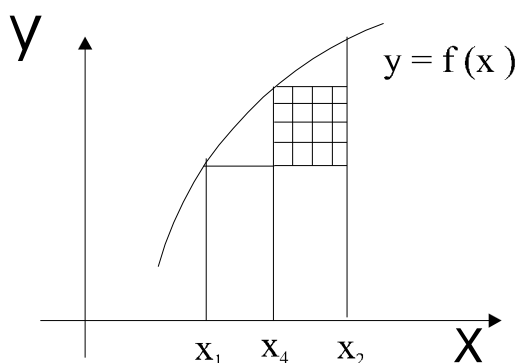
$$I(f, P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})m_i$$

É unha **aproximación por defecto da área da rexión** $R(f, a, b)$

(Na gráfica do exemplo os mínimos alcázanse nos extremos da esquerda de cada un dos tres subintervalos da partición)

A suma inferior de f crece a medida que construímos particións máis finas aumentando os puntos da partición.

Por exemplo se entre os puntos x_1 e x_2 introducimos un novo punto x_4 teríamos dous novos rectángulos, de bases $[x_1, x_4]$ e $[x_4, x_2]$ en vez do rectángulo de base $[x_1, x_2]$ pero a suma das áreas destes dous novos é maior que a área do anterior, xa que **coa nova partición agora estaría tamén a zona raiada**



Faise o seguinte razoamento:

Considérase unha sucesión de particións $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ de $[a, b]$ con $P_i \subset P_{i+1}$

(que definen intervalos cada vez máis pequenos)

Como P_{i+1} é máis fina que P_i temos que:

$S(f, P_i) > S(f, P_{i+1})$ e sempre maior que a área

$I(f, P_i) < I(f, P_{i+1})$ e sempre menor que a área

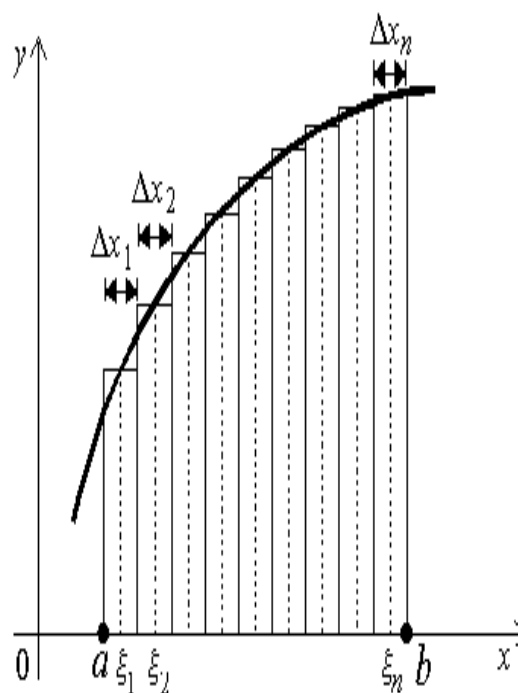
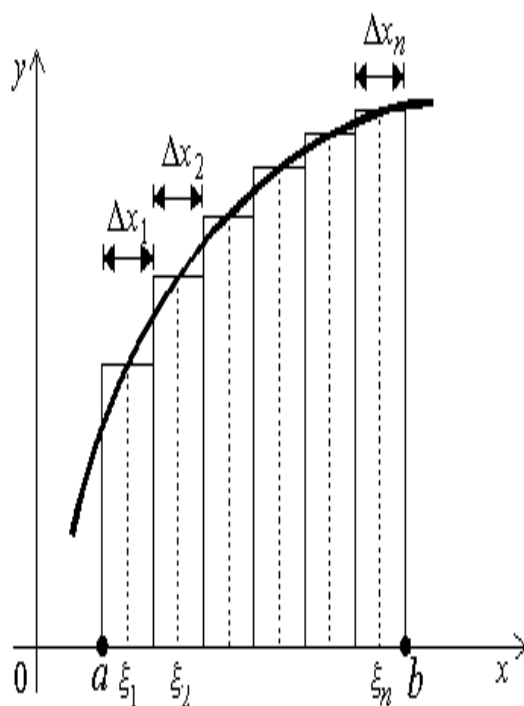
cando $i \rightarrow \infty$ chegarán a ser iguais

Ou sexa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f, P_n)$$

que é a área da rexión $R(f, a, b)$

Ou sexa, a medida que aumentamos os puntos da partición as sumas inferiores crecen e as superiores decrecen aproximándose cada vez máis, unha por defecto, e outra por exceso á área baixo a curva no intervalo $[a, b]$. No límite serán iguais a ela



Definición

Dada $f(x)$ definida en $[a,b]$ e unha sucesión de particións $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ de $[a, b]$ con $P_i \subset P_{i+1}$

Dicimos que **$f(x)$ é integrable en $[a,b]$** se $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f, P_n)$

Se $f(x)$ é integrable en $[a,b]$ chámase **integral definida de $f(x)$ en $[a,b]$ ó NÚMERO REAL:**

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f, P_n)$$

(a e b chámanse extremos inferior e superior de integración)

Teorema:

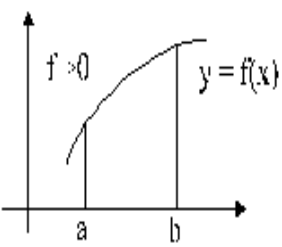
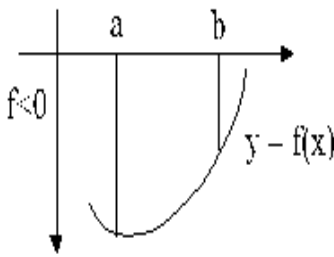
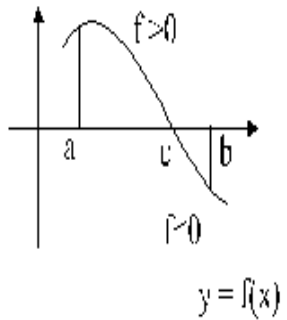
Se $f(x)$ é unha función continua nun intervalo $[a,b]$ ENTÓN $f(x)$ é integrable en $[a,b]$.

PROPIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA

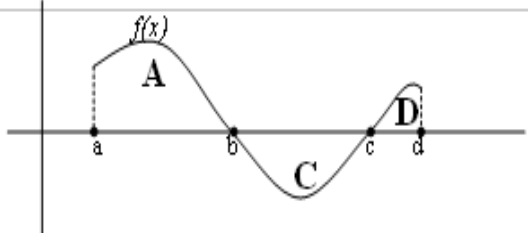
Propiedades

1. Si los límites de la integración son iguales, la integral es nula. $\int_a^a f(x) dx = 0$
2. Si $f(x) > 0$ en todo el intervalo, entonces $\int_a^b f(x) dx > 0$
Si $f(x) < 0$ en todo el intervalo, entonces $\int_a^b f(x) dx < 0$
3. Si f es continua en $[a,b]$, $[a,c]$ y $[c,b]$, $a < c < b$, entonces $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
4. Si f es continua en $[a,b]$ entonces $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
5. Si f y g son continuas en $[a, b]$ entonces $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
6. Si f es continua en $[a,b]$ y k es una constante, entonces $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$
7. Si $f(x) \geq g(x)$ para cualquier valor $x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DA INTEGRAL DEFINIDA.

		
Se $f(x) > 0$ en $[a, b]$ $\int_a^b f(x) dx > 0$	Se $f(x) < 0$ en $[a, b]$ $\int_a^b f(x) dx < 0$	En xeral $\int_a^b f(x) dx$
é a área da rexión $R(f, a, b)$	é área de $R(f, a, b)$ cambiada de signo	é a área de $R(f, a, c)$ menos a área de $R(f, c, b)$

En xeral, se a función toma valores positivos e negativos, para calcula-la área entre a función e o eixe:

	$\text{Área} = A + C + D = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx$
--	--

TEOREMA DO VALOR MEDIO DO CÁLCULO INTEGRAL

$$f \text{ continua en } [a, b] \Rightarrow \exists c \in (a, b) / \int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a)$$

Demostración :

Por ser f continua en $[a, b] \Rightarrow$ existe m (mínimo) e M (máximo) de f en $[a, b]$ (Teorema de Weierstrass)

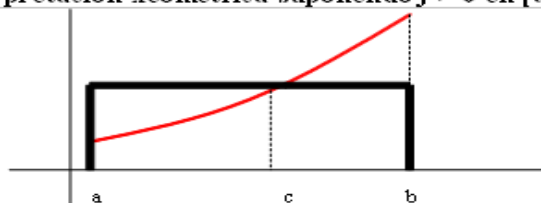
Polo tanto $m \leq f(x) \leq M$ para todo x de $[a, b]$. Integrando estas tres funcións (m e M son funcións constantes)

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M \Rightarrow (b-a) \cdot m \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) \cdot M \Rightarrow m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

Por ser f continua en $[a, b] \Rightarrow f$ toma tódolos valores comprendidos entre m e M (Teorema de Darboux)

$$\text{Ou sexa, } \exists c \in (a, b) / f(c) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \exists c \in (a, b) / f(c) \cdot (b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

Interpretación xeométrica supoñendo $f > 0$ en $[a, b]$:



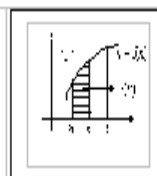
O teorema asegura que a área da rexión limitada pola gráfica, as rectas $x=a$ $x=b$ e o eixe ox :
 $R(f, a, b)$ coincide coa área dun rectángulo que ten
-como **base** $(b-a)$
-como **altura** un número $f(c)$ comprendido entre o máximo e o mínimo da función.

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO INTEGRAL.

Definición: Función integral.

Dada $f(x)$ continua en $[a, b]$ definimos no mesmo intervalo $[a, b]$ a **función integral**: $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

Obsérvese que $F(x)$ verifica	• Se $x = a$	$F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$	
	• Se $x = b$	$F(b) = \int_a^b f(t) dt$	integral definida de f en $[a, b]$
	• Se $f > 0$ en $[a, b]$	$F(x)$ dá o valor da área baixo a curva no intervalo $[a, x]$	



TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO INTEGRAL.

Se f é continua en $[a, b]$ entón a función integral asociada $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ é derivable en $[a, b]$ e $F'(x) = f(x)$ para todo x de $[a, b]$ (A función integral é unha primitiva de f en $[a, b]$)

En xeral:

$$\text{Se } G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \quad \text{entón} \quad G'(x) = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x)$$

Exemplos:

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^3} \Rightarrow F'(x) = \sqrt{1+x^3}$$

$$F(x) = \int_2^x \frac{1}{t^4 + 3} \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{x^4 + 3}$$

$$F(x) = \int_x^3 \sqrt{\operatorname{sen} t} dt \Rightarrow F(x) = - \int_3^x \sqrt{\operatorname{sen} t} dt \Rightarrow F'(x) = -\sqrt{\operatorname{sen} x}$$

$$F(x) = \int_1^{x^3} \sqrt[3]{t^2 + 1} dt \Rightarrow F'(x) = 3x^2 \sqrt[3]{x^6 + 1}$$

$$F(x) = \int_3^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1-t^2} dt \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x} \cdot \cos x = \sec x$$

REGRA DE BARROW.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a,b] \\ G \text{ primitiva de } f \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) \equiv (\text{notación}) [G(x)]_a^b$$

Ejemplos

1 $\int_0^2 x^2 dx$

$$\int_0^2 x^2 dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Una primitiva } G(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \\ 2. G(2) = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3} \text{ y } G(0) = \frac{0^3}{3} = 0 \Rightarrow \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3} \\ 3. I = G(2) - G(0) \Rightarrow I = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3} \end{array} \right.$$

2 $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Una primitiva } G(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| \\ 2. G(e) = \ln|e| = \ln e \text{ y } G(1) = \ln 1 = 0 \Rightarrow \int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_1^e = \ln e \\ 3. I = G(e) - G(1) \Rightarrow I = \ln e \end{array} \right.$$

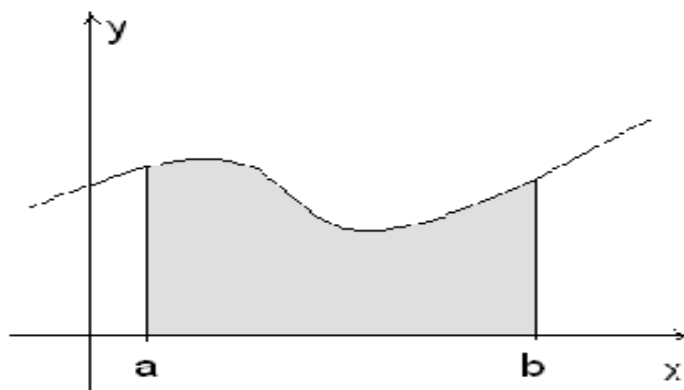
3 $\int_{-2}^3 (3x^2 - 2x + 7) dx$

$$\int_{-2}^3 (3x^2 - 2x + 7) dx = [x^3 - x^2 + 7x]_{-2}^3 = (3^3 - 3^2 + 7 \cdot 3) - [(-2)^3 - (-2)^2 + 7 \cdot (-2)] = 39 + 26 = 65$$

ÁREAS DE RECINTOS PLANOS

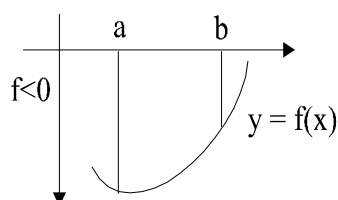
1º CASO: Rexión limitada pola gráfica dunha función f continua e non negativa en $[a,b]$, o eixo horizontal e as rectas $x=a$ e $x=b$

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

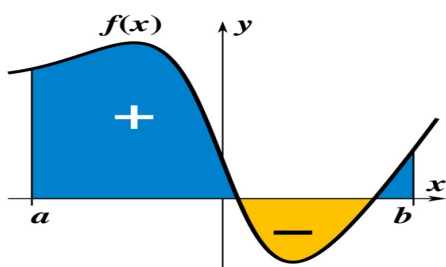


2º CASO: Rexión limitada pola gráfica dunha función f continua e negativa en $[a,b]$, o eixo horizontal e as rectas $x=a$ e $x=b$

$$S = - \int_a^b f(x) dx$$



3º CASO: Rexión limitada pola gráfica dunha función f continua en $[a,b]$, o eixo horizontal e as rectas $x=a$ e $x=b$



$$S = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

En xeral:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

4º CASO: Rexión limitada polas gráficas de dúas funcións, f e g , continuas e non negativas en $[a,b]$

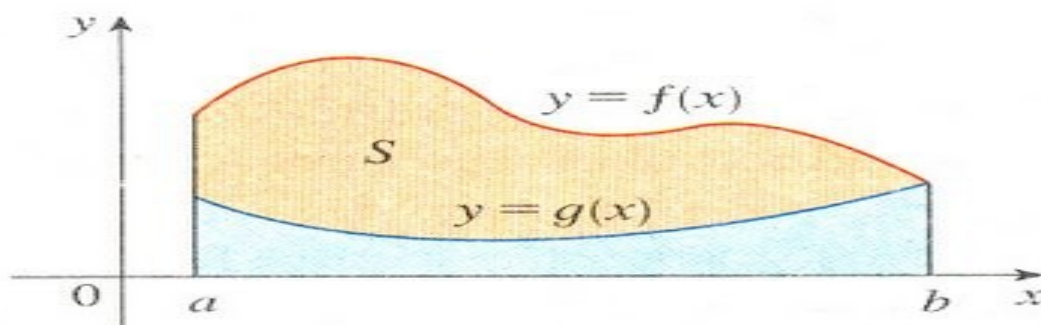
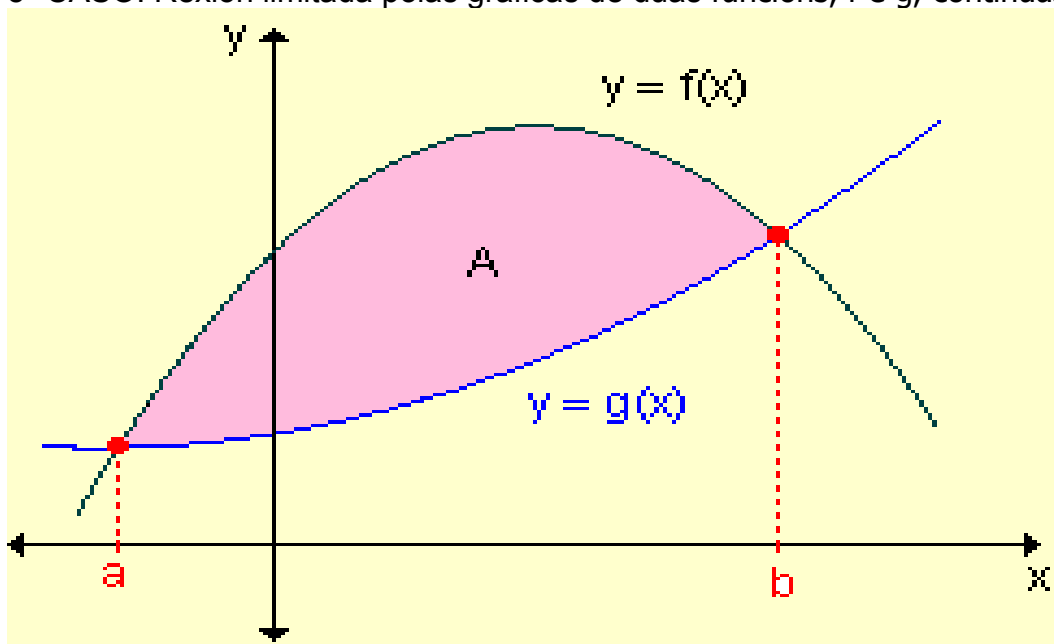


FIGURA 3

$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

5º CASO: Rexión limitada polas gráficas de dúas funcións, f e g , continuas



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

sendo a e b os puntos de corte