

TEMA 1: FUNCIÓNS. LÍMITES E CONTINUIDADE

Conceptos preliminares

Unha **función** é unha relación entre dúas magnitudes, de tal maneira que a cada valor da primeira lle asigna un único valor da segunda.

Se A e B son dous conxuntos, que chamaremos conxunto inicial e conxunto final, respectivamente, unha función, f , de A en B, $f: A \rightarrow B$, relaciona cada elemento de A cun único elemento de B. Se $a \in A$ está relacionado con $b \in B$ se escribe $f(a) = b$ e dise que b é a imaxe de a e que a é a antiimaxe de b .

Chámase **dominio dunha función f** , e se representa por $\text{Dom}(f)$, ó conxunto formado polos elementos de A que teñen imaxe:

$$\text{Dom}(f) = \{x \in A / f(x) \in B\}$$

Un elemento calquera do conxunto $\text{Dom}(f)$ se representa pola letra x e se denomina **variable independente**. Cada elemento x de $\text{Dom}(f)$ ten por imaxe, mediante a función f , un elemento de B que se representa por y i é a **variable dependente**. Isto se expresa escribindo $y = f(x)$.

Chámase **percorrido ou imaxe dunha función**, se representa por $\text{Im } f$, ó conxunto formado polas imaxes dos elementos do dominio

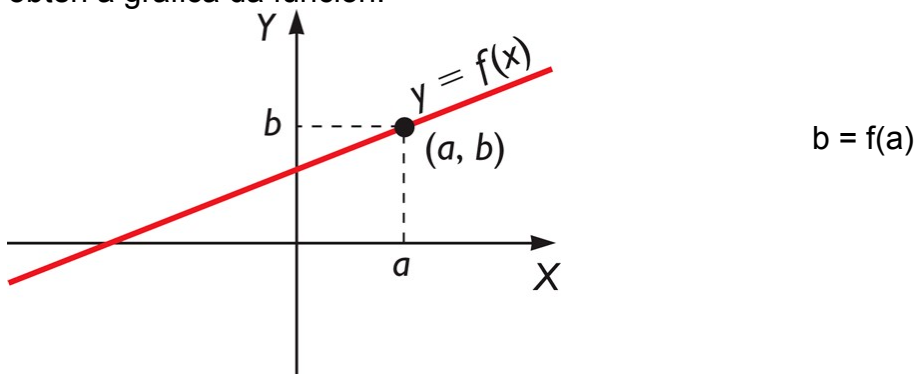
$$\text{Im } f = \{f(x) / x \in \text{Dom}(f)\}$$

Se nunha función o conxunto inicial e conxunto final están formados por números reais, entón se di que é unha **función real de variable real**, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

A representación gráfica dunha función permite visualizar dun modo claro e preciso o seu comportamento. O conxunto dos pares de números (x, y) determinados pola función recibe o nome de *grafo ou gráfica* da función. Para obter os pares basta con dar valores á variable independente x , i obter os correspondentes da variable dependente y , formando así unha táboa de valores da función. Unha vez obtidos os pares de números, se representan nun sistema de eixes cartesianos, que consiste en dous eixes perpendiculares que se cortan nun punto, chamado orixen de coordenadas, e representado por O; o eixe horizontal recibe o nome de *eixe de abscisas*, i nel se representan os valores da variable independente; o eixe vertical recibe o nome de *eixe de ordenadas*, i nel se representan os valores da variable dependente. Cada par de números corresponde a un punto do plano. Unindo todos los puntos, se obtén a gráfica da función.



Funcións elementais

1. Funcións polinómicas: Teñen por expresión alxébrica un polinomio, é dicir:
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

O dominio de calquera función polinómica sempre é $\mathbb{R}$, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Dentro das función polinómicas teñen especial relevancia as funcións lineais e as funcións cuadráticas.

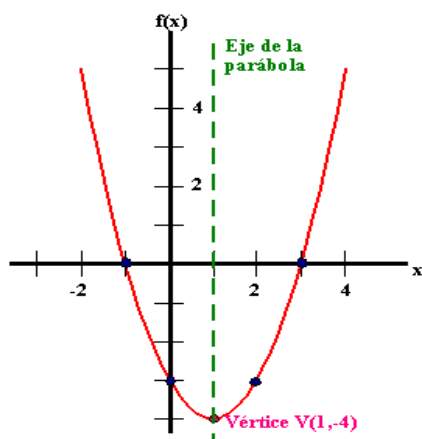
1.1 Función lineal: Ten por expresión $y = f(x) = mx + n$, (en sentido estrico, cando $n \neq 0$, se chamaría función afín)

- A súa gráfica é unha recta, que pola orixe se n é 0
- m é a pendente da recta, tanxente do ángulo que forma a recta coa parte positiva do eixe de abscisas
- n é a ordenada no orixe, é o punto onde a gráfica corta ó eixe de ordenadas
- Se $m = 0$, se reduce a $y = n$, se trata dunha función constante cuxa gráfica é unha recta horizontal
- Dúas rectas que sexan paralelas teñen a mesma pendente
- Se dúas rectas son perpendiculares, as súas pendentes verifican que $m_1 = -1/m_2$
- As rectas verticais, paralelas ó eixe de ordenadas, teñen por ecuación $x = a$, e non son funcións

1.2 Función cuadrática: Ten por expresión un polinomio de segundo grao,
 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

- A súa gráfica é unha parábola con eixe de simetría paralelo ó eixe OY
- Se $a > 0$, a parábola é convexa ("abre hacia arriba") e se $a < 0$ a parábola é cóncava ("abre hacia abaixo")
- Corta ó eixe OX nas solucións da ecuación $ax^2 + bx + c = 0$
- Corta ó eixe OY no punto $(0, c)$
- vértice será o punto $V(V_x, V_y)$, con $V_x = -b/2a$ e para calcular V_y se substitue V_x na expresión da función
- eixe de simetría é a recta $x = -b/2a$

Exemplo: $y = x^2 - 2x - 3$

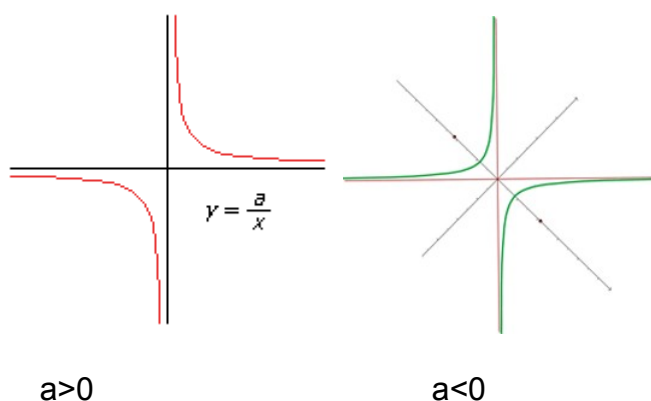


2. Funcións racionais: A súa expresión alxébrica é o cociente de dous polinomios

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

O dominio dunha función racional está formado polos número reais excepto os que anulan o denominador: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{x / Q(x) = 0\}$

Un caso particular destas funcións son as funcións de proporcionalidade inversa, $y=k/x$, cúa gráfica son hipérbolas equiláteras



3. Funcións irracionais: A expresión é $y = f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$

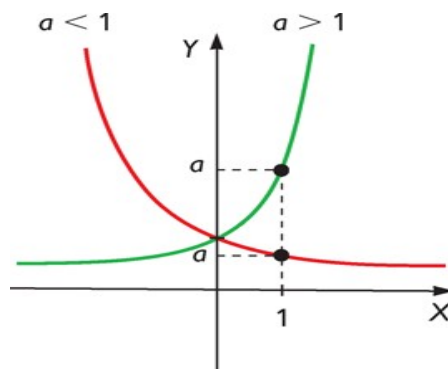
O dominio será:

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ no caso de que n sexa impar

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{x / g(x) < 0\}$ no caso de que n sexa par

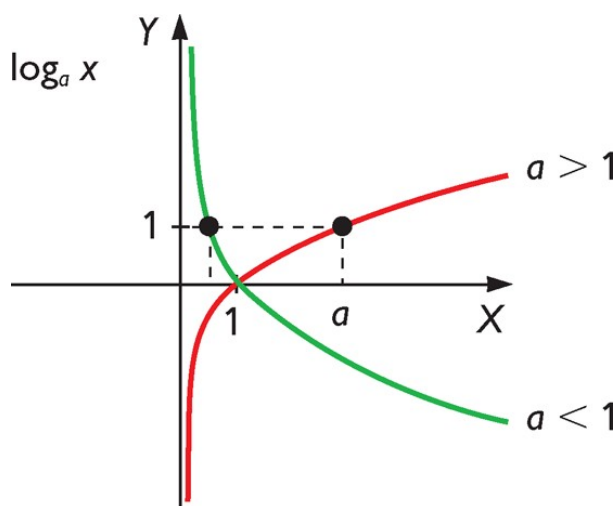
4. Función expoñencial: A expresión é $y = f(x) = a^x$, onde a é positivo e distinto de 1

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^+$, (as imaxes son sempre positivas)
- Se $a > 1$ a función crece a medida que aumenta x
- Se $a < 1$ a función decrece a medida que aumenta x



5. Función logarítmica: A expresión é $y = \log_a x$, onde a é positivo e $a \neq 1$

- $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$, (o logaritmo dos negativos e do 0 non son números reais)
- $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$
- Se $a > 1$ é crecente
- Se $a < 1$ é decrecente
- Corta ó eixe OX no punto $(1,0)$
- A función logarítmica de base a é a función inversa da expoñencial de base a

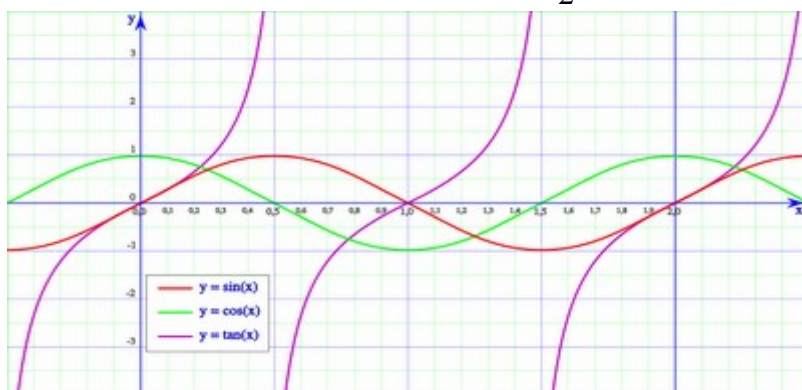


6. Funcións trigonométricas

- Función seno: $y = f(x) = \sin x$
- Función coseno: $y = f(x) = \cos x$
- Función tanxente: $y = f(x) = \tan x$

O dominio das funcións seno e coseno é $\mathbb{R}$

O dominio da función tanxente é $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} \pm k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$



IDEA DO CONCEPTO DE LÍMITE

O concepto de límite dunha función nun punto é un dos máis importantes en matemáticas, serve para responder á pregunta: A que valor se aproxima a variable dependente cando a variable independente se aproxima a un certo valor a ? Por exemplo:

Consideramos a función $y = f(x) = 2x + 1$, queremos saber a que valor se aproxima a variable y cando a variable x se aproxima a 3. Se facemos unhas táboas de valores temos:

$x \rightarrow 3^-$	2.8	2.9	2.99	2.999
$f(x) \rightarrow ?$	6.6	6.8	6.98	6.998

$x \rightarrow 3^+$	3.2	3.1	3.01	3.001
$f(x) \rightarrow ?$	7.4	7.2	7.02	7.002

Da primeira táboa, deducimos que cando nos aproximamos a 3 pola esquerda a función toma valores próximos a 7, isto quere dicir que o límite lateral pola esquerda da función f no punto 3 é 7, e se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 7$$

Da segunda táboa, deducimos que cando nos aproximamos a 3 pola dereita a función toma valores próximos a 7, isto quere dicir que o límite lateral pola dereita da función f no punto 3 é 7, e se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 7$$

Polo tanto, podemos dicir que cando nos aproximamos a 3 a función toma valores próximos a 7, é dicir, o límite da función no punto $x = 3$ é 7

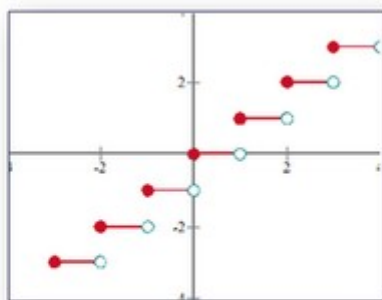
$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7$$

A expresión $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, que se le o límite de $f(x)$ cando x tende a a é b , quere dicir que se x toma valores próximos ao número a entón os correspondentes valores de $f(x)$ se aproximan ao número b .

Evidentemente, para que exista o límite nun punto teñen que existir os límites laterais e ser iguais e o límite dunha función nun punto, se existe, é único

Exemplo: Consideramos a función parte enteira de x , $y = f(x) = E(x)$ (maior dos números enteiros menores ou iguais que x)

$$f(x) = [x]$$



$Domf: \mathbb{R}$
 $Rangf: \mathbb{Z}$

Es una función que a cada número real hace corresponder el número entero inmediatamente inferior.

$x \rightarrow 2^-$	1	1.9	1.99	1.999
$f(x)$	1	1	1	1

$x \rightarrow 2^+$	3	2.1	2.01	2.001
$f(x)$	3	2	2	2

Por tanto: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$ logo non existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

É importante comprender que para que o límite dunha función en $x = a$ sexa b , non fai falta saber o que ocorre exactamente no punto $x = a$ e si o que ocorre ao seu arredor. De feito, unha función pode non estar definida no punto $x = a$ e si ter límite nese punto.

Límites infinitos e límites no infinito

Diremos que o límite dunha función no punto $x = a$ é $+\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, cando os valores da variable independente se achegan ó valor $x = a$ entón os correspondentes valores de $f(x)$ se fan cada vez máis grandes.

Ex: $f(x) = 1/x^2$

$x \rightarrow 0$	0.1	0.01	0.001	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x)$	100	10000	1000000	100	10000	1000000

Polo tanto: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

De forma análoga se define $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, cando os valores da variable independente se achegan ó valor $x = a$ entón os valores correspondentes de $f(x)$ se fan cada vez máis grandes en valor absoluto pero negativos.

Diremos que o límite da función $f(x)$ cando x tende a $+\infty$ é b , $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, se cando os valores da variable independente x se están facendo cada vez maiores entón os correspondentes valores de $f(x)$ se achegan ó valor b

De maneira análoga se definen: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Por exemplo: $f(x) = \frac{x+1}{x}$

$x \rightarrow +\infty$	1	10	100	1000	10000
$f(x)$	2	1.1	1.01	1.001	1.0001

Entón: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

Propiedades dos límites

Sexan f e g dúas funcións tales que: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, entón (sempre que teñan sentido os resultados obtidos) se verifica que:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A + B$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A - B$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$ (siempre que $B \neq 0$)

Operacións con expresións infinitas

$(+\infty) + l = +\infty$ $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ $(-\infty) + l = -\infty$ $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ $-(-\infty) = +\infty$	$(+\infty) \cdot (\pm l) = \pm \infty$ $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$ $(-\infty) \cdot (\pm l) = -\infty$ $(-\infty) + (-\infty) = \mp \infty$
$\frac{l}{\pm \infty} = 0$ $\frac{\pm \infty}{0} = \pm \infty$ $\frac{0}{\pm \infty} = 0$	$(+\infty)^{(+\infty)} = +\infty$ $(+\infty)^{(-\infty)} = 0$ $(+\infty)^{(+l)} = +\infty$ $(+\infty)^{(-l)} = 0$ $l > 1 \quad \begin{cases} l^{(+\infty)} = +\infty \\ l^{(-\infty)} = 0 \end{cases}$ $0 < l < 1 \quad \begin{cases} l^{(+\infty)} = 0 \\ l^{(-\infty)} = +\infty \end{cases}$
Estas igualdades so teñen sentido entendéndoas como límites	

Indeterminacións

$$\frac{a}{0}, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$$

En xeral, para calcular o límite dunha función nun punto, estúdase cara a que valor tenden os valores da función nas proximidades do punto. Se ao substituír o valor de x polo valor ao que tende se obteñen resultados con sentido, estaremos nun caso dun límite determinado e o proceso concluirá; se ao realizar a substitución se obtén algún tipo de indeterminación, estaremos ante un caso indeterminado e deberá manipularse a expresión para conseguir outra expresión equivalente na que as operacións que aparezan teñan sentido.

Vexamos como se poden resolver algúns casos:

1. Para calcular límites cando x tende a $-\infty$, e co fin de evitar confusións de signo, se pode utilizar a seguinte igualdade:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$$

2. Polinomios no infinito: Para calcular o límite no infinito dun polinomio, basta con considerar o termo de maior grao (o resultado será $\pm \infty$ dependendo do signo do coeficiente principal)

3. Racionais no infinito: Neste caso resultará a indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, para desfacela pódese dividir numerador e denominador pola máxima potencia de x que aparece na fracción. O cálculo do límite pode realizarse máis rápido considerando só os termos de maior grao do numerador e denominador, así:

- O resultado será 0, se o grao do denominador é maior
- O resultado será $\pm \infty$, se o grao do denominador é menor (o signo dependerá dos signos dos coeficientes principais)
- O resultado será o cociente dos coeficientes principais, se os graos son iguais

4. Indeterminación $\frac{a}{0}$, con $a \neq 0$. Se calculan os límites laterais e o resultado será $\pm \infty$, se os dous límites laterais dan o mesmo, ou que non existe se os límites laterais non son iguais.

5. Diferenza de expresións infinitas. Cando resulta a expresión $\infty - \infty$ hai ocasións en que se pode operar a expresión e outras en que convén multiplicar e dividir pola expresión conxugada.

6. Indeterminación 1^∞ . Para resolver esta indeterminación utilizaremos a definición do número e :

$$e = \lim_{f(x) \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)} \right)^{f(x)}$$

Transformando a expresión que teñamos podemos chegar a unha expresión dese tipo.

Tamén se pode utilizar a seguinte regra: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot (f(x) - 1)}$

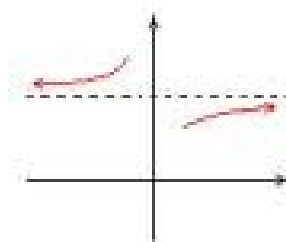
Nota: Os casos de indeterminación resólvense, en xeral, mediante técnicas que se estudan en unidades posteriores (Regra de L'Hopital)

ASÍNTOTAS

As asíntotas dunha función son rectas ás que se aproxima a función cando x tende a un valor real a ou a $\pm \infty$, é dicir, son rectas tales que a distancia entre a gráfica da función e a recta tende a cero cando a distancia ó orixe de coordenadas tende a infinito. Poden ser horizontais, verticais ou oblicuas.

Asíntotas horizontais

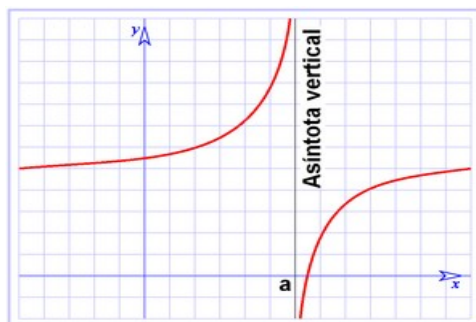
A recta $y = k$ é unha asíntota horizontal da función f se existe algún dos límites seguintes: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = k$



Para saber se a aproximación á asíntota é por arriba ou por abaixo se estudia o signo de $f(x) - k$ cando $x \rightarrow \pm \infty$

Asíntotas verticais

A recta $x = a$ é unha asíntota vertical da función f se existe polo menos algún dos seguintes límites: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty$



A situación da gráfica da función con relación á asíntota se obtén calculando os límites laterais e vendo si valen $+\infty$ ou $-\infty$

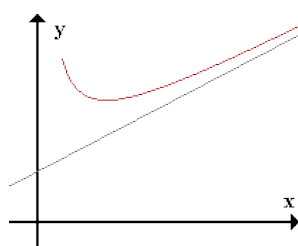
Asíntotas oblicuas

A recta $y = mx + n$ é unha asíntota oblicua da función f se existe algún dos seguintes límites: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - mx - n) = 0$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x}$$

Para calcular m e n :

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - mx)$$



Para saber se a aproximación é por arriba ou por abaixo se estudia o signo de $f(x) - (mx + n)$ cando $x \rightarrow \pm \infty$

Observacións:

- Unha función non pode ter máis de dúas asíntotas horizontais ou oblicuas, é dicir, A.H. + A.O. ≤ 2
- Unha función pode ter infinitas asíntotas verticais
- A gráfica da función pode cortar ás asíntotas horizontais e oblicuas nun ou varios puntos
- Nas funcións racionais simplificadas, as asíntotas verticais se calculan tomando os valores que anulan o denominador
- Para que unha función racional teña asíntotas oblicuas é necesario que o grao do numerador sexa unha unidade maior que o grao do denominador. Neste caso, para calcular a asíntota basta con facer a división enteira

Exercicio: Estudiar as asíntotas e a posición da gráfica respecto delas de:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - 1}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4}$$

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3x + 4}{x}$$

$$f(x) = \frac{2x - 3}{|x - 1|}$$

CONTINUIDADE

A idea de que unha función é continua nun punto $x = a$ cando se pode debuxar sen levantar o lapis do papel ao pasar por ese punto, ou cando é unha función que non presenta saltos nin buracos nese punto, son aproximacións intuitivas ó concepto de continuidade. Estas primeiras aproximacións poden aclarar ideas e facilitar a decisión sobre se unha función cumpre ou non esta propiedade, pero é preciso definir de forma matemática o concepto de continuidade.

Unha función f é continua nun punto $x = a$ do seu dominio se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

A definición implica que se ten que cumprir que:

- Existe límite da función no punto $x = a$
- A función está definida en $x = a$, existe $f(a)$
- Ambos valores son iguais

Cando so exista ou coincida o límite pola dereita, diremos que é continua pola dereita. Analogamente para a esquerda.

Unha función é continua no intervalo (a, b) cando o é en cada un dos seus puntos i é continua no intervalo $[a, b]$ cando o é en (a, b) e ademais é continua pola dereita en $x = a$ e continua pola esquerda en $x = b$

Cando unha función non é continua nun punto diremos que é descontinua nese punto, e podemos distinguir distintos tipos de descontinuidade:

1. Descontinuidade evitable: existe o límite pero non coincide con $f(a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$$

Ex:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si } x \neq 1 \\ 1, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

2. Descontinuidade de 1ª especie ou de salto: Existen os límites laterais, pero non son iguais

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l_2$$

Neste caso se chama salto da función a $|l_1 - l_2|$. Se os dous límites laterais son finitos dise que é unha descontinuidade de salto finito, e se algún deles é infinito, dise que é unha descontinuidade de salto infinito.

$$\text{Ex: } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 1 \\ x + 3 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

3. Descontinuidade de 2ª especie: Cando algún (ou ambos) dos límites laterais non existe

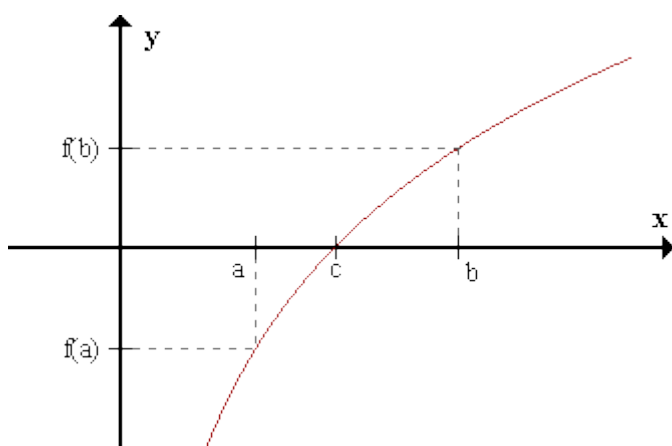
$$\text{Ex: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Propiedades das funcións continuas

1. Se $f(x)$ e $g(x)$ son funcións continuas en $x = a$ entón tamén son continuas en $x = a$ as funcións: $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ e f/g (se $g(a) \neq 0$)
2. A función polinómica, $y = P(x)$, é continua en todo $\mathbb{R}$
3. A función racional, $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, é continua en todo $\mathbb{R}$ excepto os puntos que anulan o denominador
4. A función irracional, $y = \sqrt[n]{P(x)}$, é continua no seu dominio
5. A función exponencial, $y = a^x$, é continua en todo $\mathbb{R}$
6. A función logaritmo, $y = \log_a x$, é continua en $(0, +\infty)$
7. En xeral, as funcións elementais son continuas no seu dominio
8. Se $f(x)$ é continua en $x = a$ e $g(x)$ é continua no punto $f(a)$ entón a función composta $g \circ f$ é continua en $x = a$

Teorema de Bolzano

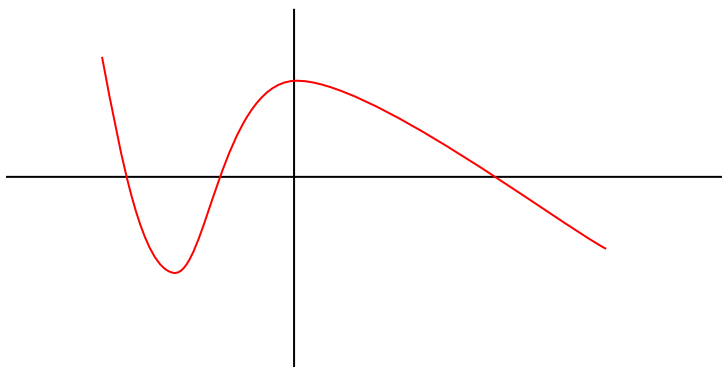
Se f é unha función continua nun intervalo pechado $[a, b]$ e o signo de $f(a)$ é distinto do signo de $f(b)$ entón existe polo menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$



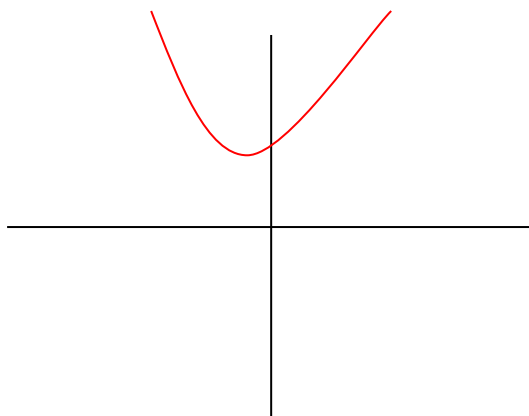
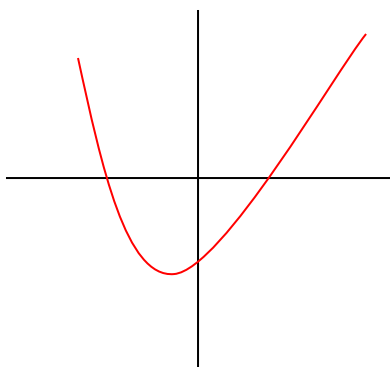
O teorema establece que si os puntos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ dunha función continua están en diferentes lados do eixe OX entón a gráfica da función corta ó eixe OX en polo menos un punto.

Se consideramos a ecuación $f(x) = 0$, con f nas hipóteses de Bolzano, o teorema garantiza a existencia de polo menos unha solución (raíz) da ecuación no intervalo (a, b) .

O teorema de Bolzano garantiza que existe polo menos un punto que cumpre que $f(c) = 0$, pero non di que ese punto sexa único, pode darse o caso no que existan varios puntos de corte da función co eixo OX



Se non se cumpren as hipóteses do teorema de Bolzano entón non podemos afirmar nada, é dicir, non podemos garantir que non existe nin que existe un punto c con $f(c) = 0$



Teorema dos valores intermedios

Sexa f unha función continua no intervalo pechado $[a, b]$ e sexa k un valor comprendido entre $f(a)$ e $f(b)$, entón existe un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$

Teorema de Weierstrass

Sexa f unha función continua no intervalo pechado $[a, b]$ entón f alcanza máximo e mínimo absoluto nese intervalo.

Exercicios:

1) Comproba que as seguintes funcións cortan ó eixo OX i establece un intervalo onde estea incluído un punto de corte

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 7$

b) $f(x) = 2x - \cos x$

c) $f(x) = xe^x - x - 16$

d) $f(x) = \cos x - x + 1$

2) Comproba se a función $f(x) = xe^{-x} + 3$ toma o valor $3/2$ nalgún punto do intervalo $(-1, 0)$

3) Pódese aplicar o teorema de Bolzano á función $f(x) = \tan x$ no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$?

4) Dada a función $f(x) = e^x + 3x \ln(1 + x^2)$ xustifica se podemos asegurar que a súa gráfica corta o eixo OX nalgún punto do intervalo $[-1, 0]$

5) Se unha función é continua e estritamente decrecente en $[a, b]$, onde alcanzará o máximo e mínimo absoluto?

6) A función $f(x) = \frac{4}{x+1}$ verifica que $f(-2) = -4$ e $f(3) = 1$ e non existe un punto do intervalo $[-2, 3]$ onde $f(x)$ se anule. Contradice este feito o teorema de Bolzano?

7) Sexan f e g funcións continuas en $[a, b]$ con $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Xustifica que existe un punto do intervalo $[a, b]$ onde coincide o valor de f e g .

8) Determina os valores de a e b para que a función

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + 2 & \text{se } -3 \leq x < 0 \\ x + b & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{a}{x} & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases} \quad \text{cumpra o teorema de Bolzano en } [-3, 3]$$

9) Comproba se a ecuación $x^3 + x^2 - \cos x - 3 = 0$ ten algunha solución real.