TEMA 5: LA INTEGRAL INDEFINIDA

1.- Integral indefinida. Definiciones

Definición: Dada una función f(x), diremos que la función F(x) es una **función primitiva** de f(x) en el intervalo [a, b], cuando se verifica que:

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in [a,b]$$

* Ejemplo: Dada la función $f(x) = 3x^2$, entonces $F_1(x) = x^3$ es una primitiva de f(x), $F_2(x) = x^3 + 2$ es otra primitiva, $F_3(x) = x^3 - 7$ es otra, ... porque al derivar $F_1(x)$, $F_2(x)$ y $F_3(x)$ se obtiene f(x).

Proposición: Si F(x) es una primitiva de f(x) y C es una constante, entonces F(x) + C también es una primitiva de f(x).

Demostración: La demostración es evidente:

Si F(x) es una primitiva de f(x) $\Rightarrow$ $F'(x) = f(x)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x) \Rightarrow$ $F(x) + C$ es también primitiva de f(x).

Pero también se da la proposición inversa, es decir:

Proposición: Si F(x) y G(x) son dos funciones primitivas de f(x) en [a, b], entonces su diferencia es una constante, es decir $\exists C \in \Re$: F(x) – G(x) = C, siendo C una constante, para todos los puntos de dicho intervalo..

Demostración: Por hipótesis F(x) y G(x) son funciones primitivas, entonces por definición de primitiva se verifica que $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = f(x)$, y en tal caso tenemos que:

$$F'(x) = G'(x) \Rightarrow (F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = 0 \qquad \forall x \in [a,b]$$

Pero ya hemos visto con anterioridad que si una función tiene derivada 0 en todos los puntos de un intervalo entonces dicha función es constante en dicho intervalo, luego existe C constante tal que:

$$F(x) - G(x) = C \quad \forall x \in [a,b]$$

En virtud de los anteriores resultados podremos dar la siguiente definición de integral indefinida:

Definición: Llamaremos **integral indefinida** de una función f(x) al conjunto de todas las primitivas de la función, es decir, dada una función primitiva F(x) de f(x) entonces llamaremos integral indefinida de f(x) al conjunto:

$$\{F(x) + C : C \in \Re\}$$

A dicho conjunto lo representaremos como $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

* Ejemplo: Dada la función $f(x) = 3x^2$, como $F(x) = x^3$ es una primitiva de dicha función, la integral primitiva será el conjunto de todas las funciones que resultan de sumarle un número real a dicha función, es decir:

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C, \quad C \in \Re$$

* *Observación*: Es fundamental tener siempre presente que la integral indefinida de una función es *"un conjunto de funciones"*.

2.- Propiedades de la integral indefinida

a) $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$

b) $\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx \quad \forall\, k \in \Re$

c) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

La demostración de estas propiedades es muy sencilla basándose en las propiedades de las derivadas.

3.- Integrales inmediatas.

La tabla de integrales inmediatas es una consecuencia directa de la tabla de derivadas que ya conocemos puesto que estamos haciendo el proceso inverso.
Las integrales inmediatas que debemos conocer son las siguientes:

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

TIPOS	EJEMPLOS
Tipo potencial $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ $\int f^n \cdot f' \, dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \sqrt{x^3} dx = \int x^{\frac{3}{2}} . dx = \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} = \frac{x^{5/2}}{5/2} = \frac{2\sqrt{x^5}}{5}$ $\int (x^3 - 2)^4 \cdot 3x^2 dx = \frac{(x^3-2)^5}{5}$
Tipo logarítmico $\int \frac{1}{x} dx = L\lvert x\rvert + C$ $\int \frac{f'}{f} dx = L\lvert f\rvert + C$	$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = L(1+e^x)$
Tipo exponencial $\int f'.e^f .dx = e^f + C$ $\int f'.a^f .dx = \frac{a^f}{La} + C$	$\int e^{-2x} dx = \frac{1}{-2} \int (-2) e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}$ $\int 5^x . 9^x .dx = \int 45^x dx = \frac{45^x}{L45}$
Tipo coseno $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$ $\int f'.\operatorname{sen} f .dx = -\cos f + C$	$\int \operatorname{sen} \frac{x}{3} dx = 3 \int \frac{1}{3} . \operatorname{sen} \frac{x}{3} dx = -3 \cos \frac{x}{3}$
Tipo seno $\int \cos x = \operatorname{sen} x + C$ $\int f'.\cos f .dx = \operatorname{sen} f + C$	$\int \cos(2x+5) dx = \frac{1}{2} \int 2.\cos(2x+5) dx = \operatorname{sen}(2x+5)$
Tipo tangente $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$ $\int \frac{f'}{\cos^2 f} dx = \operatorname{tg} f + C$	$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x - 1) dx = \operatorname{tg} x - x$ $\int \frac{x}{\cos^2(5x^2-3)} = \frac{1}{10} \int \frac{10x}{\cos^2(5x^2-3)} = \frac{1}{10} \operatorname{tg}(5x^2-3)$
Tipo cotangente $\int \frac{1}{sen^2 x} dx = -\cot g x + C$ $\int \frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f} dx = -\cot g f + C$	$\int \cot g^2 x dx = \int (1 + \cot g^2 x - 1) dx = -\cot g x - x$ $\int \frac{x}{\operatorname{sen}^2 3x^2} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x}{\operatorname{sen}^2 3x^2} dx = -\frac{1}{6} \cot g 3x^2$
***Tipo* arc sen x (= $-$ *arc* cos$x$)** $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arc \operatorname{sen} x + C$ $\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = arc \operatorname{sen} f + C$	$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x^2$ $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}} dx = \operatorname{arcsen} e^x$
Tipo arco tang.(= -arc cotang.) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arc \operatorname{tg} x + C$ $\int \frac{f'}{1+f^2} dx = arc \operatorname{tg} f + C$	$\int \frac{1}{3+3x^2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x$ $\int \frac{1}{1+9x^2} dx = \int \frac{1}{1+(3x)^2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3}{1+(3x)^2} dx = \frac{1}{3} arc \operatorname{tg}(3x)$

4.- Métodos de integración.

En este apartado vamos a ver los siguientes métodos:

- Integrales que se simplifican previamente o que se descomponen.
- Integrales que se transforman en inmediatas.
- Integración por sustitución o cambio de variable
- Integración por partes
- Integración de funciones racionales

4.1.- Integrales que se simplifican previamente o se descomponen

Algunas veces, antes de realizar la integral correspondiente, se procede a simplificar la expresión por si de esa forma se puede integrar mejor. Posteriormente, haciendo uso de las propiedades de las integrales, se descomponen en otras más sencillas, transformándose en una simple suma de integrales más elementales. Veamos algunos ejemplos:

$$\int (x^2 - 1)^2 dx$$

Solución:

Desarrollando por la fórmula del cuadrado de un binomio: $(x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$

Así,

$$\int (x^2 - 1)^2 dx = \int x^4 - 2x^2 + 1 dx = \int x^4 dx - 2\int x^2 dx + \int dx = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x + C$$

$$\int \frac{2x^3 - 7x^2 - 4}{x^2} dx =$$

Solución:

Descomponiendo la fracción en suma de fracciones:

$$\frac{2x^3 - 7x^2 - 4}{x^2} = \frac{2x^3}{x^2} - \frac{7x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} = 2x - 7 - 4x^{-2}$$

Por tanto,

$$\int \frac{2x^3 - 7x^2 - 4}{x^2} dx = \int 2x - 7 - 4x^{-2} dx = 2\int x dx - \int 7 dx - 4\int x^{-2} dx =$$

$$= 2\frac{x^2}{2} - 7x - 4\frac{x^{-1}}{-1} + C = x^2 - 7x + \frac{4}{x} + C$$

$$\int \frac{2\sqrt{x^3} - 7\sqrt[3]{x^5} - 4x}{3\sqrt[5]{x^2}}\,dx =$$

<u>*Solución:*</u>

Transformando las raíces en potencia, descomponiendo en suma de fracciones y simplificando, tenemos:

$$\frac{2\sqrt{x^3} - 7\sqrt[3]{x^5} - 4x}{3\sqrt[5]{x^2}} = \frac{2x^{3/2} - 7x^{5/3} - 4x}{3x^{2/5}} = \frac{2x^{3/2}}{3x^{2/5}} - \frac{7x^{5/3}}{3x^{2/5}} - \frac{4x}{3x^{2/5}} = \frac{2x^{11/10}}{3} - \frac{7x^{19/15}}{3} - \frac{4x^{3/5}}{3}$$

Por lo que la integral nos queda:

$$\int \frac{2\sqrt{x^3} - 7\sqrt[3]{x^5} - 4x}{3\sqrt[5]{x^2}}\,dx = \int \frac{2x^{11/10}}{3} - \frac{7x^{19/15}}{3} - \frac{4x^{3/5}}{3}\,dx = \int \frac{2x^{11/10}}{3}dx - \int \frac{7x^{19/15}}{3}dx - \int \frac{4x^{3/5}}{3}dx =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{x^{21/10}}{21/10} - \frac{7}{3}\frac{x^{34/15}}{34/15} - \frac{4}{3}\frac{x^{8/5}}{8/5} + C = \frac{20}{63}x^{21/10} - \frac{105}{102}x^{34/15} - \frac{5}{6}x^{8/5} + C$$

$$\int \frac{4ctgx\cdot sen^2x}{\cos x\cdot \sec x}\,dx =$$

<u>*Solución:*</u>

Si expresamos las razones trigonométricas en razones simples, nos quedará:

$$\int \frac{4ctgx\cdot sen^2x}{\cos x\cdot \sec x}\,dx = \int \frac{4\frac{\cos x}{senx}\cdot sen^2x}{\cos x\cdot\frac{1}{\cos x}}dx = \int 4\cos x\cdot senxdx =$$ y preparando un poco la cosa:

$$\int 4\cos x\cdot senxdx = \int 2\cdot 2\cos x\cdot senxdx = \int 2sen(2x)dx$$ (porque sen(2x)=2senx·cosx)

Así pues:

$$\int \frac{4ctgx\cdot sen^2x}{\cos x\cdot \sec x}\,dx = \int 4\cos x\cdot senxdx = \int 2sen(2x)dx = -\cos(2x) + C$$

4.2.- Integrales que se transforman en inmediatas

Aunque parezca que son difíciles de realizar y que requieren un método laborioso, hay integrales que se pueden resolver mediante el uso de la tabla de integrales inmediatas sin más que introducir algunos cambios o modificaciones. Veamos algunos ejemplos:

$$\int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} = \frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{4x^4} + C$$

$\int \frac{senx - \cos x}{senx + \cos x}dx = -\int \frac{\cos x - senx}{senx + \cos x}dx = -L|senx + \cos x| + C$ basta aplicar $\int \frac{f'}{f}dx = L|f|$

$\int \frac{e^{arcsenx}}{\sqrt{1-x^2}}.dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.e^{arcsenx}.dx = e^{arcsenx} + C$ basta aplicar $\int f'.e^f.dx = e^f$

$\int \sec^2(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int 2.\sec^2(2x+1)dx = \frac{1}{2}tg(2x+1) + C$ basta aplicar $\int \frac{f'}{\cos^2 f}dx = \operatorname{tg} f$

$\int \sec^2\frac{x}{3}dx = 3\int \frac{1}{3}.\sec^2\frac{x}{3}dx = 3tg\frac{x}{3} + C$ basta aplicar $\int \frac{f'}{\cos^2 f}dx = \operatorname{tg} f$

$\int \frac{2^x}{1+4^x}dx = \frac{1}{L2}\int \frac{2^x.L2}{1+(2^x)^2}dx = \frac{1}{L2}arctg2^x + C$ basta aplicar $\int \frac{f'}{1+f^2}dx = arc\operatorname{tg} f$

$\int \frac{1}{\operatorname{tg} x}dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}dx = L|\operatorname{sen} x| + C$ basta aplicar $\int \frac{f'}{f}dx = L|f|$

$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}L(x^2+1) + C$ basta aplicar $\int \frac{f'}{f}dx = L|f|$ (observa que aunque es racional, se hace de forma inmediata)

$\int \frac{xdx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}artg\,x^2 + C$ basta aplicar $\int \frac{f'}{1+f^2}dx = arc\operatorname{tg} f$ (observa que aunque es racional, se hace de forma inmediata)

4.3.- Integración por sustitución o cambio de variable

El método de integración por sustitución o cambio de variable consiste en transformar la integral dada, mediante un cambio de variable en otra inmediata o más sencilla de integrar.

Dada la integral $\int f(x)\,dx$, si hacemos el cambio de variable x = g(t), entonces tenemos que:

$$x = g(t) \quad \text{y} \quad dx = g'(t)dt \quad (derivando)$$

por lo que la integral inicial queda transformada en $\boxed{\int f(x)dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)dt}$

Ejemplos:

a) $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx$

Solución:

Hacemos el cambio $x^2 + x + 1 = t \Rightarrow (2x+1)dx = dt$

Sustituyendo en la integral resulta:

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+x+1} + C$$

b) $\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$

Solución:

Hacemos el cambio $1 + x^3 = t^2 \Rightarrow 3x^2dx = 2tdt$

Despejamos en forma adecuada: $x^2dx = \frac{2tdt}{3}$ y ahora sustituimos:

$$\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx = \int \sqrt{1+x^3}.x^2dx = \int \sqrt{t^2}.\frac{2tdt}{3} = \frac{2}{3}\int t^2dt = \frac{2}{3}\frac{t^3}{3} = \frac{2\sqrt{(1+x^3)^3}}{9}$$

(ya que del cambio $1+x^3 = t^2$ se deduce que $\sqrt{1+x^3} = t$)

c) $\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$

Solución:

Hacemos el cambio $\sqrt{x-1} = t$ o también, elevando al cuadrado, $x-1 = t^2$

Diferenciando la igualdad anterior, dx = 2t.dt

Por otra parte, de $x-1 = t^2$ resulta $x = 1+t^2$

Sustituyendo resulta:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{1}{(1+t^2).t}.2tdt = 2\int \frac{1}{1+t^2}dt =$$
$$= 2arctgt = 2arctg\sqrt{x-1} + C$$

d) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x dx$

Solución:

El cambio que podemos realizar es el siguiente: senx=t (Por ser impar en cosx)

De dicho cambio resulta: cosxdx=dt y sustituyendo en la integral propuesta obtenemos:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x dx = \int \operatorname{sen}^2 x.\cos^2 x.\cos x dx = \int t^2(1-t^2)dt =$$
$$=\int (t^2 - t^4)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C$$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx$

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2$$
$$dx = 2tdt$$
$$\int \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}2tdt = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = 2\operatorname{arcsen} t = 2\operatorname{arcsen}\sqrt{x}$$

4.4.- Método de integración por partes.

El método de integración por partes consiste en transformar la integral dada, mediante una transformación básica en la diferencial del producto, en otra integral inmediata o más sencilla que la de partida.

Dicho método sólo se aplicará cuando los restantes métodos (en nuestro caso, el de sustitución) no nos solucione nuestra integral. La integración por partes se basa en la conocida fórmula:

$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$, donde u(x) y v(x) son dos funciones diferenciables.

(Nota: La cuestión está en que a una expresión de la integral debemos llamarle u y a otra debemos llamarle dv y a partir de ellas debemos recuperar du, mediante derivación, y también v, mediante integración.)

* Demostración: Sean u(x) y v(x) dos funciones diferenciables cualesquiera, entonces:

d(u·v) = du·v + u·dv

Despejando: u·dv = d(u·v) – v·du

Integrando a ambos lados y teniendo en cuenta que la integral de la derivada de una función es la misma función tenemos que:

$\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du = u \cdot v - \int v \cdot du$ es decir, $\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$

Ejemplos:

a) I=$\int x \cdot e^x dx$

Solución:

Para realizar la integral pedida, a una expresión debemos llamarle u y a otra debemos llamarle dv y a partir de ellas debemos recuperar du y también v.

Llamamos / Obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^x.dx \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{derivando}} \\ \xrightarrow[\text{integrando}]{} \end{array} \begin{array}{l} du = dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{array}$$

Con estos datos podemos empezar a aplicar la fórmula de integración por partes

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

I=$\int x \cdot e^x dx = xe^x - \int e^x dx$ y simplificando, llegamos a la conclusión:

$$I = \int x \cdot e^x dx = xe^x - e^x + C$$

b) I=$\int arc\,\mathrm{tg}\, x dx$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} u = arc\,\mathrm{tg}\, x \\ dv = dx \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} du = \dfrac{1}{1+x^2} dx \\ v = x \end{array}$$

Donde **u** lo hemos derivado para obtener **du** y **dv** lo hemos integrado para hallar **v**.

Aplicando la fórmula que hemos indicado anteriormente, $I = x.\mathrm{arctg}\, x - \int x.\dfrac{1}{1+x^2} dx$

La integral resultante es de tipo logarítmico:

$$I = x.\mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx = x.\mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2} L(1+x^2) + \mathrm{C}$$

c) $\mathbf{I}=\int x^2 \operatorname{sen} x dx$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \operatorname{sen} x dx \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} du = 2xdx \\ v = \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x \end{array}$$

I$=-x^2\cos x+\int 2x\cos x dx$. (*) A veces hay que repetir la integración por partes como en este caso:

$$\left.\begin{array}{l} u = 2x \\ dv = \cos x dx \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} du = 2dx \\ v = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x \end{array}$$

$$\int 2x\cos x dx = 2x\operatorname{sen} x - \int 2\operatorname{sen} x dx = 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x$$

Y volviendo a la expresión (*) obtenemos el resultado final:

$$I = -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + C$$

Tipos de integrales que se resuelven por partes:

$\int x^n \cdot e^x dx$	$u = x^n$	$dv = e^x dx$
$\int x^n \cdot senxdx$	$u = x^n$	$dv = senxdx$
$\int x^n \cdot \cos xdx$	$u = x^n$	$dv = \cos xdx$
$\int x^n \cdot lnxdx$	$u = \ln x$	$dv = x^n dx$
$\int arctgxdx$	$u = arctgx$	$dv = dx$
$\int arcsenxdx$	$u = arcsenx$	$dv = dx$
$\int arccoxxdx$	$u = \arccos x$	$dv = dx$

4.5 Método de integración de funciones racionales.

Observación previa: Ya hemos visto cómo se integraban algunas de estas funciones, las del tipo arcotangente y las del tipo logaritmo (es decir, cuando el numerador era un múltiplo de la derivada del denominador), pero como es evidente éstas suponen sólo una pequeña parte de las funciones racionales que nos podemos encontrar. Así, en este apartado, vamos a ampliar un poco el número de las funciones racionales que podamos integrar (aunque sólo un 'poco', pues el número de ellas que quedarán fuera de nuestro alcance será todavía inmenso), por ser estas funciones bastante frecuentes. Debemos tener presente que existen muchos otros métodos de integración para otros tipos de funciones, pero que no podemos ver por lo limitado del tiempo o porque no entran dentro de nuestras necesidades.

Una vez dicho esto, comentaremos que el método de integración de funciones racionales está basado en la descomposición de la fracción en suma de fracciones más sencillas. Además, vamos a suponer que el grado del numerador es menor que el grado del denominador, pues en caso contrario, se hace la división y después se integra el cociente más el resto partido por el divisor, es decir, si $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ donde el grado de p(x) es igual o mayor que el de q(x), entonces, dividiremos p(x) entre q(x), obteniendo un cociente c(x) y un resto r(x)

p(x)=q(x).c(x)+r(x) de donde

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{q(x)c(x)+r(x)}{q(x)} = c(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$$

Por tanto,

$\int \frac{p(x)}{q(x)} = \int c(x)+\frac{r(x)}{q(x)}dx = \int c(x)dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}dx$ donde c(x) es un polinomio, y por tanto se integra fácilmente, y r(x) ya tiene grado menor que q(x), que es el verdadero problema.

Por tanto, vamos a integrar $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ **pero suponiendo que el grado del numerador es menor que el grado del denominador** y además, nos limitaremos a las funciones racionales cuyo denominador tiene raíces reales, es decir que se puede descomponer en factores de grado 1. (no veremos el caso en el que el denominador tenga raíces imaginarias)

Para ello vamos a distinguir los siguientes casos:

4.5.1.- Integración de funciones racionales sólo con raíces simples en el denominador:
4.5.2.- Integración de funciones racionales con raíces múltiples en el denominador:
4.5.3.- Integración de funciones racionales con raíces simples y múltiples en el denominador:
4.5.4.- Integración de funciones racionales con raíces complejas simples

4.5.1.- <u>Integración de funciones racionales sólo con raíces simples en el denominador:</u>

Vamos a suponer que al hacer la descomposición de Q(x) en factores primos (Ruffini), obtenemos lo siguiente:

$$Q(x) = k\cdot(x - a_1)\cdot(x - a_2)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot(x - a_n)$$

El número k que aparece al principio será igual al coeficiente del término de mayor grado, que vamos a suponer que es 1 para simplificar (en caso contrario sólo hay que sacar dicho número fuera de la integral).

Una vez factorizado el denominador, el método consiste en descomponer la función racional en otras funciones racionales más simples que podremos integrar fácilmente. El proceso el es siguiente (para simplificar vamos a hacerlo suponiendo que el denominador tiene grado 3, aunque se haría igual sea el grado que sea):

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot(x-a_3)} = \frac{A}{(x-a_1)} + \frac{B}{(x-a_2)} + \frac{C}{(x-a_3)}$$

Ahora debemos hallar los valores de A, B y C, para lo que sumaremos las tres fracciones e igualaremos coeficiente a coeficiente el numerador de esa suma con P(x):

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A\cdot(x-a_2)\cdot(x-a_3)+B\cdot(x-a_1)\cdot(x-a_3)+C\cdot(x-a_1)\cdot(x-a_2)}{(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot(x-a_3)}$$

Ejemplo:

$$\int \frac{4x^2+8x+6}{x^3+2x^2-x-2}\,dx$$

En primer lugar vamos a descomponer el denominador por Ruffini:

	1	2	-1	-2
1		1	3	2
	1	3	2	0
-1		-1	-2	
	1	2	0	
-2		-2		
	1	0		

Así pues, $x^3+2x^2-x-2=(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$. Siguiendo entonces lo visto anteriormente, tenemos que:

$$\frac{4x^2+8x+6}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}=\frac{A\cdot(x+1)\cdot(x+2)+B(x-1)\cdot(x+2)+C\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)}$$

Como los denominadores son iguales, entonces los numeradores también deben serlo:

$$4x^2+8x+6=A\cdot(x+1)\cdot(x+2)+B(x-1)\cdot(x+2)+C\cdot(x-1)\cdot(x+1)$$

Y dando valores a x (preferentemente, las raíces del denominador), hallamos los valores A, B y C

Si x = 1 ⇒ 18 = A·2·3 ⇒ A = 3

Si x = -1 ⇒ 2 = B·(-2)·1 ⇒ B = -1

Si x = -2 ⇒ 6 = C·(-3)·(-1) ⇒ C = 2

Es decir, hemos conseguido expresar $\frac{4x^2+8x+6}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{3}{x-1}+\frac{-1}{x+1}+\frac{2}{x+2}$

Para terminar, basta integrar cada uno de esos sumandos:

$$\int \frac{4x^2+8x+6}{x^3+2x^2-x-2}dx=\int\frac{3}{x-1}dx+\int\frac{-1}{x+1}dx+\int\frac{2}{x+2}dx= 3\cdot Ln|x-1|-Ln|x+1|+2\cdot Ln|x+2|+C$$

$$=Ln\left|\frac{(x-1)^3\cdot(x+2)}{(x+1)}\right|+C$$

4.5.2.- <u>Integración de funciones racionales con raíces múltiples en el denominador:</u>

En las mismas condiciones del apartado anterior, vamos a suponer ahora que el denominador descompone de la siguiente forma:

$$Q(x) = (x - a)^n$$

Para simplificar la explicación del método vamos a suponer también que n = 3, de donde habrá que generalizarlo a cualquier potencia. En ese caso la descomposición en este caso será la siguiente:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^3} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)^3}$$

A partir de aquí el método es exactamente igual que es anterior.

Ejemplo:

$$\int \frac{2x-1}{x^3-3x^2+3x-1}dx$$

Siguiendo lo anterior vamos a descomponer en fracciones más simples, teniendo en cuenta que al descomponer el denominador obtenemos que:

$$x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$$

$$\frac{2x-1}{x^3-3x^2+3x-1} = \frac{2x-1}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} = \frac{A\cdot(x-1)^2 + B\cdot(x-1) + C}{(x-1)^3}$$

De ahí, igualando los numeradores, tenemos que:

$$2x-1 = A\cdot(x-1)^2 + B\cdot(x-1) + C = A\cdot x^2 + (-2\cdot A + B)\cdot x + (A - B + C)$$

Igualando coeficiente a coeficiente tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} A=0 \\ -2\cdot A+B=2 \\ A-B+C=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A=0 \\ B=2 \\ C=1 \end{array}\right\}$$

Esta forma empleada para calcular los coeficientes difiere de la empleada anteriormente, aunque podemos calcularlos también de aquella forma sustituyendo tres valores cualquiera arriba (recomendable siempre sustituir el valor de la raíz que nos da el valor de C directamente).

Una vez hecha la descomposición, rematamos:

$$\int \frac{2x-1}{x^3-3x^2+3x-1}dx = \int \frac{2}{(x-1)^2}dx + \int \frac{1}{(x-1)^3}dx = -2\cdot(x-1)^{-1} + \frac{(x-1)^{-2}}{-2} + C$$

4.5.3.- Integración de funciones racionales con raíces simples y múltiples en el denominador:

Por último, vamos a suponer que el denominador tiene tanto raíces simples como múltiples. Por ejemplo un denominador del tipo:

$$Q(x) = (x - a_1)\cdot(x - a_2)\cdot(x - a_3)^3$$

Combinando los dos métodos anteriores, la descomposición se haría de la siguiente forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot(x-a_3)^3} = \frac{A}{(x-a_1)} + \frac{B}{(x-a_2)} + \frac{C}{(x-a_3)} + \frac{D}{(x-a_3)^2} + \frac{E}{(x-a_3)^3}$$

A partir de ahí procederíamos de la misma forma que antes.

Ejemplo

$$\int \frac{3x^2+6x+2}{x^3+4x^2+5x+2}dx$$

Siguiendo igual que antes, vamos a descomponer en fracciones más simples, teniendo en cuenta que al descomponer el denominador obtenemos que:

$$x^3+4x^2+5x+2=(x+2)(x+1)^2$$

$$\frac{3x^2+6x+2}{x^3+4x^2+5x+2}=\frac{3x^2+6x+2}{(x+2)(x+1)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{A\cdot(x+1)^2+B\cdot(x+2)(x+1)+C(x+2)}{(x+2)(x+1)^2}$$

De ahí, igualando los numeradores, tenemos que:

$$3x^2+6x+2=A\cdot(x+1)^2+B\cdot(x+2)(x+1)+C(x+2)$$

Y dando tres valores a x (preferentemente, las raíces del denominador), hallamos A, B y C

Si x = -1 $\Rightarrow$ -1 = C $\Rightarrow$ C = -1

Si x = -2 $\Rightarrow$ 2 = A $\Rightarrow$ A = 2

Si x = 0 $\Rightarrow$ 2 = A+2B+2C $\Rightarrow$ B = 1

Es decir, hemos conseguido expresar $\frac{3x^2+6x+2}{x^3+4x^2+5x+2}=\frac{2}{x+2}+\frac{1}{(x+1)}+\frac{-1}{(x+1)^2}$

Por lo que:

$$\int \frac{3x^2+6x+2}{x^3+4x^2+5x+2}dx=\int \frac{2}{x+2}dx+\int \frac{1}{(x+1)}dx-\int \frac{1}{(x+1)^2}dx=$$

$$=2\cdot Ln|x+2|+Ln|x+1|-\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+C=2\cdot Ln|x+2|+Ln|x+1|+\frac{1}{(x+1)}+C$$

4.5.4.- Integración de funciones racionales con raíces complejas simples en el denominador:

Vamos a suponer que al hacer la descomposición de Q(x) obtenemos:

$$Q(x)=(x-d_1).(x-d_2)....(x-d_k).(ax^2+bx+c)$$

Entonces:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-d_1)}+\frac{A_2}{(x-d_2)}+..............+\frac{A_k}{(x-d_k)}+\frac{B_1+B_2x}{ax^2+bx+c}$$

Las primeras fracciones on de los tipos ya vistos y faltaría ver como se integra la última fracción, que se suelen denominar del tipo neperiano-arcotangente.

· Calculo de una primitiva $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}$. Donde ax^2+bx+c no tiene raíces reales.Tipo arctg().

La técnica es hacer cambios de variable para aplicar la primitiva de arctg(x).
Un ejemplo:

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = 4\int \frac{1}{4x^2+4x+4}dx = 4\int \frac{1}{(2x+1)^2+4-1}dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \ldots$$ Hacemos el cambio esperado:

$$\left\{\begin{matrix} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} = t \\ \frac{2}{\sqrt{3}}dx = dt \end{matrix}\right\}$$,obtenemos: $= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{2}{\sqrt{3}}arctg(t)+c = \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$

En general:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = 4a\int \frac{1}{4a^2x^2+4abx+4ac}dx = 4a\int \frac{1}{(2ax+b)^2+4ac-b^2}dx =$$

$$= \frac{4a}{(4ac-b^2)}\int \frac{1}{(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}})^2+1} = \ldots$$ Hacemos el cambio esperado:

$$\left\{\begin{matrix} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} = t \\ \frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}dx = dt \end{matrix}\right\}$$, obtenemos: $\ldots = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}arctg(t)+c =$

$$\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}arctg(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}})+c$$

· Calculo de una primitiva β: $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}$. Tipo log-arctg(). Donde ax^2+bx+c no tiene raíces reales.

La técnica es descomponer la primitiva en dos según su numerador y hacer cambios de variable para aplicar la primitiva del arctg(x) en una de ellas y el logaritmo neperiano en la otra.

Un ejemplo:

$$\int \frac{x+4}{x^2+1} = \left\{\begin{matrix} x^2+1 = t \\ 2xdx = dt \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+8}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{8}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt + 4\int \frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$\frac{1}{2}\ln(t)+4arctg(x)+C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+4arctg(x)+C.$$

En general:

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = m\int \frac{x+\frac{n}{m}}{ax^2+bx+c}dx = \frac{m}{2a}\int \frac{2ax+\frac{2an}{m}+b-b}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$\frac{m}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\frac{m}{2a}\int\frac{\frac{2an}{m}-b}{ax^2+bx+c}=\frac{m}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\frac{m}{2a}\int\frac{\frac{2an}{m}-b}{ax^2+bx+c}dx=$$

$$\frac{m}{2a}\ln(ax^2bx+c)+\frac{m}{2a}\int\frac{\frac{2an}{m}-b}{ax^2+bx+c}dx.$$

Donde esta última primitiva es de las de tipo arco- tangente estudiadas en el caso anterior.