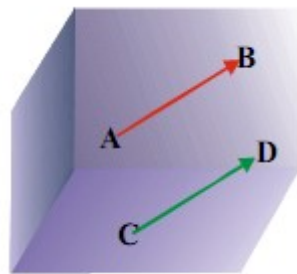


XEOMETRÍA NO ESPAZO

Vectores fixos

Dos puntos do espazo, A e B, determinan o vector fixo $\vec{AB}$, sendo o punto A a orixe e o punto B o extremo, é dicir, un vector no espazo é calquera segmento orientado que ten a súa orixe nun punto e o seu extremo noutro.



- **Módulo** do vector fixo $\vec{AB}$ é a lonxitude do segmento AB. Denótase por $|\vec{AB}|$
- **Dirección** do vector fixo $\vec{AB}$ é a da recta que pasa polos puntos A e B (ou dunha paralela).
- **Sentido** do vector fixo $\vec{AB}$ é o sentido do recorrido da recta dirección desde A ata B.
- Se dun vector se coñecen a orixe, o módulo, a dirección e o sentido, este está perfectamente determinado no espazo.
- Vector nulo é aquel para o cal coinciden a orixe e o extremo. Un vector nulo ten de módulo cero.
- Vector oposto de $\vec{AB}$ é o vector de orixe B e extremo A

Vectores libres

Se dous vectores fixos teñen igual módulo, dirección e sentido dise que son equipolentes. A relación de equipolencia clasifica os vectores fixos do espazo en clases de equivalencia, $[\vec{AB}]$. Chámase vector libre do espazo a cada unha das clases de vectores fixos do espazo que sexan equipolentes entre si.

- Representase por $\vec{u}$ a un vector fixo representante da clase $[\vec{AB}]$ (pode ser calquera da clase).
- O vector libre nulo, $\vec{0}$, é o representante da clase de todos os vectores fixos nulos.
- O vector $-\vec{u}$ é o vector oposto de $\vec{u}$
- Módulo de $\vec{u}$, $|\vec{u}|$, é o módulo de calquera dos seus representantes

- A dirección é o sentido dun vector libre veñen dados pola dirección e o módulo de calquera dos seus representantes.

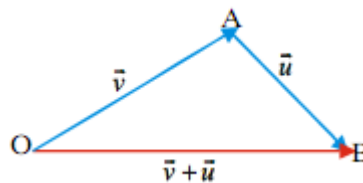
Para un vector libre $\vec{u}$ e un punto calquera do espazo P , sempre é posible considerar un representante de $\vec{u}$ con orixe en P . Ademais este representante é único.

O conxunto de vectores libres do espazo o representaremos por V^3

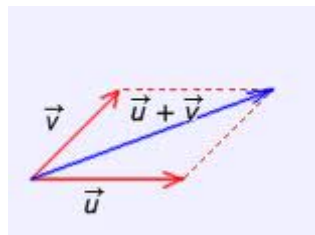
Operacións con vectores

Suma de vectores

Dados os vectores libres $\vec{v}$ (con representante de extremos OA) e $\vec{u}$ (con representante de extremos AB) defínese o vector suma, $\vec{v} + \vec{u}$, como o vector libre que ten como representante o vector de extremos OB.



Outra forma de sumar vectores é usar a regra do paralelogramo: represéntanse os dous vectores coa mesma orixe, nesta situación o vector suma é a diagonal do paralelogramo cuxos lados son os dous vectores

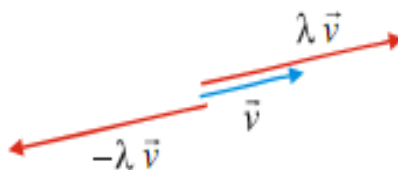


Propiedades:

- i) Asociativa: $(\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$, $\forall \vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in V^3$
- ii) Conmutativa: $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$, $\forall \vec{v}, \vec{u} \in V^3$
- iii) Elemento neutro: É o vector nulo, $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v}$, $\forall \vec{v} \in V^3$
- iv) Elemento oposto: o oposto de $\vec{v}$ é $-\vec{v}$, $\vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$; $\forall \vec{v} \in V^3$

Produto dun número real por un vector

Dado o vector libre $\vec{v}$ (con representante de extremos AB) e o número real λ , defínese o vector produto $\lambda \vec{v}$ como o vector libre que ten a mesma dirección que $\vec{v}$, o mesmo sentido que $\vec{v}$ se $\lambda > 0$ e sentido contrario se $\lambda < 0$, e o módulo é $|\lambda| \cdot |\vec{v}|$ (valor absoluto de λ por módulo de $\vec{v}$)

**Propiedades:**

- i) $\lambda \vec{0} = \vec{0}, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$
- ii) $(\lambda + \mu) \vec{v} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{v}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in V^3$
- iii) $\lambda (\vec{v} + \vec{u}) = \lambda \vec{v} + \lambda \vec{u}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{v}, \vec{u} \in V^3$
- iv) $\lambda (\mu \vec{v}) = (\lambda \mu) \vec{v}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in V^3$
- v) $1 \vec{v} = \vec{v}, \forall \vec{v} \in V^3$

Dependencia e independencia lineal de vectores

- En V^3 dous vectores son linealmente independentes se teñen distinta dirección.
 $\vec{v}$ e $\vec{u}$ son linealmente dependentes $\Leftrightarrow \vec{u} = \lambda \vec{v}$
- En V^3 tres vectores son linealmente independentes se non son coplanarios.
 $\vec{v}, \vec{u}$ e $\vec{w}$ son linealmente dependentes $\Leftrightarrow \vec{w} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{u}$,
 é dicir, algún pode expresarse como combinación lineal dos outros dous.
- En V^3 catro ou máis vectores sempre son linealmente dependentes.

- Se tres vectores son linealmente independentes calquera outro vector pode expresarse como combinación lineal deles e diremos que os tres vectores forma unha base.

■ Se para a base $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, $\vec{z} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$, os números (x, y, z) chámanse **coordenadas** do vector $\vec{z}$ respecto da base B .

Unha forma práctica de determinar a dependencia lineal dun grupo de vectores dados pola súas coordenadas respecto dunha base, é formar con eles unha matriz de xeito que cada unha das súas filas (ou columnas) sexa un dos vectores. O rango desta matriz é o número de vectores linealmente independentes que hai no grupo considerado. No caso particular de que sexan tres vectores, entón serán independentes se o determinante da matriz é distinto de cero.

Espazo afín asociado ó espazo vectorial V^3

Sexa E o espazo ordinario de puntos, a cada par de puntos (A, B) de $E \times E$ sempre lle podemos asignar un vector de V^3 , a clase de vectores que ten por orixe o punto A e por extremo o punto B , $\vec{AB}$. Temos así definida unha aplicación:

$$E \times E \rightarrow V^3$$

$$(A, B) \rightarrow \vec{AB}$$

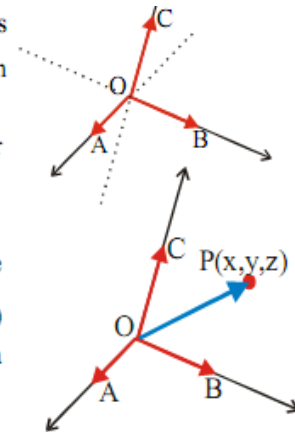
O espazo afín asociado a V^3 é o espazo ordinario de puntos e segundo a aplicación anterior o denotaremos por E^3

Sistemas de referencia no espazo afín

■ Un **sistema de referencia** do espazo afín E^3 é o formado por catro puntos $\{O; A, B, C\}$ tq os vectores $\vec{a} = [\vec{OA}]$, $\vec{b} = [\vec{OB}]$ e $\vec{c} = [\vec{OC}]$ son linealmente independentes (forman unha base de E^3).

O punto O denomínase **orixe** do sistema e as rectas definidas por OA , OB e OC **eixos de coordenadas**.

■ Dado un punto calquera de $P(x, y, z) \in E^3$, queda univocamente determinado o vector $\vec{v} = \vec{OP} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, os números (x, y, z) chámanse **coordenadas** do punto P no sistema de referencia $\{O; A, B, C\}$ ou **coordenadas** do vector $\vec{v}$ na base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.



■ O sistema de referencia que se utilizará, sempre que non se indique o contrario, será o **canónico** que é o formado por $\{(0, 0, 0); (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

Notación: $\vec{e}_1 = \vec{i} = (1, 0, 0)$; $\vec{e}_2 = \vec{j} = (0, 1, 0)$; $\vec{e}_3 = \vec{k} = (0, 0, 1)$

Operacións con coordenadas

Coordenadas dun vector: Se as coordenadas dos puntos A e B son: $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ entón as coordenadas do vector $\overrightarrow{AB}$ son as coordenadas do extremo menos as coordenadas da orixe.

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Módulo dun vector: Se as coordenadas dun vector son $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ entón:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Suma de vectores: Se $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ entón

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Produto dun número por un vector: $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ entón:

$$\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$$

Produto escalar de dous vectores

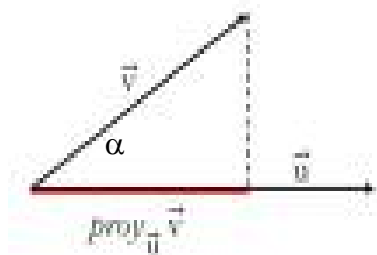
Se define o produto escalar de dous vectores como o produto dos módulos polo coseno do ángulo que forman:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

O produto escalar de dous vectores é un número real, positivo, negativo ou nulo

Se o produto escalar de dous vectores non nulos é cero entón os vectores son perpendiculares ou ortogonais, xa que si $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$

Interpretación xeométrica do produto escalar



Se chamamos $\vec{u}_1$ ó vector proxección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, Temos que:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u}_1|}{|\vec{v}|}, \text{ substituíndo na definición de produto}$$

escalar quedaría: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \frac{|\vec{u}_1|}{|\vec{v}|} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}_1|$, logo: O produto escalar de dous

vector es o módulo do primeiro polo módulo do vector proxección do segundo sobre o primeiro.

Propiedades do produto escalar

- | | | | |
|------|---|-----|---|
| i) | $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$ | iv) | $\lambda(\vec{v} \cdot \vec{u}) = (\lambda\vec{v}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot (\lambda\vec{u})$ |
| ii) | $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$ * | v) | $\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w} = (\vec{u} + \vec{w}) \cdot \vec{v}$ |
| iii) | $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$ | vi) | $(\vec{v} \cdot \vec{u})^2 \leq \vec{v}^2 \vec{u}^2$ |

$$* \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

Bases especiais

- i) *Base normada*: Tres vectores forman unha base normada se os tres vectores son unitarios, é dicir, se os tres teñen módulo 1
- ii) *Base ortogonal*: Tres vectores forman unha base ortogonal, se os tres vectores son ortogonais dous a dous, é dicir, se os tres produtos escalares dan 0
- iii) *Base ortonormal*: Tres vectores forman unha base ortonormal se os tres vectores son unitarios e ortogonais. Evidentemente, a base canónica é unha base ortonormal e será a que utilizemos (se non se indica o contrario)

Expresión analítica do produto escalar

$$\text{Se } \vec{U} = (u_1, u_2, u_3) \quad \vec{V} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\text{Entón: } \vec{U} \cdot \vec{V} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Ángulo que forman dous vectores

$$\vec{U} = (u_1, u_2, u_3) \quad \vec{V} = (v_1, v_2, v_3)$$

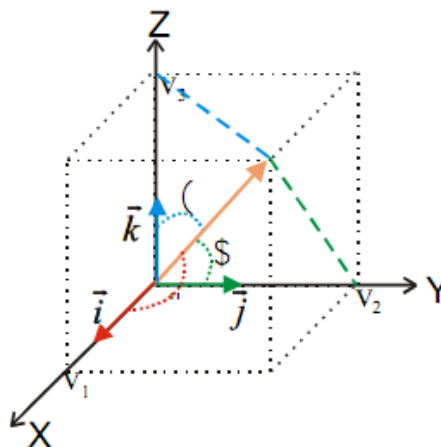
Se α é o ángulo que forman os dous vectores, despregando na definición de produto escalar e utilizando a expresión analítica temos que:

$$\alpha = \arccos \frac{v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

Ángulos e cosenos directores

■ Chamamos ángulos directores (α, β, γ) dun vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ aos ángulos que forma cos vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ respectivamente. O cosenos destes ángulos (*cosenos directores*) veñen dados por:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos(\vec{v}, \vec{i}) = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \\ \cos \beta &= \cos(\vec{v}, \vec{j}) = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \\ \cos \gamma &= \cos(\vec{v}, \vec{k}) = \frac{v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}\end{aligned}$$



Produto vectorial de dous vectores

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ son dous vectores de V^3 , defínese o produto vectorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$, designado por $\vec{u} \times \vec{v}$ ou por $\vec{u} \wedge \vec{v}$, como o vector que se obtén da seguinte maneira:

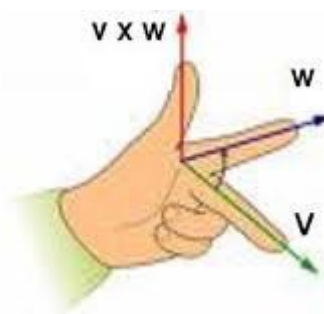
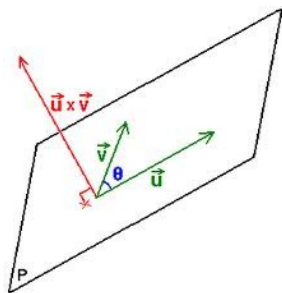
1º Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ son dous vectores non nulos e non proporcionais entón $\vec{u} \times \vec{v}$ é un vector que ten:

Módulo: O produto dos módulos polo seno do ángulo que forman: $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$

Dirección: Perpendicular aos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Sentido: O de avance dun tirarrollas que xira en sentido positivo de $\vec{u}$ a $\vec{v}$

2º Se algún dos vectores é o vector nulo ou os vectores son proporcionais entón o produto vectorial é o vector nulo, $\vec{0}$



Interpretación xeométrica do produto vectorial

■ Sexan tres puntos non aliñados A , B e C e consideremos os vectores:

$\vec{v}$ vector de extremos AB

$\vec{u}$ vector de extremos AC

Temos que:

$$\sin \alpha = \frac{h}{|\vec{u}|} \Rightarrow h = |\vec{u}| \sin \alpha \Rightarrow |\vec{v} \wedge \vec{u}| = |\vec{v}| |\vec{u}| \sin \alpha = |\vec{v}| h,$$

de onde deducimos:

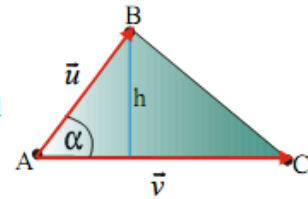
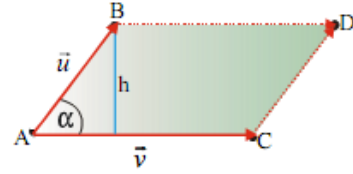
A *superficie do paralelogramo* definido polos vectores $\vec{v}$ e $\vec{u}$

(ABDC) igual ao módulo do vector produto vectorial de $\vec{v}$ e $\vec{u}$:

$$S_{ABDC} = |\vec{v} \wedge \vec{u}|$$

A *superficie do triángulo* definido polos vectores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ (ABC) é igual á metade do módulo do vector produto vectorial de $\vec{v}$ e $\vec{u}$:

$$S_{ABC} = \frac{|\vec{v} \wedge \vec{u}|}{2}$$



Propiedades do produto vectorial

- i. $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$
- ii. $\lambda(\vec{v} \wedge \vec{u}) = (\lambda\vec{v}) \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge (\lambda\vec{u})$
- iii. $\vec{v} \wedge (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{v} \wedge \vec{w}$
- iv. O vector $\vec{v} \wedge \vec{u}$ é un vector ortogonal aos vectores $\vec{v}$ e $\vec{u}$, é dicir,
 $\vec{v} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{u}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{u}) = 0$
- v. $\vec{v}$ e $\vec{u}$ son linealmente dependentes $\Rightarrow \vec{v} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ (Por definición)
- vi. $\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ (consecuencia da propiedade anterior)
- vii. $\vec{v}$ e $\vec{u}$ son linealmente independentes $\Rightarrow \{\vec{v}, \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{u}\}$ constitúen unha base de V^3
- viii. $|\vec{v} \wedge \vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 - (\vec{v} \cdot \vec{u})^2$

Expresión analítica do produto vectorial

Se $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ entón:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) \times (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) = u_1v_1(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + u_1v_2(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + u_1v_3(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + u_2v_1(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + \dots + u_3v_3(\mathbf{k} \times \mathbf{k})$$

Tendo en conta que:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \vec{0} \quad ; \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \vec{0} \quad ; \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \vec{0} \quad ; \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad ; \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \quad ; \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$$

Temos que: $\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - v_2 u_3) \mathbf{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{k}$

Expresión que coincide co desenrolo do determinante:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Produto mixto de tres vectores

■ Sexan os vectores $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$

Defínese o *produto mixto* dos vectores $\vec{v}$, $\vec{u}$ e $\vec{w}$ como o número real, $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$ que se obtén de realizar o produto escalar de $\vec{v}$ por $\vec{u} \wedge \vec{w}$.

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = \vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{w})$$

— O produto mixto de tres vectores é un número real.

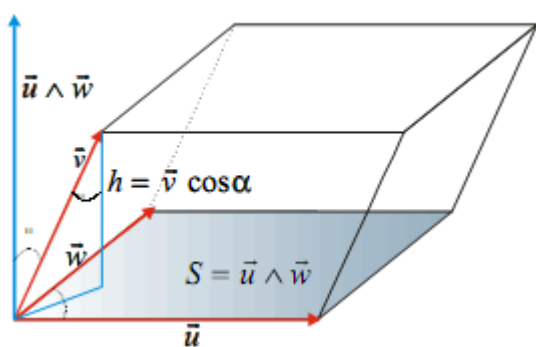
■ A expresión analítica será: $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = \vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{w}) = (v_1, v_2, v_3) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} =$

$$= v_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - v_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + v_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \Rightarrow [\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades do produto mixto

- i. $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = [\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = -[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$
- ii. $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ son linealmente dependentes $\Leftrightarrow [\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = 0$
- iii. $\lambda[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\lambda\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{v}, \lambda\vec{u}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{u}, \lambda\vec{w}]$
- iv. $[\vec{v} + \vec{s}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] + [\vec{s}, \vec{u}, \vec{w}]$

Interpretación xeométrica do produto mixto



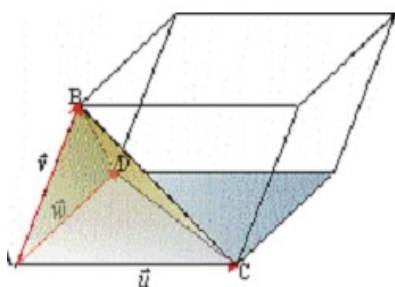
Consideramos o paralelepípedo que ten por arestas os tres vectores $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$. O volume de dito paralelepípedo será a superficie da base pola altura, pero entón a superficie será o módulo do produto vectorial de $\vec{u}$ e $\vec{w}$ e a altura será o módulo de $\vec{v}$ polo coseno do ángulo que forman $\vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{w}$

$$|[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]| = \left| \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) \right| = |\vec{v}| \cdot |\vec{u} \times \vec{w}| \cdot |\cos(\vec{v}, \vec{u} \times \vec{w})| = S_{\text{base}} \cdot \text{altura} = V_{\text{paralelepípedo}}$$

$$S_{\text{base}} = |\vec{u} \times \vec{w}| \quad \cos \alpha = \frac{h}{|\vec{v}|} \Rightarrow h = |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

Polo tanto: $V_{\vec{v}\vec{u}\vec{w}} = |[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]|$

Se en vez de considerar o paralelepípedo, consideramos o tetraedro, como sabemos que o seu volume é un sexto do volume do paralelepípedo



Entón, o **volume dun tetraedro** de vértices A, B, C e D é igual a un sexto do valor absoluto do produto mixto dos vectores: $\vec{v}$ de extremos AB , $\vec{u}$ de extremos AC e $\vec{w}$ de extremos AD :

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]|$$

Determina m y n para que los siguientes conjuntos de vectores sean linealmente dependientes:

a) $\vec{u}(m, -3, 2)$, $\vec{v}(2, 3, m)$, $\vec{w}(4, 6, -4)$

b) $\vec{u}(3, 2, 5)$, $\vec{v}(2, 4, 7)$, $\vec{w}(1, -1, n)$

$$a) \begin{vmatrix} m & -3 & 2 \\ 2 & 3 & m \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -6m^2 - 24m - 24 = -6(m^2 + 4m + 4) = -6(m+2)^2 = 0 \rightarrow m = -2$$

Si $m = -2$, los vectores son linealmente dependientes.

$$b) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & n \end{vmatrix} = 8n + 5 = 0 \rightarrow n = -\frac{5}{8}$$

Si $n = -\frac{5}{8}$, los vectores son linealmente dependientes.

¿Para qué valores de a el conjunto de vectores $S = \{(1, 1, 1), (a, 1, 1), (1, a, 0)\}$ es una base?

Como son tres vectores de $\mathbb{R}^3$, formarán base cuando sean linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = a^2 - a = a(a-1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Por tanto, S es una base cuando $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

En una base ortonormal tenemos $\vec{a}(1, 2, 2)$ y $\vec{b}(-4, 5, -3)$. Calcula:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$

c) $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$

d) El vector proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 2) \cdot (-4, 5, -3) = -4 + 10 - 6 = 0$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,07$$

c) Como $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 90^\circ$

d) Vector proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} = 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ (vector cero)

Dados los vectores $\vec{a} = \vec{i} + m\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + m\vec{k}$ halla m para que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean:

a) Paralelos.

b) Ortogonales.

$$\vec{a}(1, m, 1); \quad \vec{b}(-2, 4, m)$$

$$a) \frac{-2}{1} = \frac{4}{m} = \frac{m}{1} \rightarrow m = -2$$

$$b) \vec{a} \cdot \vec{b} = (1, m, 1) \cdot (-2, 4, m) = -2 + 4m + m = 5m - 2 = 0 \rightarrow m = \frac{2}{5}$$

Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(2, 3, 1)$ y a $\vec{v}(-1, 3, 0)$ y que sea unitario.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-3, -1, 9)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 9^2} = \sqrt{91}$$

$$\text{Luego el vector que buscamos es: } \left(\frac{-3}{\sqrt{91}}, \frac{-1}{\sqrt{91}}, \frac{9}{\sqrt{91}} \right)$$

Halla un vector ortogonal a $\vec{u}(1, -1, 0)$ y $\vec{v}(2, 0, 1)$ cuyo módulo sea $\sqrt{24}$.

Un vector ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ es $\vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = (-1, -1, 2)$$

Un vector unitario perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ es:

$$\frac{1}{|(-1, -1, 2)|} (-1, -1, 2) = \frac{1}{\sqrt{6}} (-1, -1, 2)$$

Para que el módulo sea $\sqrt{24}$:

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} (-1, -1, 2) = 2(-1, -1, 2) = (-2, -2, 4)$$

El vector $(-2, -2, 4)$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$, y su módulo es $\sqrt{24}$.

También cumple estas condiciones su opuesto: $(2, 2, -4)$.

Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}(2, -3, 1)$, $\vec{v}(1, m, 3)$ y $\vec{w}(-4, 5, -1)$ sean coplanarios.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2m + 8 = 0 \rightarrow m = -4$$

Dados los vectores $\vec{a}(1, 2, -1)$ y $\vec{b}(1, 3, 0)$, comprueba que el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a} + \vec{b}$ y a $\vec{a} - \vec{b}$.

$$\vec{a}(1, 2, -1)$$

$$\vec{b}(1, 3, 0)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (2, 5, -1)$$

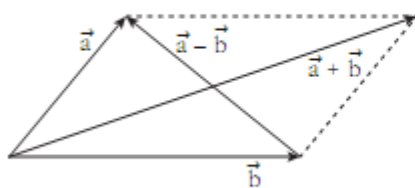
$$\vec{a} - \vec{b} = (0, -1, -1)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3, -1, 1)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (2, 5, -1) \cdot (3, -1, 1) = 0. \text{ Por tanto, } \vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (0, -1, -1) \cdot (3, -1, 1) = 0. \text{ Por tanto, } \vec{a} - \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$$

Hasta aquí, la comprobación rutinaria, numérica. Más interesante es la siguiente reflexión:



Los vectores $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son las diagonales del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Por tanto, están en el plano definido por $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Y el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a dicho plano.

Así, $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son perpendiculares a $\vec{a} \times \vec{b}$.

Dados los vectores $\vec{u}_1(2, 0, 0)$, $\vec{u}_2(0, 1, -3)$, $\vec{u}_3 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$, ¿qué relación deben cumplir a y b para que $\vec{u}_3$ sea ortogonal al vector $\vec{v}(1, 1, 1)$?

$$\vec{u}_3 = a(2, 0, 0) + b(0, 1, -3) = (2a, b, -3b)$$

Para que $\vec{u}_3$ sea perpendicular a $\vec{v}$ ha de ser:

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{v} = (2a, b, -3b) \cdot (1, 1, 1) = 2a + b - 3b = 2a - 2b = 0, \text{ es decir, } a = b.$$

Calcula las coordenadas de un vector $\vec{u}$ que sea ortogonal a $\vec{v}(1, 2, 3)$ y $\vec{w}(1, -1, 1)$ y tal que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 19$.

$$\vec{v} \times \vec{w} = (5, 2, -3)$$

Un vector ortogonal a $\vec{v}$ y a $\vec{w}$ es de la forma $(5k, 2k, -3k)$.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 5k & 2k & -3k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \cdot 38 = 19 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\text{Por tanto: } \vec{u} \left(\frac{5}{2}, 1, \frac{-3}{2} \right)$$

Dados los vectores $\vec{u}(a, 1+a, 2a)$, $\vec{v}(a, 1, a)$ y $\vec{w}(1, a, 1)$, se pide:

- a) Halla los valores de a para los que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.
- b) Estudia si el vector $\vec{c}(3, 3, 0)$ depende linealmente de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $a = 2$.
- c) Justifica razonadamente si para $a = 0$ se cumple la igualdad $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$.

$$a) [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a & 1+a & 2a \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^3 - a = a(a^2 - 1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

- b) Para $a = 2$, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes. Como son tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes, forman una base de $\mathbb{R}^3$.

Así, cualquier otro vector, y, en particular $\vec{c}(3, 3, 0)$, depende linealmente de ellos.

Obtenemos la combinación lineal:

Para $a = 2$, tenemos que: $\vec{u}(2, 3, 4)$, $\vec{v}(2, 1, 2)$, $\vec{w}(1, 2, 1)$

$$(3, 3, 0) = x(2, 3, 4) + y(2, 1, 2) + z(1, 2, 1)$$

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ 4x + 2y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-9}{6} = -\frac{3}{2};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

Por tanto:

$$\vec{c} = -\frac{3}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} + 3\vec{w}$$

- c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ para $a = 0$. Está probado en el apartado a).

Halla un vector $\vec{u}$ de la misma dirección que $\vec{v}(1, -2, 3)$ y tal que determine con el vector $\vec{w}(-2, 4, -1)$ un paralelogramo de área $25 u^2$.

Si $\vec{u}$ es de la misma dirección que $\vec{v}(1, -2, 3)$, será de la forma $\vec{u}(x, -2x, 3x)$, con $x \neq 0$.

Para que forme con $\vec{w}(-2, 4, -1)$ un paralelogramo de área $25 u^2$, ha de ser:

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = |(-10x, -5x, 0)| = \sqrt{100x^2 + 25x^2} = |x|\sqrt{125} = 25;$$

$$\text{es decir: } 125x^2 = 625 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

Por tanto, hay dos soluciones: $(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$ y $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, -3\sqrt{5})$

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que $|\vec{a}| = 4$ y $|\vec{b}| = 2$, con $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 60^\circ$.

Calcula $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = \\ &= 16 + 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 16 + 4 + 8 = 28 \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = \\ &= 16 + 4 - 8 = 12 \rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Calcula el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabiendo que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ y $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$.

Puesto que $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, empecemos desarrollando esta expresión:

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

Sustituimos $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$ por sus valores, y $\vec{a} \cdot \vec{b}$ por su expresión,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}):$$

$$7^2 = 3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})})$$

$$\cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = \frac{1}{2} \rightarrow \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 60^\circ$$

ECUACIONES DE RECTAS E PLANOS

Ecuacións da recta

Unha recta queda determinada cando se coñece un vector que leve a súa dirección, chamado vector director da recta, e un punto que pertenza á recta. A súa ecuación é unha expresión que serve para decidir que puntos do espazo pertencen a ela e cales non.

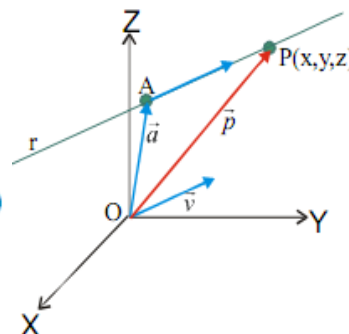
Sexan: $P(x, y, z)$ punto arbitrario da recta r

$A(x_1, y_1, z_1)$ punto fixo da recta r

$\vec{p}$ vector $[\vec{OP}]$, $\vec{a}$ vector $[\vec{OA}]$

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un vector coa dirección de r (**vector director**)

λ un número real



A ecuación da recta que pasa por A e ten a dirección do vector $\vec{v}$, pode expresarse como:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{a} + \lambda \vec{v}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ &\Updownarrow \\ (x, y, z) &= (x_1, y_1, z_1) + \lambda(v_1, v_2, v_3), \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ecuación vectorial

Exemplo: A ecuación vectorial da recta que pasa polo punto $A(1, 2, 0)$ e ten por vector director $\vec{v} = (-2, 2, 3)$ é:
 $(x, y, z) = (1, 2, 0) + \lambda(-2, 2, 3), \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Dada a ecuación vectorial da recta r : $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda(v_1, v_2, v_3)$, deducimos que

$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3) = (x_1 + \lambda v_1, y_1 + \lambda v_2, z_1 + \lambda v_3)$, entón a ecuación da recta pode expresarse como:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda v_1 \\ y = y_1 + \lambda v_2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = z_1 + \lambda v_3 \end{cases}$$

Ecuacións paramétricas

Exemplo: As ecuacións paramétricas da recta que pasa polo punto $A(1, 2, 0)$ e ten por vector director

$$\vec{v} = (-2, 2, 3) \text{ son: } \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

Despexando λ nas ecuacións paramétricas obtemos: $\lambda = \frac{x-x_1}{v_1}$, $\lambda = \frac{y-y_1}{v_2}$, $\lambda = \frac{z-z_1}{v_3}$, de onde

deducimos:

$$\frac{x-x_1}{v_1} = \frac{y-y_1}{v_2} = \frac{z-z_1}{v_3}$$

Ecuacións continuas

Exemplo: As ecuacións continuas da recta que pasa polo punto $A(1, 2, 0)$ e ten por vector director $\vec{v} = (-2, 2, 3)$

son: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}$.

Das ecuacións continuas deducimos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x-x_1}{v_1} &= \frac{y-y_1}{v_2} \\ \frac{x-x_1}{v_1} &= \frac{z-z_1}{v_3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} y &= \frac{v_2}{v_1}x - \frac{v_2}{v_1}x_1 + y_1 \\ z &= \frac{v_3}{v_1}x - \frac{v_3}{v_1}x_1 + z_1 \end{aligned} \right\}, \text{ chamando}$$

$a = \frac{v_2}{v_1}$, $b = -\frac{v_2}{v_1}x_1 + y_1$, $a' = \frac{v_3}{v_1}$, $b' = -\frac{v_3}{v_1}x_1 + z_1$, temos as ecuacións:

$$\begin{cases} y = ax + b \\ z = a'x + b' \end{cases}$$

Ec. Reducidas

Exemplo: Ecuacións reducidas da recta que pasa polo punto $A(1, 2, 0)$ e ten por vector director $\vec{v} = (-2, 2, 3)$:

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ z = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

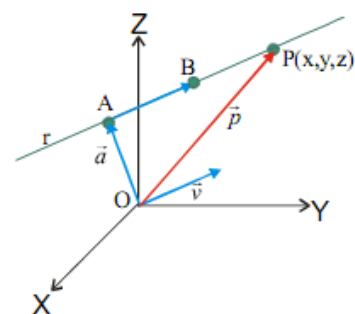
As ecuacións reducidas da recta se chaman tamén ecuacións implícitas da recta. En xeral, as ecuacións implícitas da recta son dúas ecuacións de primeiro grao:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases}$$

Sexan $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ dous puntos distintos da recta r , o vector, $\vec{v}$, definido por AB ten por coordenadas, $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, como $\vec{v}$ ten a mesma dirección que r , substituíndo nas ecuacións continuas temos:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

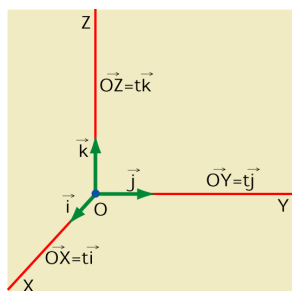
Recta que pasa por dous puntos



Exemplo: Para a recta que pasa polos puntos $A(4, 2, 1)$, $B(2, 4, 4)$, o vector director é $\vec{v} = (-2, 2, 3)$, entón a

ecuación continua será: $\frac{x-4}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$.

Ecuación dos eixes de coordenadas



	Vectorial	Paramétrica	Continua
Eje OX	$\vec{r} = t \vec{i}$	$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$
Eje OY	$\vec{r} = t \vec{j}$	$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$	$\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$
Eje OZ	$\vec{r} = t \vec{k}$	$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$	$\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$

As ecuacións implícitas serían:

Eixe OX	$y = 0$ $z = 0$
Eixe OY	$x = 0$ $z = 0$
Eixe OZ	$x = 0$ $y = 0$

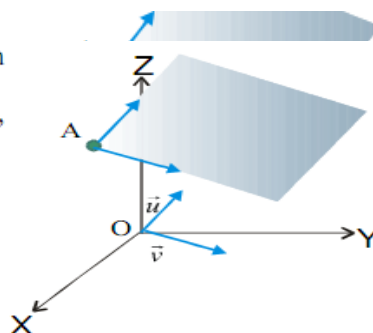
Ecuacións do plano

Un plano no espazo queda determinado cando se coñece un dos seus puntos e dous vectores de dirección que sexan independentes. As ecuacións dun plano son expresións alxébricas que permiten decidir que puntos pertencen ao plano e que puntos non pertencen.

Sexa $P(x, y, z)$ un punto arbitrario dun plano π , definido por un punto fixo do plano $A(x_1, y_1, z_1)$ e dous vectores, $\vec{v}$ e $\vec{u}$, linealmente independentes (*vectores directores*)

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$; $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$; $\vec{p}$ vector $[\vec{OP}]$;

$\vec{a}$ vector $[\vec{OA}]$; λ, μ números reais



A ecuación do plano, π , que pasa por A e ten por vectores directores $\vec{v}$ e $\vec{u}$, pode expresarse como:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{a} + \lambda \vec{v} + \mu \vec{u}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ &\Updownarrow \\ (x, y, z) &= (x_1, y_1, z_1) + \lambda(v_1, v_2, v_3) + \mu(u_1, u_2, u_3), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ecuación vectorial

Exemplo: A ecuación vectorial do plano que pasa polo punto $A(1, 2, 0)$ e ten por vectores directores $\vec{v} = (-2, 2, 3)$, $\vec{u} = (4, 0, 1)$ é: $(x, y, z) = (1, 2, 0) + \lambda(-2, 2, 3) + \mu(4, 0, 1), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Dada a ecuación vectorial do plano π : $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda(v_1, v_2, v_3) + \mu(u_1, u_2, u_3)$, deducimos

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (x_1, y_1, z_1) + (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3) + (\mu u_1, \mu u_2, \mu u_3) = \\ &= (x_1 + \lambda v_1 + \mu u_1, y_1 + \lambda v_2 + \mu u_2, z_1 + \lambda v_3 + \mu u_3) \end{aligned}$$

entón a ecuación do plano pode expresarse como:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda v_1 + \mu u_1 \\ y = y_1 + \lambda v_2 + \mu u_2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = z_1 + \lambda v_3 + \mu u_3 \end{cases}$$

Ecuacións paramétricas

Exemplo: As ecuacións paramétricas do plano que pasa polo punto $A(1, 2, 0)$ e ten por vectores directores

$$\vec{v} = (-2, 2, 3), \vec{u} = (4, 0, 1) \text{ son: } \begin{cases} x = 1 - 2\lambda + 4\mu \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3\lambda + \mu \end{cases}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

O vector $\vec{AP} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ é combinación lineal dos vectores directores entón:

$$\det(\vec{AP}, \vec{v}, \vec{u}) = 0, \text{ isto implica que: } \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando o determinante anterior chegamos a unha expresión da forma:

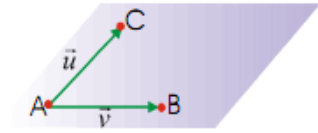
$$ax + by + cz + d = 0$$

Ecuación implícita

Exemplo: A ecuación implícita do plano que pasa polo punto $A(1, 2, 0)$ e ten por vectores directores

$$\vec{v} = (-2, 2, 3), \vec{u} = (4, 0, 1) \text{ será: } \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x + 14y - 8z - 30 \Rightarrow x + 7y - 4z - 15 = 0$$

Dados tres puntos non aliñados $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ e $C(x_3, y_3, z_3)$, os vectores $\vec{v} = \vec{AB}$ e $\vec{u} = \vec{AC}$ son linealmente independentes e o plano $\pi(A, \vec{v}, \vec{u})$, que contén aos tres puntos, ten como ecuación:



$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Plano determinado por tres puntos

Exemplo: A ecuación do plano que pasa polos puntos $A(1, 2, -1)$, $B(2, 3, 2)$ e $C(3, 2, 0)$ é a seguinte:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x + 5y - 2z - 13 = 0$$

Vector normal a un plano

Sexan $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ dous puntos do plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$, temos que:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$

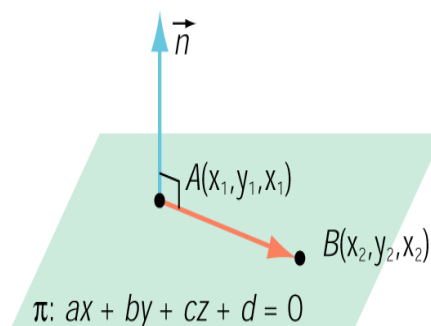
$$ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0$$

Restando término a término obtenemos: $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0$, é dicir,

$$(a, b, c) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = 0$$

Entón o vector $\vec{n} = (a, b, c)$ é perpendicular ó vector $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, polo tanto, é perpendicular o plano π

O vector $\vec{n} = (a, b, c)$ se chama **vector normal** do plano π e é un vector perpendicular (ortogonal) ao plano



Posicións relativas de rectas e planos

Posición relativa de dous planos

Consideremos dous planos dados polas ecuacións:
$$\begin{cases} \pi: ax + by + cz + d = 0 \\ \pi': a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

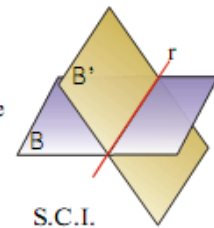
e sexan as matrices: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$.

■ $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*) \Rightarrow$ S. C. I., a intersección dos dous planos é unha recta.

$$r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Exemplo: Dados os planos $\pi: 2x + 4y - z = 5$, $\pi': 4x - y + z = 7$, temos que

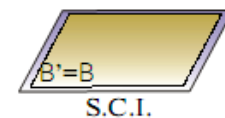
$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 = \text{rango}(A^*) \Rightarrow \text{os planos definen unha recta.}$$



■ $\text{rango}(A) = 1 = \text{rango}(A^*) \Rightarrow$ S. C. I., os planos son coincidentes.

Exemplo: Dados os planos $\pi: 2x + 4y - z = 5$, $\pi': 4x + 8y - 2z = 10$, temos que

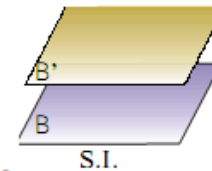
$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} = 1 = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 4 & 8 & -2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{os planos coinciden.}$$



■ $\text{rango}(A) = 1 \neq \text{rango}(A^*) = 2 \Rightarrow$ S. I., os planos son paralelos.

Exemplo: Dados os planos $\pi: 2x + 4y - z = 5$, $\pi': 4x + 8y - 2z = 1$, temos que

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} = 1 = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 4 & 8 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{os planos son paralelos.}$$



■ Dado un plano de ecuación $\pi: ax + by + cz + d = 0$, o conxunto de todos os planos paralelos a π teñen unha ecuación da forma $ax + by + cz + k = 0$, onde k é un número real calquera. En particular a ecuación do plano paralelo a π que pasa pola orixe de coordenadas é $ax + by + cz = 0$.

Exemplo: Dado o plano $\pi: 2x - 3y + z + 7 = 0$, os planos paralelos teñen son $2x - 3y + z + k = 0$, se queremos calcular o plano paralelo que pasa por un punto concreto, por exemplo $A(2, 1, -5)$, substituímos as coordenadas do punto na ecuación dos planos paralelos para calcular k :

$$2 \times 2 - 3 \times 1 + 1 \times (-5) + k = 0 \Rightarrow k = 4$$

entón a ecuación do plano paralelo a π que pasa polo punto A é: $2x - 3y + z + 4 = 0$.

Posición relativa de tres planos

Dados tres planos de ecuacións:

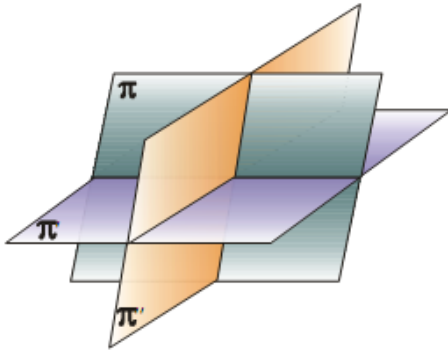
$$\begin{cases} \pi: & ax + by + cz + d = 0 \\ \pi': & a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ \pi'': & a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$$

consideremos as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

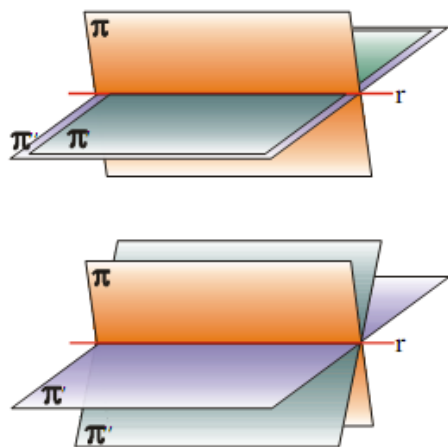
■ $\text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(A^*) \Rightarrow S. C. D.$

(a intersección dos tres planos é un punto)



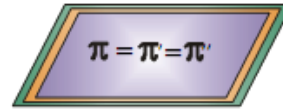
■ $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*) \Rightarrow S. C. L.$

(a intersección dos tres planos é unha recta)



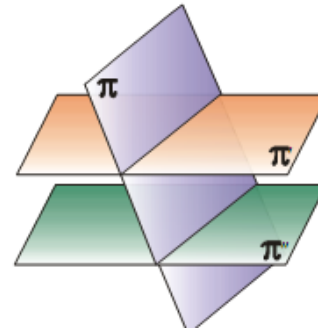
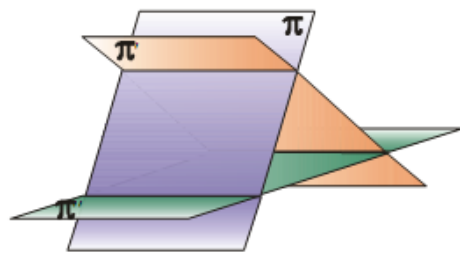
■ $\text{rango}(A) = 1 = \text{rango}(A^*) \Rightarrow S. C. I.$

(os planos son coincidentes)



■ $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3 \Rightarrow S. I.$

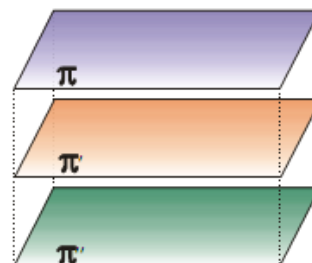
(os tres planos non coinciden en ningún punto)



▼

■ $\text{rango}(A) = 1 \neq \text{rango}(A^*) = 2 \Rightarrow S. I.$ (os

tres planos son paralelos)



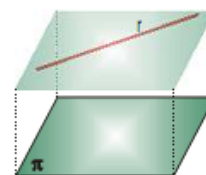
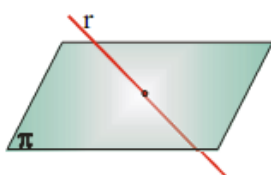
Posición relativa de recta e plano

Consideremos a recta, r , e o plano, π , dados polas ecuacións:

$$\begin{cases} r: & \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \\ \pi: & a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$$

e sexan as matrices: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$

$\blacksquare$ $\text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(A^*) \Rightarrow \Rightarrow$ S. C. D., a intersección da recta e do plano é un punto.
 $\blacksquare$ $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*) \Rightarrow \Rightarrow$ S. C. I., a recta está contida no plano.
 $\blacksquare$ $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3 \Rightarrow \Rightarrow$ S. I., a recta e o plano son paralelos.



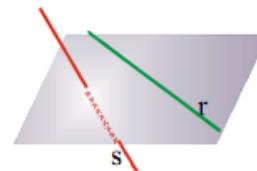
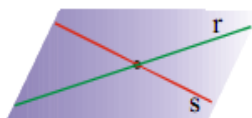
Posición relativa de dúas rectas

Consideremos as rectas dadas polas ecuacións:

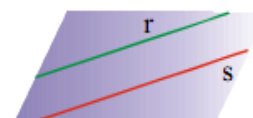
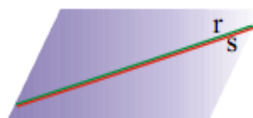
$$\begin{cases} r: & \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \\ r': & \begin{cases} a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0 \end{cases} \end{cases}$$

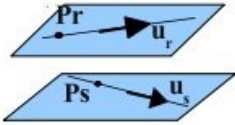
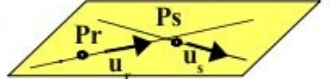
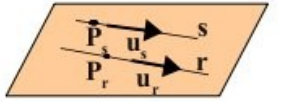
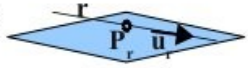
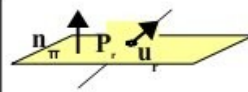
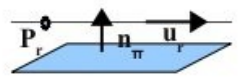
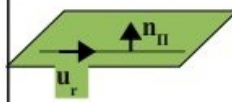
e sexan as matrices: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix}$

$\blacksquare$ $\text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(A^*) \Rightarrow$ S. C. D., a intersección das dúas rectas é un punto.
 $\blacksquare$ $\text{rango}(A) = 3 \neq \text{rango}(A^*) = 4 \Rightarrow$ S. I., as rectas crúzanse (sen cortarse).



$\blacksquare$ $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*) \Rightarrow$ S. C. I., as rectas son coincidentes.
 $\blacksquare$ $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3 \Rightarrow$ S. I., as rectas son paralelas.

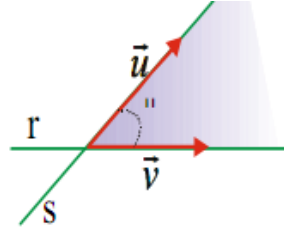


RECTAS E PLANOS		
POSICIÓN RELATIVAS (Estudo con puntos e vectores directores)	Dúas rectas r e s En r P_r e $\vec{u}_r$ En s P_s e $\vec{u}_s$	r e s CRÚZANSE NO ESPAZO (non teñen puntos en común e están en distinto plano)  $\vec{u}_r \neq k \vec{u}_s$ ($\vec{u}_r$ non é paralelo a $\vec{u}_s$) e $\det(\vec{P}_r, \vec{P}_s, \vec{u}_r, \vec{u}_s) \neq 0$
		r e s CÓRTANSE nun punto (só teñen un punto en común e están nun mesmo plano)  $\vec{u}_r \neq k \vec{u}_s$ ($\vec{u}_r$ non é paralelo a $\vec{u}_s$) e $\det(\vec{P}_r, \vec{P}_s, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = 0$
		r e s SON PARALELAS (non teñen puntos en común e están nun mesmo plano)  $\vec{u}_r = k \vec{u}_s$ ($\vec{u}_r$ é paralelo a $\vec{u}_s$) e P_r non é un punto de s (ou P_s non o é de r)
		r e s SON COINCIDENTES (todos os puntos de r o son tamén de s)  $\vec{u}_r = k \vec{u}_s$ ($\vec{u}_r$ é paralelo a $\vec{u}_s$) e P_r é un punto de s (ou P_s o é de r)
	Recta e plano r e π En π $\vec{n}_\pi(A, B, C)$ $Ax + By + Cz + D = 0$ En r P_r e $\vec{u}_r$ $\begin{cases} x = a + t u_1 \\ y = b + t u_2 \\ z = c + t u_3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$	r e π CÓRTANSE nun punto (só un dos puntos de r é un punto de π)  $\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi \neq 0$ ($\vec{u}_r$ non é perpendicular a $\vec{n}_\pi$) ou tamén ao substituír as ecuacións de r en π obtemos unha ecuación do tipo $a \cdot t = b$ $a, b \neq 0$ CASO PARTICULAR: $r \perp \pi$ $\vec{u}_r = k \vec{n}_\pi$
		r e π SON PARALELOS (non hai puntos en r que estean en π)  $\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$ ($\vec{u}_r$ é perpendicular a $\vec{n}_\pi$) e P_r non é un punto de π ou tamén ao substituír as ecuacións de r en π obtemos unha ecuación do tipo $0 \cdot t = b$ $b \neq 0$
		r ESTÁ CONTIDA EN π (todos os puntos de r son puntos de π)  $\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$ ($\vec{u}_r$ é perpendicular a $\vec{n}_\pi$) e P_r é un punto de π ou tamén ao substituír as ecuacións de r en π obtemos unha ecuación do tipo $0 \cdot t = 0$

Ángulos entre rectas e planos

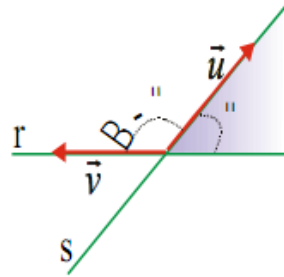
Ángulo formado por dúas rectas

■ Sexan r e s dúas rectas que se cortan, e que teñen como vectores directores $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ respectivamente, defínese o *ángulo formado polas dúas rectas* como o menor dos ángulos que forman no plano que determinan.



Ángulo formado por r e $s = \alpha = \text{Ángulo formado por } \vec{v} \text{ e } \vec{u}$

(ou o suplementario se é $> \frac{\pi}{2}$)



$$\cos(r, s) = \cos \alpha = |\cos(\vec{v}, \vec{u})|$$

Por definición de produto escalar: $\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}|\cos(\vec{v}, \vec{u}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos \alpha = |\cos(\vec{v}, \vec{u})| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{u}|}{|\vec{v}||\vec{u}|} = \frac{|v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}},$$

de onde deducimos:

$$\alpha = \arccos \frac{|\vec{v} \cdot \vec{u}|}{|\vec{v}||\vec{u}|} = \arccos \frac{|v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

Ángulo de dúas rectas que se cortan

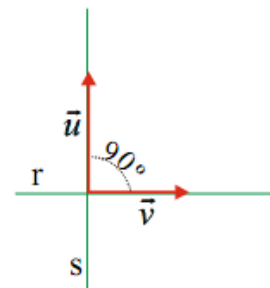
Exemplo: Dadas as rectas $r: \frac{x+4}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}$; $s: x-2 = y+4 = \frac{z+1}{-1}$:

$$\alpha = \arccos \frac{|(2, -2, 2) \cdot (1, 1, -1)|}{\sqrt{4+4+4} \sqrt{1+1+1}} = \arccos \frac{2}{6} = 70^\circ 31' 43.6''$$

■ Se r e s son dúas rectas son *perpendiculares*:

$$\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}|\cos \alpha = 0 \\ \updownarrow \\ \vec{v} \text{ e } \vec{u} \text{ son ortogonais} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 = 0$$



Exemplo: As rectas $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{3} = z+1$; $s: \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{7}$ son

perpendiculares, dado que:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (2, 3, 1) \cdot (-2, -1, 7) = -4 - 3 + 7 = 0$$

Ángulo formado por dous planos

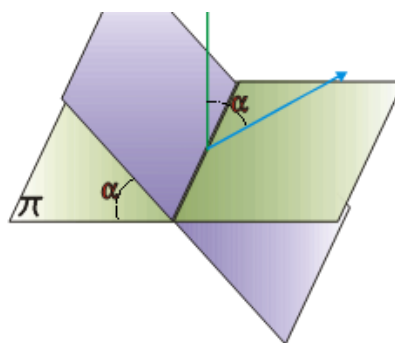
■ Sexan $\pi: ax + by + cz + d = 0$

e $\pi': a'x + b'y + c'z + d' = 0$ dous planos que se cortan e que

teñen como vectores normais asociados $\vec{n} = (a, b, c)$ e

$\vec{m} = (a', b', c')$ respectivamente, defínese o *ángulo formado*

polos dous planos como o menor dos ángulos que determinan.



Ángulo formado por π e $\pi' = \alpha =$ Ángulo formado por $\vec{n}$ e $\vec{m}$ (ou o suplementario se $\alpha > \frac{\pi}{2}$)

$$\cos(\pi, \pi') = \cos \alpha = |\cos(\vec{n}, \vec{m})|$$

Por definición de produto escalar: $\vec{n} \cdot \vec{m} = |\vec{n}| |\vec{m}| \cos(\vec{n}, \vec{m}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos \alpha = |\cos(\vec{n}, \vec{m})| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}, \text{ de onde deducimos:}$$

$$\alpha = \arccos \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \arccos \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

Ángulo de dous planos que se cortan

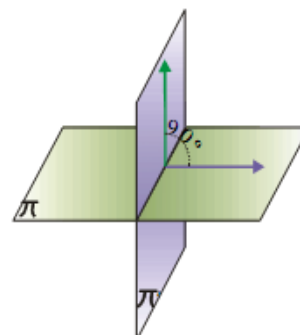
Exemplo: Os planos $\pi: x - 2y + z + 5 = 0$; $\pi': 2x + 4y - 2z + 1 = 0$ forman un ángulo igual a:

$$\alpha = \arccos \frac{|(1, -2, 1) \cdot (2, 4, -2)|}{\sqrt{1+4+1} \sqrt{4+16+4}} = \arccos \frac{8}{12} = 48^\circ 11' 22.87''$$

■ Dados dous planos π e π' *perpendiculares*:

$$\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{n} \text{ e } \vec{m} \text{ son ortogonais} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{m} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$$

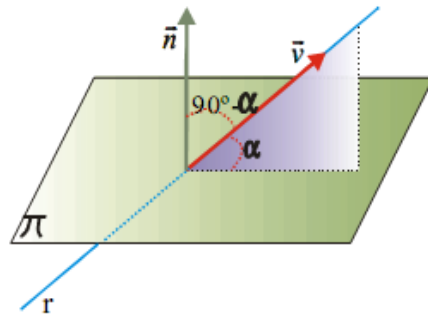


Exemplo: Para os planos $\pi: 4x - 2y + z + 5 = 0$; $\pi': 2x + 3y - 2z + 7 = 0$,

temos que: $\vec{n} \cdot \vec{n}' = (4, -2, 1) \cdot (2, 3, -2) = 8 - 6 - 2 = 0$, π e π' entón son perpendiculares.

Ángulo formado por unha recta e un plano

■ Sexan r unha recta que ten por vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\pi: ax + by + cz + d = 0$ un plano que ten por vector normal $\vec{n} = (a, b, c)$, defínese o **ángulo formado pola recta r e o plano π** como o ángulo que forman a recta r coa súa proxección sobre o plano π .



Ángulo formado por r e $\pi = \alpha =$ Complementario do ángulo formado por $\vec{v}$ e $\vec{n}$ (ou o suplementario se é $> \frac{\pi}{2}$).

$$\sin(r, \pi) = \sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = |\cos(\vec{v}, \vec{n})|$$

Por definición de produto escalar: $\vec{v} \cdot \vec{n} = |\vec{v}| |\vec{n}| \cos(\vec{v}, \vec{n}) \Rightarrow$

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = |\cos(\vec{v}, \vec{n})| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| |\vec{n}|} = \frac{|v_1 a + v_2 b + v_3 c|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \text{ de onde deducimos:}$$

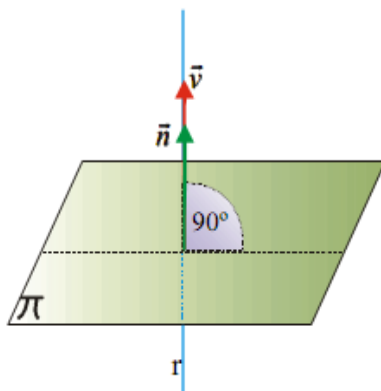
$$\alpha = \arcsen \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| |\vec{n}|} = \arcsen \frac{|v_1 a + v_2 b + v_3 c|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Ángulo entre unha recta e un plano

■ Se a recta r e o plano π son **perpendiculares**:

$$\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{v} \text{ e } \vec{n} \text{ teñen a mesma dirección}$$

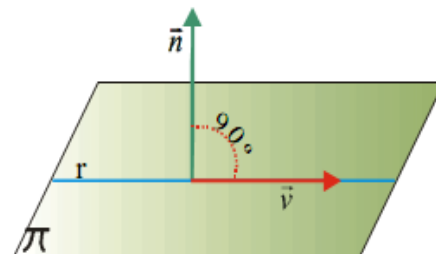
$$\Leftrightarrow \vec{v} \text{ e } \vec{n} \text{ son linealmente dependentes.}$$



■ Se a recta r e está contida (ou é paralela) ao plano π :

$$\alpha = 0^\circ \Leftrightarrow \vec{v} \text{ e } \vec{n} \text{ son ortogonais} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$



Distancias entre puntos, rectas e planos

Distancia entre dous puntos

Sexan $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ dous puntos do espazo, a distancia entre eles é igual ao módulo do vector que une ditos puntos

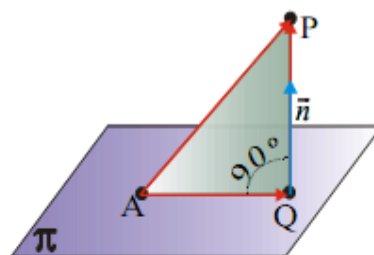
$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Distancia de un punto a un plano

■ Dado un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ e un plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$, a *distancia* entre ambos ven dada pola fórmula:

$$d(P, \pi) = \frac{|x_0 a + y_0 b + z_0 c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Distancia dun punto a un plano



$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP}$$

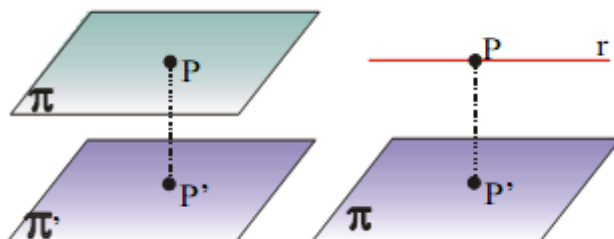
$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AQ} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{QP} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}$$

$$|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}| = |\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}| = |\overrightarrow{QP}| |\vec{n}| \cos(\angle QP, \vec{n}) = |\overrightarrow{QP}| |\vec{n}|$$

$$d(P, \pi) = |\overrightarrow{PQ}| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

A distancia entre planos paralelos pode calcularse coa fórmula anterior tomando como π un dos planos e como punto P un punto calquera do outro plano

A distancia entre unha recta e un plano paralelos pode calcularse coa fórmula anterior tomando como punto P un punto calquera da recta

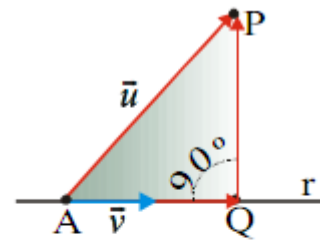


Distancia dun punto a unha recta

■ Dado un punto $P(x_1, y_1, z_1)$ e unha recta r que ten por vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e pasa polo punto $A(x_0, y_0, z_0)$ e sexa $\vec{u} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ o vector definido por AP , a *distancia* entre P e r ven dada pola fórmula:

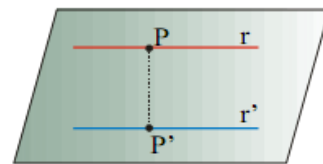
$$d(P, r) = \frac{|\vec{v} \wedge \vec{u}|}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}$$

Distancia dun punto a unha recta



$$\begin{aligned} \vec{AP} &= \vec{AQ} + \vec{QP} \\ \vec{u} \wedge \vec{v} &= \vec{AQ} \wedge \vec{v} + \vec{QP} \wedge \vec{v} = \vec{QP} \wedge \vec{v} \\ |\vec{u} \wedge \vec{v}| &= |\vec{QP} \wedge \vec{v}| = \\ &= |\vec{QP}| |\vec{v}| \operatorname{sen}(\angle \vec{QP}, \vec{v}) = |\vec{QP}| |\vec{v}| \\ d(P, r) &= |\vec{PQ}| = \frac{|\vec{u} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|} \end{aligned}$$

A distancia entre rectas paralelas pode calcularse coa fórmula anterior, tomando como r unha das rectas e como P un punto calquera da outra recta



Distancia entre dúas rectas que se cruzan

■ Sexan r e s dúas rectas que teñen como vectores directores $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, e que pasan polos puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ respectivamente, e sexa $\vec{w} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ o vector definido por AB , a *distancia* mínima entre r e s ven dada pola fórmula:

$$d(r, s) = \frac{|\vec{v} \wedge \vec{u} \wedge \vec{w}|}{|\vec{v} \wedge \vec{u}|} = \frac{\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}}$$

Distancia mínima entre dúas rectas que se cruzan

