

2

ÁLGEBRA DE MATRICES

Página 47

REFLEXIONA Y RESUELVE

Elección de presidente

- Ayudándote de la tabla, estudia detalladamente los resultados de la votación, analiza algunas características de los participantes y opina quién crees que debería ser presidente.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
<i>A</i>	1	-1	-1	-1	-1	-1
<i>B</i>	-1	0	1	0	-1	0
<i>C</i>	0	1	1	1	0	0
<i>D</i>	-1	0	1	0	-1	0
<i>E</i>	-1	1	1	1	-1	0
<i>F</i>	-1	0	0	0	-1	0

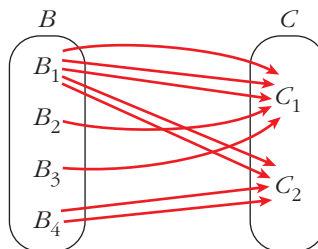
De la tabla podemos deducir muchas cosas:

- Al consejero A no le gusta ninguno de sus colegas como presidente.
- B solo tiene un candidato (el C).
- Dos consejeros (C y E) están de acuerdo en los mismos candidatos (B, C y D).
- El consejero F no opta por ninguno de sus compañeros.
- Al candidato E no le prefiere ninguno de los otros consejeros. De hecho, es el único que no se considera idóneo para el cargo.
- Los candidatos B y D han obtenido los mismos resultados.
- Solo A y C se consideran idóneos para el puesto de presidente.
- ...

Según los resultados, el candidato C es el más idóneo para presidir la empresa (por lo menos, eso piensan sus compañeros del consejo).

Vuelos internacionales

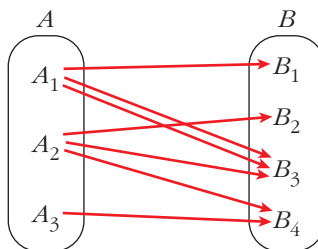
- Aquí tienes representados, mediante flechas, los vuelos que hay el martes desde el país B hasta el país C . Representa, mediante una tabla, la información recogida en el diagrama.



	C_1	C_2
B_1	3	2
B_2	1	0
B_3	1	0
B_4	0	2

Conexiones de vuelos

- Supón que una persona quiere salir el lunes de A , pasar la noche en B y llegar el martes a C .



¿Cuántas posibles combinaciones tiene por cada punto de salida y cada punto de llegada? Es decir, ¿de cuántas formas puede ir de A_1 a C_1 , de A_1 a C_2 , de A_2 a C_1 , etc.?

Continúa tú, rellenando razonadamente el resto de la tabla y explicando, en cada caso, cómo llegas a la respuesta.

	C_1	C_2
A_1	5	2
A_2	2	2
A_3	0	2

Página 49

1. Escribe las matrices traspuestas de:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad F = (5 \ 4 \ 6 \ 1)$$

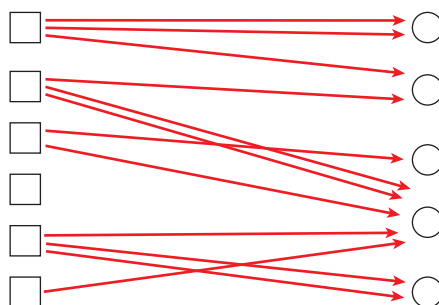
$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \quad C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D^t = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad E^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad F^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Escribe una matriz X tal que $X^t = X$; esto es, que sea simétrica.

Por ejemplo, $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Escribe una matriz que describa lo siguiente:



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Página 50

1. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula $E = 2A - 3B + C - 2D$.

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -12 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -18 \\ 16 & -15 & -23 \end{pmatrix}$$

Página 53

2. Efectúa todos los posibles productos entre las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 & 5 \\ 24 & -4 & -1 & -10 \end{pmatrix}; \quad A \cdot D = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{pmatrix}; \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -5 & 26 & 13 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 39 & 3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}; \quad D \cdot C = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 & 5 \\ 26 & 5 & 2 & 0 \\ 28 & 38 & -1 & 10 \end{pmatrix}; \quad D \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 31 & 4 \\ -4 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

3. Intenta conseguir una matriz I_3 de dimensión 3×3 que, multiplicada por cualquier matriz cuadrada $A(3 \times 3)$, la deje igual.

Es decir: $A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A$

La matriz I_3 que verifica la igualdad anterior se llama matriz unidad de orden 3.

Una vez que sepas cuál es su fisonomía, sabrás obtener la matriz unidad de cualquier orden.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Página 54

1. Comprueba las propiedades 2 y 3 del producto de números por matrices, tomando:

$$a = 3, b = 6 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

PROPIEDAD 2

$$\left. \begin{aligned} 9A &= \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \\ 3A + 6A &= \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 30 & -6 \\ 12 & -18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

$$9A = 3A + 6A$$

PROPIEDAD 3

$$\left. \begin{aligned} 3(A + B) &= 3 \begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \\ 3A + 3B &= \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & -6 & 3 \\ 12 & 18 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

$$3(A + B) = 3A + 3B$$

Página 55

2. Comprueba las propiedades distributivas para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 42 & -1 \\ 15 & 0 & 45 & -10 \\ 17 & 5 & 60 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & 26 & 20 \\ 0 & -5 & 25 & 25 \\ 4 & -5 & 36 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(B + C) \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot D + C \cdot D = \begin{pmatrix} 0 \\ -48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix}$$

$$(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$$

Página 57

1. Calcula, utilizando el método de Gauss, la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{(2.ª)}]{\text{(1.ª)} - \text{(2.ª)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$

Así, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{(2.ª)} - 3 \cdot \text{(1.ª)}]{\text{(1.ª)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{(2.ª)}]{\text{(1.ª)} + \text{(2.ª)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right)$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{(-1/2)} \cdot \text{(2.ª)}]{\text{(1.ª)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right)$

Así, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{(2.ª)} + 2 \cdot \text{(1.ª)}]{\text{(1.ª)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$

En la parte de la izquierda, la 2.ª fila está compuesta de ceros. Por tanto, la matriz

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

2. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{(3.ª)} - 7 \cdot \text{(1.ª)}]{\begin{matrix} \text{(1.ª)} \\ \text{(2.ª)} - 4 \cdot \text{(1.ª)} \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{(3.ª)} - 2 \cdot \text{(2.ª)}]{\begin{matrix} \text{(1.ª)} \\ \text{(2.ª)} \end{matrix}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$

En la parte de la izquierda, la 3.ª fila está compuesta de ceros. Por tanto, la ma-

triz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

$$b) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) - 3 \cdot (3.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (3.^a) \\ (3.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) - 2 \cdot (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{Así, } \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$$c) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (2.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -4 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ -5 \cdot (2.^a) + (3.^a) \\ -(1/10) \cdot (3.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) - 3 \cdot (3.^a) \\ -(1/5) \cdot (2.^a) \\ (3.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array} \right)$$

$$\text{Así, } \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{array} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2/5 \\ -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array} \right)$$

Página 59

3. Calcula x , y , z , t para que se cumpla:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - z & 2y - t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x - z = 5 \quad x = \frac{5}{2} \\ 2y - t = 1 \quad y = \frac{3}{2} \\ z = 0 \quad z = 0 \\ t = 2 \quad t = 2 \end{array} \right\} \text{ Solución: } \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba:

a) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

b) $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$

c) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } A \cdot (B + C) &= A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \\ A \cdot B + A \cdot C &= \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$\left. \begin{aligned} \text{b) } (A + B) \cdot C &= \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \\ A \cdot C + B \cdot C &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$\left. \begin{aligned} \text{c) } A \cdot (B \cdot C) &= A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} \\ (A \cdot B) \cdot C &= \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

5. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Encuentra X que cumpla: $3 \cdot X - 2 \cdot A = 5 \cdot B$

$$3X = 5B + 2A = \begin{pmatrix} 0 & 30 \\ 5 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 30 \\ 15 & -17 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & -17/3 \end{pmatrix}$$

6. Encuentra dos matrices, A y B , de dimensión 2×2 que cumplan:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} 2A + B &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ A - B &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \text{Sumando: } 3A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = A - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Encuentra dos matrices X e Y que verifiquen:

$$2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ -2X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

$$\text{Sumando: } -Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

8. Averigua cómo ha de ser una matriz X que cumpla la siguiente condición:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$$

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = x + z \\ x + y = y + t \\ z = z \\ z + t = t \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = t \\ z = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, \text{ donde } x \text{ e } y \text{ son números reales cualesquiera.}$$

9. Efectúa las siguientes operaciones con las matrices dadas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $(A \cdot B) + (A \cdot C)$

b) $(A - B) \cdot C$

c) $A \cdot B \cdot C$

a) $A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$

b) $(A - B) \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -15 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 12 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$

10. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que $(A - I)^2 = 0$.

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Halla la inversa de estas matrices:

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7x + 3z & 7y + 3t \\ 2x + z & 2y + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left. \begin{array}{l} 7x + 3z = 1 \\ 2x + z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ z = -2 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 7y + 3t = 0 \\ 2y + t = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = -3 \\ t = 7 \end{array}$$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3x - 2z & 3y - 2t \\ -8x + 5z & -8y + 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2z = 1 \\ -8x + 5z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -5 \\ z = -8 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 3y - 2t = 0 \\ -8y + 5t = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = -2 \\ t = -3 \end{array}$$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$.

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a = 1, b = 0, c = 0, 2d = 0, 2e = 1, 2f = 0, g = 0, h = 0, i = 1$$

$$\text{Por tanto, la inversa es } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a + 2d + 3g & b + 2e + 3h & c + 2f + 3i \\ d + 2g & e + 2h & f + 2i \\ d + g & e + h & f + i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} a + 2d + 3g = 1 \\ d + 2g = 0 \\ d + g = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 1 \\ d = 0 \\ g = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} b + 2e + 3h = 0 \\ e + 2h = 1 \\ e + h = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b = -1 \\ e = -1 \\ h = 1 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} c + 2f + 3i = 0 \\ f + 2i = 0 \\ f + i = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} c = -1 \\ f = 2 \\ g = -1 \end{array}$$

$$\text{Por tanto, la inversa es } \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Página 62

1. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -20 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (2.^a) \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(C) = 2$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \\ (4.^a) \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ -2 \cdot (3.^a) + (2.^a) \\ (4.^a) - 4 \cdot (2.^a) \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) + (3.^a) \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(D) = 3$$

Página 63

1. Expresa en forma matricial los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} x + z = 10 \\ 2x + 3y = 17 \\ 3x + 4y + z = 32 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - 2y = 11 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x - 2y - 3z - 2t = -19 \\ y + 2z + t = 12 \\ 2y + 3z + t = 16 \\ 3x - 2y + t = 5 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + z = 10 \\ 2x + 3y = 17 \\ 3x + 4y + z = 32 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 32 \end{pmatrix}}_C$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - 2y = 11 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}}_C$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - 2y - 3z - 2t = -19 \\ y + 2z + t = 12 \\ 2y + 3z + t = 16 \\ 3x - 2y + t = 5 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} -19 \\ 12 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix}}_C$$

2. Comprueba que las inversas de las matrices asociadas a los sistemas del ejercicio anterior son las que damos a continuación:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3/2 & 2 & -3/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 & 1 \\ -3 & -12 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & -3 & -1 \\ -3 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resuelve con ellas, matricialmente, los sistemas del ejercicio 1.

a) Comprobamos que es la inversa:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & 2 & -3/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Resolvemos el sistema:

$$X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 3/2 & 2 & -3/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 1, y = 5, z = 9$

b) Comprobamos que es la inversa:

$$B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Resolvemos el sistema:

$$X = B^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 1, y = -5$

c) Comprobamos que es la inversa:

$$C \cdot C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 & 1 \\ -3 & -12 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & -3 & -1 \\ -3 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Resolvemos el sistema:

$$X = C^{-1} \cdot D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 & 1 \\ -3 & -12 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & -3 & -1 \\ -3 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -19 \\ 12 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 0, y = -1, z = 5, t = 3$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Operaciones con matrices

1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $-2A + 3B$ b) $\frac{1}{2} A \cdot B$ c) $B \cdot (-A)$ d) $A \cdot A - B \cdot B$

a) $\begin{pmatrix} -23 & 4 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -17/2 & -2 \\ -11/2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 43 & -16 \\ 24 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -16 \\ 22 & -9 \end{pmatrix}$

2 Efectúa el producto $\begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$$

3 a) ¿Son iguales las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$?

b) Halla, si es posible, las matrices AB ; BA ; $A + B$; $A^t - B$.

a) No, A tiene dimensión 2×1 y B tiene dimensión 1×2 . Para que dos matrices sean iguales, deben tener la misma dimensión y coincidir término a término.

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$; $A + B$ no se puede hacer, pues no tienen la misma dimensión.

$$A^t - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ comprueba que:

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$

b) $(3A)^t = 3A^t$

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } (A + B)^t &= \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^t + B^t &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} (A + B)^t = A^t + B^t$$

$$\left. \begin{aligned} \text{b) } (3A)^t &= \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ 3A^t &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} (3A)^t = 3A^t$$

- 5** Calcula $3AA^t - 2I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} 3A A^t - 2I &= 3 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 17 & 29 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 30 & 51 \\ 51 & 87 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 6** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

$$\left. \begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ B^t \cdot A^t &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

- 7** Calcula, en cada caso, la matriz B que verifica la igualdad:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ b) $2 \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $2 \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow 3B = 2 \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$
 $B = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

- 8** Comprueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ verifica $(A + I)^2 = 6I$.

$$A + I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I$$

Luego $(A + I)^2 = 6I$

9 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

comprueba que $(A + I)^2 = 0$ y expresa A^2 como combinación lineal de A e I .

$$A + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Expresamos A^2 como combinación lineal de A e I :

$$(A + I)^2 = 0 \rightarrow (A + I)(A + I) = A^2 + A + A + I = A^2 + 2A + I = 0 \rightarrow \\ \rightarrow A^2 = -2A - I$$

Ecuaciones con matrices

s10 Halla las matrices X e Y que verifican el sistema:

$$2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{Sumando las dos ecuaciones, queda:}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos Y en la 2.ª ecuación:

$$Y = X - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto, } X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

s11 Calcula X tal que $X - B^2 = A \cdot B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A \cdot B + B^2$$

$$\left. \begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ B^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

s12 Determina los valores de m para los cuales $X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifique:

$$X^2 - \frac{5}{2}X + I = 0$$

$$\begin{aligned} X^2 - \frac{5}{2}X + I &= \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 - (5/2)m + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tiene que cumplirse que:

$$\begin{aligned} m^2 - \frac{5}{2}m + 1 &= 0 \rightarrow 2m^2 - 5m + 2 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow m &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Hay dos soluciones: $m_1 = 2$; $m_2 = \frac{1}{2}$

s13 Resuelve:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2x \\ 3y - 2 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} x - y = 3 + 2x \\ 3x + 2y = 3y - 2 \end{cases} \begin{cases} x + y = -3 \\ 3x - y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Sumando:

$$4x = -5 \rightarrow x = \frac{-5}{4} \rightarrow y = -3 - x = -3 + \frac{5}{4} = \frac{-7}{4}$$

Solución: $x = \frac{-5}{4}$; $y = \frac{-7}{4}$

s14 Halla dos matrices A y B tales que:

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$-A + 5B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$-2A + 10B = \begin{pmatrix} 18 & -4 & 32 \\ 34 & 2 & -20 \\ 18 & 10 & 26 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos por 2 la 2.^a ecuación.

$$13B = \begin{pmatrix} 26 & 0 & 39 \\ 52 & 13 & -26 \\ 26 & 13 & 39 \end{pmatrix}$$

Sumamos miembro a miembro.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos por $\frac{1}{13}$.

Despejamos A en la 2.^a ecuación:

$$A = 5B - \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 15 \\ 20 & 5 & -10 \\ 10 & 5 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

15 Dadas las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

halla dos matrices X e Y que verifiquen:

$$X - 2M = 3N; M + N - Y = I$$

$$X = 3N + 2M = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$Y = M + N - I = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

- 16** Comprueba que la matriz inversa de A es A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

- 17** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, prueba cuál de las siguientes matrices es su inversa:

$$M = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad M \text{ no es inversa de } A.$$

$$A \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad N \text{ es la inversa de } A.$$

- 18** Halla las matrices inversas de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$|A| = 2 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$|B| = -4 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$|C| = 1 \rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Página 69

Rango de una matriz

- 19** Estudia el rango de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 12 & -24 & 36 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 12 & -24 & 36 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 12 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(C) = 1$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ 6 \cdot (3.^a) - 9 \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(D) = 2$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ -2 \cdot (3.^a) + (2.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(E) = 3$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(F) = 3$$

s20 Estudia el rango de estas matrices y di, en cada caso, el número de columnas que son L.I.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 5 & 27 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 41 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

Hay 3 columnas linealmente independientes en A .

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(B) = 2$$

Hay 2 columnas linealmente independientes en B .

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} (3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a) \\ (4.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \\ (4.^a) - (2.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(C) = 2$$

Hay dos columnas linealmente independientes en C .

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(D) = 4$$

Las cuatro columnas de D son linealmente independientes.

PARA RESOLVER

s21 Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz unidad

de orden 3. Utiliza esa igualdad para calcular A^4 .

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= A \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\ 2A - I &= \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} A^2 = 2A - I$$

Calculamos A^4 :

$$\begin{aligned} A^4 &= (A^2)^2 = (2A - I)^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I^2 = \\ &= 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I = \\ &= 4 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

s22 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla una matriz B tal que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}AB = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Calculamos } A^{-1}: |A| = -3; A^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$B = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

s23 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, prueba que A^3 es la matriz nula.

Demuestra después que la matriz $I + A + A^2$ es la matriz inversa de $I - A$.

• Multiplica $I + A + A^2$ por $I - A$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos que $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$:

$$(I + A + A^2)(I - A) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I - A^3 = I - \mathbf{0} = I.$$

Como $(I + A + A^2) \cdot (I - A) = I$, entonces $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$.

s24 Calcula A^n y B^n siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\bullet A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así, } A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Lo probamos por inducción:}$$

Acabamos de comprobar que para $n = 2$ (primer caso relevante), funciona.

Suponemos que es cierto para $n - 1$:

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n-1/7 & n-1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

Igual que en el caso anterior, para $n = 2$ se cumple.

Suponemos que es cierto para $n - 1$:

$$B^n = B^{n-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

s25 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcula $A^2, A^3, \dots, A^{128}$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I; \quad A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^{128} = A^{42 \cdot 3 + 2} = (A^3)^{42} \cdot A^2 = I^{42} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

26 Determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - kI = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

$$(A - kI)^2 = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ 2-2k & 2-2k & k^2-6k+5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow k = 1$$

27 Calcula la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

• $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) + 2 \cdot (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) - (3.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (3.^a) \\ (3.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ 2 \cdot (3.^a) - (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) : 2 \\ (3.^a) : 2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & -1/2 & 1/2 \end{array} \right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -3/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -3/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

28 Halla la matriz X en cada una de las siguientes ecuaciones:a) $A^2X - B = AX$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $ABX = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a) A^2X - B = AX \rightarrow A^2X - AX = B \rightarrow \underbrace{(A^2 - A)}_C X = B \rightarrow X = (A^2 - A)^{-1} \cdot B$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = (A^2 - A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4; \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2; \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0; \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$\text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}; [\text{Adj}(C)]^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (A^2 - A)^{-1}$$

$$X = C^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & 5/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Como $A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $BX = A^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = B^{-1} A^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Además, sabemos que $B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$.

Tenemos que $AB = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ y que $|AB| = -12 + 9 = -3$.

Así:

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = (AB)^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

29 Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro k :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(M) = 3 \text{ para cualquier valor de } k.$$

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ 2 \cdot (3.^a) - (1.^a)}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1+2k & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 1+2k=0 \text{ si } k = -\frac{1}{2}$$

• Si $k = -\frac{1}{2}$, $\text{ran}(N) = 2$.

• Si $k \neq -\frac{1}{2}$, $\text{ran}(N) = 3$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (3.^a) : 4 \\ (2.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$$

• Si $k = -2 \rightarrow \text{ran}(P) = 1$

• Si $k \neq -2 \rightarrow \text{ran}(P) = 2$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (1.^a)}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 3 & k+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (2.^a)}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

• Si $k = 2 \rightarrow \text{ran}(Q) = 2$

• Si $k \neq 2 \rightarrow \text{ran}(Q) = 3$

s30 En un edificio hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes.

Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.

a) Escribe una matriz que describa el número y el tamaño de las ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.

b) Calcula la matriz que expresa el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda.

$$\begin{array}{c} \text{P} \quad \text{G} \\ \text{L3} \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{L4} \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{L5} \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array}; \begin{array}{c} \text{C} \quad \text{B} \\ \text{P} \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{G} \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{P} \quad \text{G} \\ \text{L3} \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{L4} \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{L5} \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{C} \quad \text{B} \\ \text{P} \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{G} \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \text{C} \quad \text{B} \\ \text{L3} \begin{pmatrix} 20 & 34 \end{pmatrix} \\ \text{L4} \begin{pmatrix} 26 & 44 \end{pmatrix} \\ \text{L5} \begin{pmatrix} 32 & 54 \end{pmatrix} \end{array}$$

Página 70

s31 Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O).

De cada tipo se hacen cuatro modelos: M_1 , M_2 , M_3 y M_4 .

$$\begin{array}{c} \text{T} \quad \text{O} \\ \text{M}_1 \begin{pmatrix} 300 & 200 \end{pmatrix} \\ \text{M}_2 \begin{pmatrix} 400 & 250 \end{pmatrix} \\ \text{M}_3 \begin{pmatrix} 250 & 180 \end{pmatrix} \\ \text{M}_4 \begin{pmatrix} 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array}$$

Esta tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo.

El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2% en el modelo M_1 , el 5% en el M_2 , el 8% en el M_3 y el 10% en el M_4 .

Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas, que se producen.

$$\begin{array}{c} \text{T} \quad \text{O} \\ \text{M}_1 \begin{pmatrix} 300 & 200 \end{pmatrix} \\ \text{M}_2 \begin{pmatrix} 400 & 250 \end{pmatrix} \\ \text{M}_3 \begin{pmatrix} 250 & 180 \end{pmatrix} \\ \text{M}_4 \begin{pmatrix} 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{T} \quad \text{O} \\ \text{D} \begin{pmatrix} 0,02 & 0,05 & 0,08 & 0,1 \end{pmatrix} \\ \text{B} \begin{pmatrix} 0,98 & 0,95 & 0,92 & 0,9 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \text{T} \quad \text{O} \\ \text{D} \begin{pmatrix} 96 & 60,9 \end{pmatrix} \\ \text{B} \begin{pmatrix} 1354 & 869,1 \end{pmatrix} \end{array} \approx \begin{array}{c} \text{T} \quad \text{O} \\ \text{D} \begin{pmatrix} 96 & 61 \end{pmatrix} \\ \text{B} \begin{pmatrix} 1354 & 869 \end{pmatrix} \end{array}$$

s32 Halla todas las matrices X de la forma $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 1 \\ a + b = 0 \\ b^2 = 1 \\ b + c = 0 \\ c^2 = 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} a = \pm 1 \\ a = -b \\ b = \pm 1 \\ c = -b \\ c = \pm 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 1 \rightarrow b = -1 \rightarrow c = 1 \\ a = -1 \rightarrow b = 1 \rightarrow c = -1 \end{array}$$

Hay dos soluciones: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

s33 Calcula una matriz X que conmute con la matriz A , esto es, $A \cdot X = X \cdot A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Después, calcula $A^2 + 2A^{-1} \cdot X$.

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \\ X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{ han de ser iguales.}$$

$$\left. \begin{array}{l} a + c = a \\ b + d = a + b \\ d = c + d \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} c = 0 \\ d = a \\ c = 0 \end{array} \right\} X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} A^2 + 2A^{-1} \cdot X &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & a \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1+2a & 2+2b-2a \\ 0 & 1+2a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Observamos que la matriz que hemos obtenido también es de las que conmutan con A).

s34 Sean A y B las matrices dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Encuentra las condiciones que deben cumplir los coeficientes a , b , c para que se verifique $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Para $a = b = c = 1$, calcula B^{10} .

$$a) A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a + 2c & 5b + 2c & 0 \\ 2a + 5c & 2b + 5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a + 2b & 2a + 5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que $A \cdot B = B \cdot A$, debe cumplirse que:

$$\left. \begin{array}{l} 5a + 2c = 5a + 2b \\ 5b + 2c = 2a + 5b \\ 2a + 5c = 7c \\ 2b + 5c = 7c \end{array} \right\} \begin{array}{l} c = b \\ c = a \\ 7c = 7c \\ 7c = 7c \end{array} \quad a = b = c$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 & 0 \\ 2^2 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = B^2 \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así, } B^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

s35 Una matriz cuadrada se llama *ortogonal* cuando su inversa coincide con su traspuesta. Calcula x e y para que esta matriz A sea ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

☛ Haz $A \cdot A^t = I$.

Si $A^{-1} = A^t$, ha de ser $A \cdot A^t = I$; entonces:

$$\begin{aligned} A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 9/25 + x^2 & (3/5)y - (3/5)x & 0 \\ (3/5)y - (3/5)x & y^2 + 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{9}{25} + x^2 = 1 \\ \frac{3}{5}y - \frac{3}{5}x = 0 \\ y^2 + \frac{9}{25} = 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x^2 = \frac{16}{25} \\ y = x \\ y^2 = \frac{16}{25} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = \pm \frac{4}{5} \\ y = x \end{array} \right\}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = \frac{4}{5}$, $y_1 = \frac{4}{5}$; $x_2 = -\frac{4}{5}$, $y_2 = -\frac{4}{5}$

s36 Resuelve la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

CUESTIONES TEÓRICAS

s37 Justifica por qué no es cierta la igualdad:

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$$

cuando A y B son dos matrices cualesquiera.

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

Para que la igualdad fuera cierta, tendría que ser $AB = BA$; y, en general, no es cierto para dos matrices cualesquiera.

s38 Sea A una matriz de dimensión 2×3 :

a) ¿Existe una matriz B tal que $A \cdot B$ sea una matriz de una sola fila?

b) ¿Y para $B \cdot A$?

Pon un ejemplo para cada caso, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) No; $A \cdot B$ tendrá 2 filas necesariamente. Por ejemplo, tomando $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ tenemos que: } A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) Sí; si tomamos una matriz de dimensión 1×2 (ha de tener dos columnas para poder multiplicar $B \cdot A$), el resultado tendrá una sola fila. Por ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = (1 \ 2), \text{ entonces } B \cdot A = (5 \ 2 \ 0)$$

s39 Sean A y B dos matrices cuadradas de igual orden. Si A y B son simétricas, ¿lo es también su producto $A \cdot B$?

Si la respuesta es afirmativa, justifícala, y si es negativa, pon un contraejemplo.

Si A y B son dos matrices cuadradas de igual tamaño, simétricas, su producto, $A \cdot B$, no tiene por qué ser una matriz simétrica. Por ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ no es simétrica.}$$

s40 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, prueba que se verifica $A^3 + I = 0$ y utiliza

esta igualdad para obtener A^{10} .

☛ **Haz $A^{10} = (A^3)^3 \cdot A$ y ten en cuenta que $A^3 = -I$.**

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^3 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos A^{10} (teniendo en cuenta que $A^3 + I = 0 \rightarrow A^3 = -I$):

$$A^{10} = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -I \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

s41 Sea A una matriz de dos filas y dos columnas cuyo rango es 2. ¿Puede variar su rango si le añadimos una fila o una columna?

No, porque el número de filas linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes. Si añadimos una fila, A seguiría teniendo dos columnas; y si añadimos una columna, A seguiría teniendo dos filas. Por tanto, el rango seguirá siendo 2.

s42 Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3.

a) ¿Cómo puede variar el rango si quitamos una columna?

b) Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante será 2?

a) Tendrá rango 2.

b) No. Podría ser 2 ó 1. Por ejemplo:

Si en $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ suprimimos la 1.^a fila y la 3.^a columna, queda $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

que tiene rango 1 (A tenía rango 3).

43 Sea A una matriz cuadrada de orden 3 tal que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (A es una matriz diagonal).

Prueba que el producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$, su producto es:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$, que también es una matriz diagonal.

s44 Definimos la *traza* de una matriz cuadrada A de orden 2 como:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22}$$

Prueba que si A y B son dos matrices cuadradas de orden 2, entonces:

$$tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$$

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$; entonces:

$$\left. \begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow tr(A \cdot B) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ B \cdot A &= \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow tr(B \cdot A) = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{aligned} \right\}$$

Por tanto, $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.

Página 71

PARA PROFUNDIZAR

45 Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden.

De la igualdad $A \cdot B = A \cdot C$ no puede deducirse, en general, que $B = C$.

a) Prueba esta afirmación buscando dos matrices B y C distintas tales que:

$$A \cdot B = A \cdot C, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) ¿Qué condición debe cumplir la matriz A para que de $A \cdot B = A \cdot C$ se pueda deducir que $B = C$?

a) Por ejemplo, si $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot C, \text{ pero } B \neq C.$$

b) Debe existir A^{-1} .

s46 a) Si A es una matriz regular de orden n y existe una matriz B tal que $AB + BA = 0$, probar que $BA^{-1} + A^{-1}B = 0$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, halla una matriz $B \neq 0$ tal que $AB + BA = 0$.

a) Multiplicamos por A^{-1} por la izquierda en la igualdad:

$$AB + BA = 0 \rightarrow A^{-1}AB + A^{-1}BA = 0 \rightarrow B + A^{-1}BA = 0$$

Ahora multiplicamos la igualdad obtenida por A^{-1} por la derecha:

$$BA^{-1} + A^{-1}BAA^{-1} = 0 \rightarrow BA^{-1} + A^{-1}B = 0$$

b) Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a - 2c & -3b - 2d \\ 4a + 3c & 4b + 3d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a + 4b & -2a + 3b \\ -3c + 4d & -2c + 3d \end{pmatrix}$$

Así:

$$AB + BA = \begin{pmatrix} -6a + 4b - 2c & -2a - 2d \\ 4a + 4d & 4b - 2c + 6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} -6a + 4b - 2c = 0 \\ -2a - 2d = 0 \\ 4a + 4d = 0 \\ 4b - 2c + 6d = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3a - 2b + c = 0 \\ a + d = 0 \\ a + d = 0 \\ 2b - c + 3d = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} d = -a \\ 3a - 2b + c = 0 \\ c = -3a + 2b \end{array}$$

Por tanto: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -3a + 2b & -a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$

Por ejemplo, con $a = 1$ y $b = 1$, queda $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

s47 Halla una matriz cuadrada de orden 2, distinta de I y de $-I$, cuya inversa coincida con su traspuesta.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si su inversa, A^{-1} , coincide con su traspuesta, A^t , ha de tenerse que

$A \cdot A^t = I$. Es decir:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{array} \right\} \text{ Por ejemplo, obtenemos, entre otras: } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

s48 a) Obtén la forma general de una matriz de orden 2 que sea antisimétrica ($A^t = -A$).

b) Los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica son ceros. Demuéstralo.

a) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ y $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.

Para que $A^t = -A$, ha de ser:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a = -a \\ c = -b \\ b = -c \\ d = -d \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 0 \\ c = -b \\ d = 0 \end{array}$$

Por tanto, una matriz *antisimétrica de orden 2* es de la forma $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

b) • Si $A = (a_{ij})_{n \times n}$, los elementos de su diagonal principal son a_{ii} , $i = 1, 2, \dots, n$.

• La traspuesta es $A^t = (a_{ji})_{n \times n}$; los elementos de su diagonal principal también serán a_{ii} (los mismos que los de A).

• La opuesta de la traspuesta es $-A^t = (a_{ji})_{n \times n}$; los elementos de su diagonal principal serán $-a_{ii}$.

• Para que $-A^t = A$, han de ser $a_{ii} = -a_{ii}$; por tanto, $a_{ii} = 0$, $i = 1, \dots, n$ (es decir, los elementos de la diagonal principal son ceros).

- 49** Una matriz cuadrada es *mágica* de suma k cuando la suma de los elementos de cada fila, de cada columna y de las dos diagonales es, en todos los casos, igual a k .

¿Cuánto vale k si una matriz mágica es antisimétrica? Halla todas las matrices mágicas antisimétricas de orden 3.

- Hemos visto en el ejercicio anterior que, en una *matriz antisimétrica*, los elementos de la diagonal principal son ceros. Por tanto, si la matriz es *antisimétrica*, $k = 0$.
- Buscamos las matrices *mágicas antisimétricas de orden 3*: (sabemos que, en este caso, la suma ha de ser cero).

Veamos cómo es una *matriz antisimétrica de orden 3*:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot A \text{ antisimétrica si } A^t = -A; \text{ es decir:}$$

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = -a & b = -d & c = -g \\ d = -b & e = -e & f = -h \\ g = -c & h = -f & i = -i \end{cases}$$

Luego, una matriz *antisimétrica de orden 3* es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$$

Para que A sea *mágica*, ha de tenerse que:

$$\left. \begin{array}{l} b + c = 0 \\ -b + f = 0 \\ -c - f = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -b - c = 0 \\ b - f = 0 \\ c + f = 0 \end{array} \right\}, \text{ es decir: } \begin{cases} c = -b \\ f = b \end{cases}$$

Por tanto, las *matrices mágicas antisimétricas de orden 3* son de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & -b \\ -b & 0 & b \\ b & -b & 0 \end{pmatrix}, \text{ con } b \in \mathbb{R}.$$

- 50** Obtén todas las matrices mágicas simétricas de orden 3 para $k = 0$.

Una *matriz simétrica de orden 3* es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \text{ (pues } A = A^t). \text{ Para que sea mágica con } k = 0, \text{ ha de ser:}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a + b + c & = & 0 \\ b & + d + e & = 0 \\ c & + e + f & = 0 \\ a & + d + f & = 0 \\ 2c + d & = & 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \\ (5.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) + (2.^a) \\ (5.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) + (3.^a) \\ (5.^a) - 2 \cdot (3.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) : 2 \\ (5.^a) + (4.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a + b + c & = & 0 \rightarrow a = -b - c = -f \\ b & + d + e & = 0 \rightarrow b = -e = f \\ c & + e + f & = 0 \rightarrow c = 0 \\ d + e + f & = & 0 \rightarrow e = -f \\ 3d & = & 0 \rightarrow d = 0 \end{array} \right.$$

Por tanto, una *matriz mágica simétrica de orden 3 con $k = 0$* , es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} -f & f & 0 \\ f & 0 & -f \\ 0 & -f & f \end{pmatrix}, \text{ con } f \in \mathbb{R}$$

51 Obtén todas las matrices mágicas simétricas de orden 3 para $k = 3$.

Una matriz *simétrica* de orden 3 es de la forma: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$

Para que sea *mágica* con $k = 3$, ha de ser:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a + b + c & = & 3 \\ b & + d + e & = 3 \\ c & + e + f & = 3 \\ a & + d & + f = 3 \\ 2c + d & = & 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \\ (5.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) + (2.^a) \\ (5.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) + (3.^a) \\ (5.^a) - 2 \cdot (3.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) : 2 \\ (5.^a) + (4.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a + b + c & = & 3 \rightarrow a = 3 - b - c = 3 - f - 1 = 2 - f \\ b & + d + e & = 3 \rightarrow b = 3 - d - e = 3 - 1 - 2 + f = f \\ c & + e + f & = 3 \rightarrow c = 3 - e - f = 3 - 2 + f - f = 1 \\ d + e + f & = & 3 \rightarrow e = 3 - d - f = 3 - 1 - f = 2 - f \\ 3d & = & 3 \rightarrow d = 1 \end{array} \right.$$

Por tanto, una *matriz mágica simétrica de orden 3 con $k = 3$* , es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 2-f & f & 1 \\ f & 1 & 2-f \\ 1 & 2-f & f \end{pmatrix}, \text{ con } f \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo, con $f = 0$, queda: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

AUTOEVALUACIÓN

1. Calcula la matriz $M = P^2 - 3P - 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left. \begin{aligned} P^2 &= P \cdot P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \\ 3P &= 3 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \\ 2I &= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ M &= \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcula las matrices A y B que verifican:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2A - 2B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Multiplicamos por $\frac{1}{2}$ los dos miembros de la segunda ecuación y sumamos después las dos ecuaciones:

$$A - B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B + (A - B) = 2A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Despejamos B en la primera ecuación:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. a) Halla la inversa de la matriz siguiente: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) Calcula la matriz X que verifica $XA = B$, siendo A la matriz anterior y $B = (1 \ -1 \ 0)$.

Resolución

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) - 2 \cdot (2.^a) \\ (3.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3.^a) - 2 \cdot (1.^a)} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) - (3.^a) \\ (2.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ A^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) $XA = B \rightarrow XAA^{-1} = BA^{-1} \rightarrow X = BA^{-1}$

$$X = (1 \ -1 \ 0) \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (3 \ -7 \ -1)$$

4. Determina a y b de forma que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = A$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - a & -2 - b \\ 2a + ab & -a + b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \rightarrow \begin{pmatrix} 4 - a & -2 - b \\ 2a + ab & -a + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 4 - a = 2 & \rightarrow a = 2 \\ -2 - b = -1 & \rightarrow b = -1 \\ 2a + ab = a & \rightarrow 4 - 2 = 2 \\ -a + b^2 = b & \rightarrow -2 + 1 = -1 \end{cases}$$

Por tanto, $a = 2$ y $b = -1$.

5. Halla el valor de k para que el rango de la matriz A sea 2.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a)}} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a)}} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k - 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para que $\text{ran}(A) = 2$, ha de ser $k - 2 = 0$; es decir, $k = 2$.

6. Razona si es posible añadir una fila a la matriz de forma que la nueva matriz tenga rango 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos el rango de la matriz dada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene rango 2; luego, añadiendo una fila, la matriz resultante no podrá tener rango 4 (tendría rango 2 ó 3).

7. Calcula $A^{22} - 12A^2 + 2A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{22} = \begin{pmatrix} 1 & 22a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^{22} - 12A^2 + 2A &= \begin{pmatrix} 1 & 22a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 12 \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 12 + 2 & 22a - 24a + 2a \\ 0 & 1 - 12 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8. La tabla adjunta muestra la cantidad de vitaminas A, B y C que posee cada uno de los productos P, Q, R, S por unidad de peso:

$$\begin{array}{c} \text{A} \quad \text{B} \quad \text{C} \\ \text{P} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{Q} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{R} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{S} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- a) Queremos elaborar una dieta en la que entren todos los productos, de manera que contenga 20 unidades de vitamina A, 25 de vitamina B y 6 de C.

¿Es posible hacerlo? ¿De cuántas formas?

b) Obtén, en función de la cantidad de Q que entre en la dieta, las cantidades de los otros productos.

¿Entre qué valores habría de estar la cantidad de producto Q?

a) Llamemos $(x \ y \ z \ t)$ a las cantidades de cada uno de los productos P, Q, R y S que intervienen en la dieta.

Para que la dieta tenga las cantidades de vitaminas requeridas, debe cumplirse la siguiente igualdad:

$$\begin{matrix} & & & & & A & B & C \\ P & Q & R & S & \cdot & \begin{matrix} P \\ Q \\ R \\ S \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} A & B & C \\ 20 & 25 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Multiplicando e igualando las matrices, llegamos al sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z + t = 20 \\ 2x + z + t = 25 \\ 2y + t = 6 \end{cases}$$

Mediante el método de Gauss, podemos comprobar que el sistema es *compatible indeterminado*.

Por ello, pueden elaborarse infinitas dietas de los productos P, Q, R, S con las vitaminas exigidas.

b) Resolvemos el sistema en función de y (cantidad de producto Q que interviene en la dieta).

Hacemos $y = \lambda$ y obtenemos las soluciones $(8 + \lambda, \lambda, 3, 6 - 2\lambda)$, que nos indican la cantidad de P, Q, R y S que forman cada una de las posibles dietas.

Para que estas cantidades no sean negativas, λ debe variar entre 0 y 3. Es decir: $0 < \lambda < 3$