

TEMA 3: APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Monotonía: Crecimiento y decrecimiento

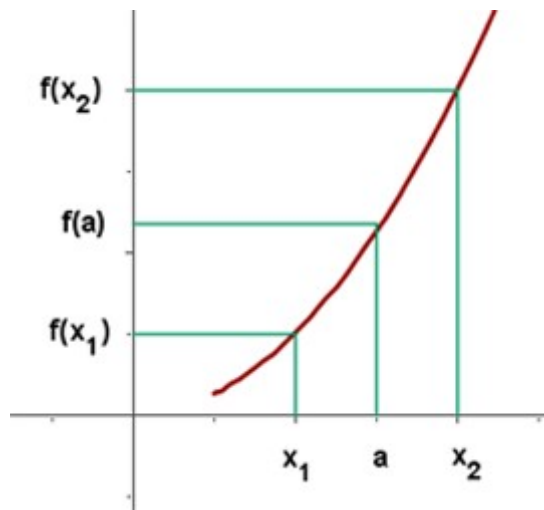
Sea $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función

Definiciones:

Diremos que f es *creciente* en $x = a$ si existe un entorno de a para el que se cumple:

$f(a) < f(x)$ para todo punto x de dicho entorno y con $a < x$

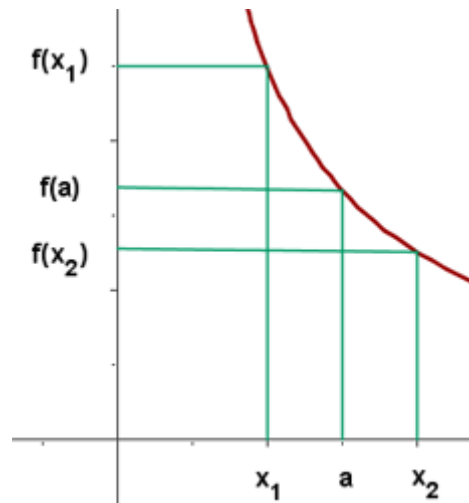
$f(a) > f(x)$ para todo punto x de dicho entorno y con $a > x$



Diremos que f es *decreciente* en $x = a$ si existe un entorno de a para el que se cumple:

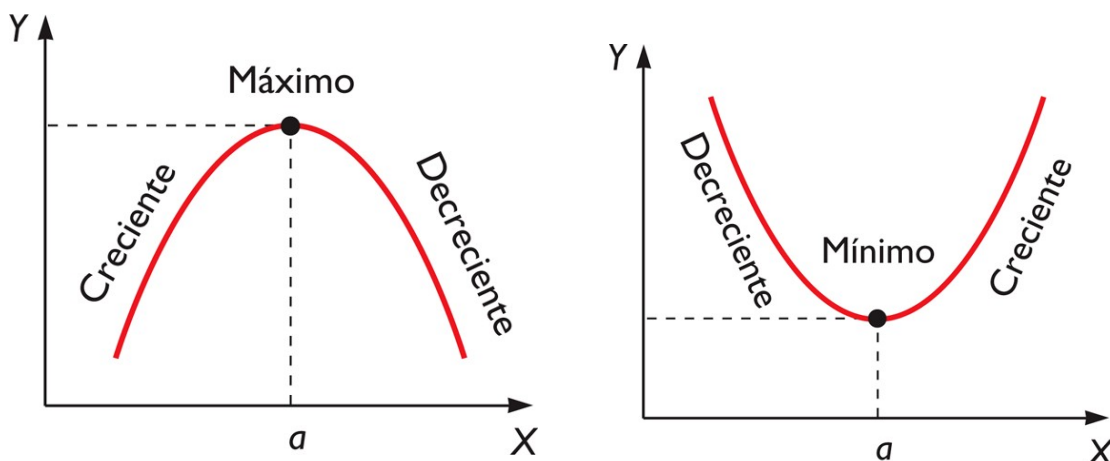
$f(a) > f(x)$ para todo punto x de dicho entorno y con $a < x$

$f(a) < f(x)$ para todo punto x de dicha entorno y con $a > x$



Diremos que f presenta un *máximo relativo* (o local) en el punto $x = a$ si existe un entorno de a en el que $f(x) < f(a)$ para todo punto x de ese entorno

Diremos que f presenta un *mínimo relativo* (o local) en el punto $x = a$ si existe un entorno de a en el que $f(x) > f(a)$ para todo punto x de ese entorno



Es decir, un máximo relativo es un punto donde la función pasa de crecer a decrecer, y un mínimo es un punto donde la función pasa de decrecer a crecer

Relación entre la monotonía y la derivada

Se f es una función derivable en el punto $x = a$ se cumple que:

- i) Si $f'(a) > 0$ entonces f es creciente en el punto $x = a$
- ii) Si $f'(a) < 0$ entonces f es decreciente en el punto $x = a$
- iii) Si f tiene un máximo o mínimo relativo en $x = a$ entonces $f'(a) = 0$

Observaciones:

· En los puntos donde la función no sea derivable, no podemos utilizar esta propiedad, en estos casos habrá que hacer un estudio de que ocurre en las cercanías de dicho punto.

· El punto iii) no garantiza que si $f'(a) = 0$ entonces a sea un extremo (máximo o mínimo) relativo. Como por ejemplo, la función $f(x) = x^3$, cumple que $f'(0) = 0$ pero el punto $x = 0$ no hay máximo ni mínimo relativo. Para asegurar que hay un extremo tendremos que comprobar si hay un cambio de decrecer a crecer o viceversa. También podemos utilizar la siguiente propiedad:

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} f'(a) > 0 : a \text{ mínimo} \\ f'(a) < 0 : a \text{ máximo} \end{array} \right\} f'(a) = 0 \left\{ \begin{array}{l} f''(a) > 0 : f \text{ creciente en } a \\ f''(a) < 0 : f \text{ decreciente en } a \end{array} \right. \\
 \left. \left. \left. \left. \left. \begin{array}{l} f''(a) > 0 : f \text{ creciente en } a \\ f''(a) < 0 : f \text{ decreciente en } a \end{array} \right\} f''(a) = 0 \left\{ \begin{array}{l} f'''(a) > 0 : a \text{ mínimo} \\ f'''(a) < 0 : a \text{ máximo} \\ f'''(a) = 0 \text{ (etc...)} \end{array} \right. \right. \right. \right. \right.
 \end{array}$$

Esquema para estudiar el crecimiento de una función

- 1) Calculamos el dominio de la función
- 2) Calculamos la derivada de la función
- 3) Calculamos los puntos donde la derivada es cero, es decir, resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$
- 4) Estudiamos el signo que tiene la derivada en cada uno de los intervalos en que queda dividida la recta real al considerar los puntos críticos (puntos con derivada cero) y los puntos donde la función no es derivable o no es continua

Ejemplo: Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, la función es continua y derivable en el dominio por ser una función racional

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2} \quad ; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Pto de control	$f'(-3) = 6/25$	$f'(-1) = 2/9$	$f'(1) = -2/9$	$f'(3) = -6/25$
Signo de f'	+	+	-	-
Comportamiento de f	Crece	Crece	Decrece	Crece

Por tanto : La función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

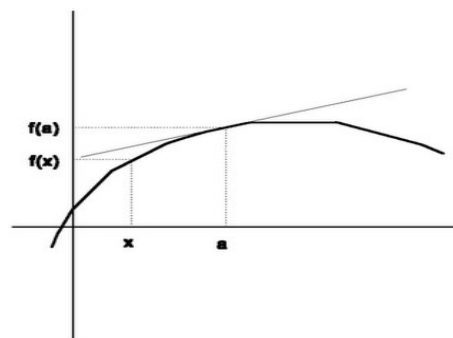
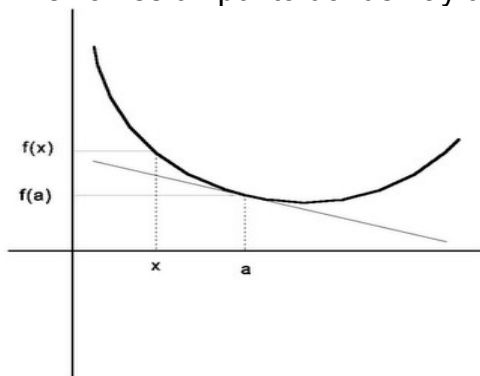
La función es decreciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

La función tiene un máximo relativo en el punto $(0, f(0)) = (0, -1/4)$

Curvatura de una función. Puntos de inflexión

Definiciones: Tenemos una curva $y = f(x)$, trazamos la recta tangente a ella en un punto P, que llamaremos $t(x)$, entonces:

- Si en las cercanías de P es $f(x) > t(x)$ entonces la curva es *convexa* en P
- Si en las cercanías de P es $f(x) < t(x)$ entonces la curva es *cóncava* en P
- Si la tangente atraviesa la curva en P, es decir, si a la izquierda de P es $f(x) < t(x)$ y a la derecha es $f(x) > t(x)$ o viceversa, entonces P es un *punto de inflexión*. Un punto de inflexión es un punto donde hay un cambio de cóncava a convexa o viceversa.



Relación entre la curvatura y la derivada

Se f es una función definida en $x = a$ y tal que existe $f''(a)$ entonces:

- i) Si $f''(a) > 0$ entonces f es convexa en a
- ii) Si $f''(a) < 0$ entonces f es cóncava en a
- iii) Si f tiene un punto de inflexión en a entonces $f''(a) = 0$

Esquema para estudiar la curvatura de una función

- 1) Calculamos el dominio de la función
- 2) Calculamos la derivada segunda de la función
- 3) Calculamos los puntos donde la derivada segunda es cero, es decir, resolvemos la ecuación $f''(x) = 0$
- 4) Estudiamos el signo que tiene la derivada segunda en cada uno de los intervalos en que queda dividida la recta real al considerar los puntos con derivada segunda cero y los puntos donde la función no es derivable o no es continua

Ejemplo: $f(x) = x^3 + 3x^2$

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$; $f'(x) = 3x^2 + 6x$; $f''(x) = 6x + 6$; $6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
Pto de control	$f''(-2) = -6$	$f''(0) = 6$
Signo de f''	-	+
Comportamiento de f	Cóncava	Convexa

Por tanto: f es cóncava en $(-\infty, -1)$

f es convexa en $(-1, \infty)$

f tiene un punto de inflexión en el punto $(-1, f(-1)) = (-1, 2)$

Problemas de optimización

Con mucha frecuencia aparecen problemas físicos, geométricos, económicos, biológicos, ... en los que se trata de optimizar (encontrar el valor máximo o mínimo) una función (hacer máximo un volumen, unos beneficios, una población; hacer mínimos unos costos, una área,...). En este tipo de problemas interesa calcular el máximo o mínimo absoluto en un cierto conjunto.

Los pasos más razonables para resolver problemas de este tipo serían:

- 1) Se nombran las variables correspondientes y se escribe la función que hay que optimizar
- 2) Esta función, normalmente, dependerá de más de una variable. Se busca una relación entre ellas, despejando la más cómoda y escribiendo la función a optimizar en términos de una sola variable
- 3) Se establece el conjunto en el que, por el contexto del problema, se moverá la variable elegida. Normalmente será un intervalo del tipo $[a, b]$, por lo que si la función es continua tenemos garantizado que existen máximo y mínimo absoluto.
- 4) Se busca el máximo o el mínimo de f en $[a, b]$. Para ello se puede proceder:
 - a) Si f es derivable en $[a, b]$, el máximo y mínimo absoluto se alcanzará en un máximo o mínimo relativo o en un punto de los extremos del intervalo. Por lo tanto, se calculan los extremos relativos comprendidos entre a y b , $x_1, x_2, \dots, x_n$ y se calculan $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$; el mayor será el máximo absoluto y el menor será el mínimo absoluto
 - b) Si hay algún punto de $[a, b]$ en el que f no sea derivable pero sí continua, calcularemos además el valor de f en ese punto, pues podría ser un extremo absoluto
 - c) Si f no es continua en algún punto de $[a, b]$ se estudiará el comportamiento de la función en las cercanías de dicho punto

Ejemplo: La suma de dos números no negativos es 36. Halla dichos números para que la suma de sus cuadrados sea lo mas pequeña posible

Solución

Sea x e y dichos números, se tiene $x + y = 36$, de donde $y = 36 - x$

a) Definimos $f(x, y) = x^2 + y^2$, como $y = 36 - x$, podemos sustituir en f con lo q dependerá solo de una variable, $f(x) = x^2 + (36 - x)^2$, y podremos aplicar la condición necesaria de extremo para funciones derivables.

Derivando:

$$f'(x) = 2x - 2(36 - x), \text{ de donde } f'(x) = 4x - 72$$

Para que f tenga un mínimo la derivada debe darnos 0, por lo que $4x - 72 = 0$ y despejando $x = 18$

f es continua en el intervalo $[0, 36]$, y $f(0) = f(36) = (36)^2 > f(18) = 2 \cdot (18)^2$ por lo tanto en $x = 18$ tiene el mínimo absoluto.