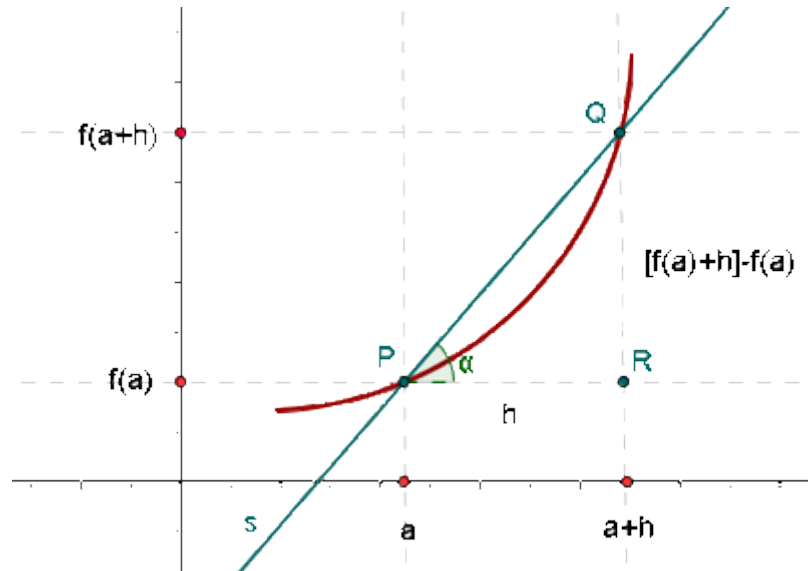


TEMA 2: DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

Tasa de variación

Dada una función $y = f(x)$, se define la tasa de variación en el intervalo $[a, a+h]$ como:

$f(a+h) - f(a)$ y se define la tasa de variación media como: $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$



La tasa de variación de una función da una primera idea de la rapidez con que crece o decrece, aunque no lo suficientemente precisa. La tasa de variación media responde a la pregunta: ¿Cuántas unidades crece (o decrece) la variable y por cada una que crece la variable x?. La respuesta ven dada por el cociente o razón incremental que representa la

tasa de variación media: $TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Muchas veces es interesante conocer el comportamiento de la función en un punto, para eso, se hacen los intervalos $[a, a+h]$ cada vez más pequeños, es decir, se hace que h tienda a cero, de esta forma obtendríamos la tasa de variación instantánea, por lo tanto, la tasa de variación instantánea será el límite de las tasas de variación media cuando los intervalos se hacen cada vez más pequeños, y eso es lo que llamaremos derivada de la función en el punto a

Derivada de una función en un punto

Diremos que una función es derivable en el punto $x = a$ cuando $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ es un número real. Este número es la derivada de f en a y se designa por $f'(a)$

Sí hacemos $x = a+h$, entonces $h = x - a$ y cuando $h \rightarrow 0$ entonces $x \rightarrow a$, sustituyendo en la definición de derivada se obtiene otra forma de escribir la derivada:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Interpretación física de la derivada

Cuando dos magnitudes x e y están relacionadas por una función, $y = f(x)$, entonces la derivada determina el ritmo de cambio de y respecto a x , es decir, como de rápido crece o decrece y cuando x varía.

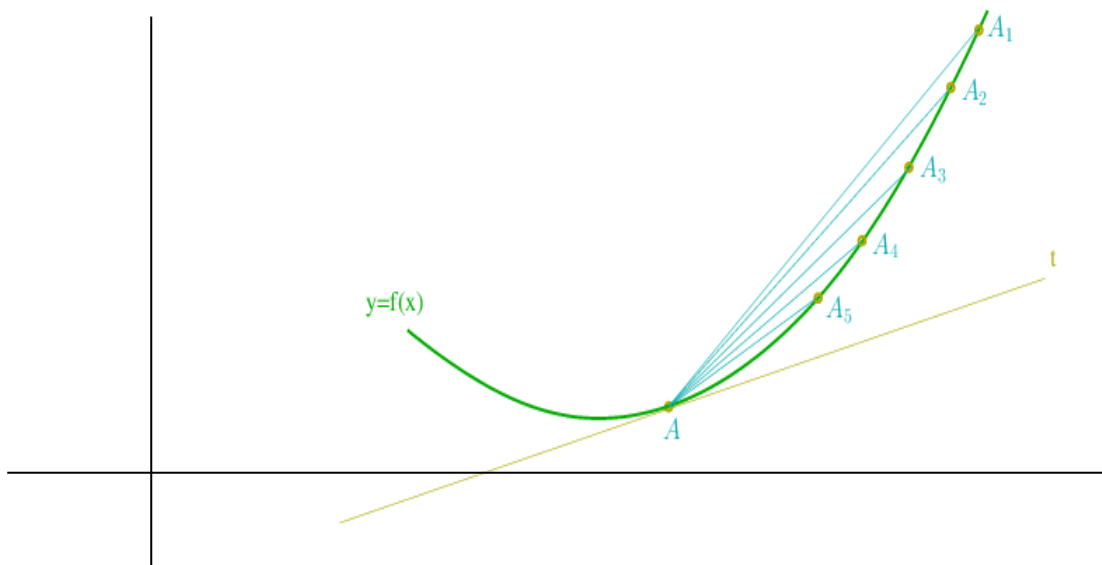
El ejemplo más destacado en física aparece cuando se considera a y como el espacio que recorre un móvil y a x el tiempo transcurrido, si $y(x)$ es la posición de un móvil en un instante determinado, la velocidad media en un intervalo $[x, x + h]$ y la velocidad instantánea en el instante x serán:

$$V_m = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \quad v_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

obtenemos así que la velocidad instantánea es la derivada del espacio respecto al tiempo. De la misma forma, obtendríamos que la aceleración instantánea de un móvil es la derivada de la velocidad respecto al tiempo.

Interpretación geométrica de la derivada

Tenemos una función $y = f(x)$ y un punto $A(a, f(a))$. Consideramos un conjunto de puntos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ aproximándose al punto A . Si los puntos A_i tienden a A , las rectas secantes $AA_1, AA_2, \dots, AA_n, \dots$ se aproximan a una recta t que coincide con la idea intuitiva de recta tangente a la gráfica de la función en el punto A . Por lo tanto, la recta tangente a una curva en el punto A es la posición límite, si existe, de las rectas secantes determinadas por A y A_n cuando A_n se aproxima a A .



Las rectas secantes que pasan por A quedan completamente determinadas por su pendiente, ya que el punto A es fijo. Si $A(a, f(a))$ y $A_i(x_i, f(x_i))$ son las coordenadas de A y un punto cualquiera A_i , la pendiente de la recta secante AA_i será: $m_i = \frac{f(x_i) - f(a)}{x_i - a}$ (tasa de variación media entre A y A_i)

Si los puntos A_i se aproximan a A entonces las abscisas x_i se aproximarán al punto a . Por lo tanto, se llamamos m_t a la pendiente de la recta tangente en A , resulta:

$m_t = \lim_{x_i \rightarrow a} \frac{f(x_i) - f(a)}{x_i - a}$, que es la derivada de la función f en el punto $x = a$

En consecuencia: **La derivada de la función f en el punto $x = a$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = a$. $m_t = f'(a)$**

De esta manera, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ será: $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$

y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ (recta perpendicular a la tangente en ese punto) será: $y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)} \cdot (x - a)$

Derivadas laterales

Hay funciones que no son derivables en un punto $x = a$ porque aunque existen los límites laterales no son iguales (esta situación suele aparecer en funciones definidas a trozos), en este caso se habla de derivada por la derecha y derivada por la izquierda.

Una función es derivable por la izquierda en el punto $x = a$ si el siguiente límite es un número real

$$f'(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Una función es derivable por la derecha en el punto $x = a$ si el siguiente límite es un número real

$$f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

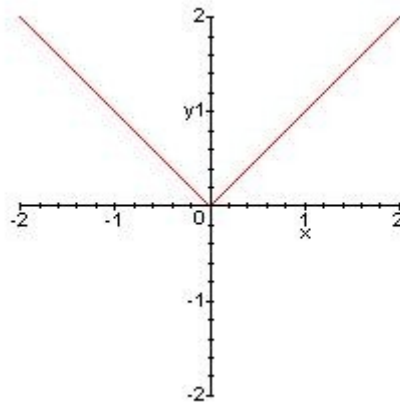
Evidentemente, para que una función sea derivable en el punto $x = a$ tienen que existir las derivadas laterales y ser iguales.

Relación entre continuidad y derivabilidad

Si una función es derivable en un punto $x = a$ entonces también es continua en ese punto. Por lo tanto, si una función no es continua en un punto tampoco es derivable en ese punto.

El recíproco no es cierto, es decir, existen funciones continuas en un punto que no son derivables en ese punto, como por ejemplo $f(x) = |x|$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$ e $f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$. Por lo tanto la función no es derivable en $x = 0$ pero sí es continua en $x = 0$

En general, en los puntos donde la función hace un “pico” (o puntos angulosos) la función no es derivable aunque sea continua.

Función derivada

Si una función f es derivable en un subconjunto D' de su dominio D , es posible definir una nueva función que asocie a cada número de D' su derivada en ese punto. Esta función así definida se llama función derivada y se denota por f'

$$\begin{aligned} f' : D' \subset D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

También se puede hablar de la función derivada de f' , es decir, de la función $(f')'(x)$, que se representa por $f''(x)$ y se denomina derivada segunda de f .

De forma análoga se definen las derivadas terceras, cuartas,... y de cualquier orden.

Reglas de derivación

Funcion simple	Derivada
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = u(x) + v(x)$	$y' = u'(x) + v'(x)$
$y = k \cdot u(x)$	$y' = k \cdot u'(x)$
$y = u(x) \cdot v(x)$	$y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$y = \frac{u(x)}{v(x)}$	$y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \log_a e$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$y = \cot x$	$y' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -[1 + \cot^2 x]$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arctan x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$

REGLA DE LA CADENA

Se suponga que f y g son de las funciones derivables, entonces:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Función compuesta	Derivada
$y = u^n(x)$	$y' = n \cdot u^{n-1}(x) \cdot u'(x)$
$y = \ln u(x)$	$y' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
$y = \log_a u(x)$	$y' = \frac{u'(x)}{u(x)} \log_a e$
$y = e^{u(x)}$	$y' = e^{u(x)} \cdot u'(x)$
$y = a^{u(x)}$	$y' = a^{u(x)} \cdot u'(x) \cdot \ln a$
$y = \operatorname{sen} u(x)$	$y' = u'(x) \cos u(x)$
$y = \cos u(x)$	$y' = -u'(x) \operatorname{sen} u(x)$
$y = \operatorname{tg} u(x)$	$y' = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$
$y = \operatorname{cotg} u(x)$	$y' = \frac{-u'(x)}{\operatorname{sen}^2 u(x)}$
$y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} u(x)$	$y' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$
$y = \operatorname{arc} \cos u(x)$	$y' = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$
$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} u(x)$	$y' = \frac{u'(x)}{1 + u^2(x)}$

Estudio de la derivabilidad de una función definida a trozos

Consideremos una función $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \leq a \\ f_2(x) & \text{se } x > a \end{cases}$ en la que $f_1(x)$ es derivable en (q, a) y $f_2(x)$ es derivable en (a, p) . Para estudiar si $f(x)$ es derivable en el punto a , seguiremos los siguientes pasos:

1. Estudiamos si f es continua en $x = a$. Si no lo fuera ya no sería derivable

2. Calculamos $f'(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} f'_1(x)$ e $f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'_2(x)$

Si los dos límites existen y son iguales entonces f es derivable en $x = a$ y ese es el valor de la derivada. En caso contrario no es derivable

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & \text{se } x \leq -1 \\ 1 & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ 2x^2 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Ejercicios

1) Calcular a y b para que la siguiente función sea continua y derivable en el dominio:

i) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{se } x < 0 \\ ax + b & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ x^3 - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$ ii) $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \leq 0 \\ -ax + b & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 5 & \text{se } 1 < x \end{cases}$

2) Calcula los valores de a, b y c para que las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^3 + c$ pasen por el punto $(1, 2)$ y tengan en él la misma recta tangente. Calcular dicha tangente.

3) Sea $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ cx + 1 & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$. Calcular a, b y c sabiendo que f es continua en $[0, 4]$, derivable en $(0, 4)$ y $f(0) = f(4)$

4) Halla el área del triángulo formado por el eje OX y las rectas tangente y normal a la curva $y = e^{-x}$ en el punto de abscisa $x = -1$

5) Se considera $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$. Calcular a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(-2, -6)$ y admita en dicho punto una recta tangente horizontal.

6) Calcula en que puntos la recta tangente a la curva $y = x^3 - 3x + 1$ es paralela al eje X . Escribe la ecuación de dicha tangente.

7) Determinar el polinomio $P(x)$ de grado menor o igual a 3, tal que la curva $y = P(x)$ sea tangente a las rectas $y = 2 - x$, $x + y = 0$ en los puntos $x = 0$ y $x = 1$, respectivamente.

8) Se sabe que $f(x)$ definida en $[0,5]$ por $f(x) = \begin{cases} ax + bx^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ c + \sqrt{x-1}, & 2 < x \leq 5 \end{cases}$

es derivable en $(0,5)$ y $f(0) = f(5)$. Calcular a, b, c

9) Calcular los valores de a tales que las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = ax^3 + 2x^2 + 3$ en los puntos $x = 1$ y $x = -1$ sean perpendiculares entre sí.

10) Comprueba si la siguiente función es continua y derivable, $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{se } x > 0 \end{cases}$

11) Calcular el valor de k para que la función $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + k}$ tenga un único punto de tangente horizontal.

12) Calcula a y b para que la siguiente función sea continua en $\mathbb{R}$. Para los valores obtenidos estudia la derivabilidad de f .

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{se } x \leq -1 \\ ax + b & \text{se } -1 < x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{se } 0 \leq x \end{cases}$$

13) Calcula k para que la siguiente función sea derivable en su dominio

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ k(1 - e^{1-x}) & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

14) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = \frac{1}{1 + |x|}$

15) Estudiar la derivabilidad de la función:

a) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$.

b) $f(x) = x|x-1|$