

Dos sistemas son equivalentes cuando tienen el mismo conjunto solución.
Transformaciones equivalentes:

- Multiplicar o dividir todos los términos de una ecuación por un mismo número distinto de cero
- Intercambiar la posición de las ecuaciones
- Si dos ecuaciones son iguales o proporcionales se puede eliminar una de ellas
- Si una ecuación es combinación lineal de otras se puede eliminar
- Sumar una ecuación multiplicada por una constante $k \neq 0$ a otra

Sistemas homogéneos

Si todos los términos independientes son cero se dice que el sistema es homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right.$$

Es evidente que un sistema homogéneo siempre tiene solución, ya que por lo menos tiene la llamada solución trivial $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$. Por lo tanto, los sistemas homogéneos siempre son compatibles, y serán determinados (si solo tienen la solución trivial) o indeterminados (si tienen infinitas soluciones)

Ecuaciones degeneradas

Diremos que una ecuación es degenerada si es de la forma: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b$ dado que el primer término de estas ecuaciones es nulo, estas ecuaciones solo pueden ser de dos tipos:

- Trivial: Cuando $b = 0$, en este caso la ecuación se puede eliminar
- Absurda: Cuando $b \neq 0$, en este caso la ecuación no tiene solución, por tanto, todo sistema que contenga una ecuación absurda no tiene solución, es incompatible.

Matrices asociadas a un sistema

[illegible]

y consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \dots & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$

entonces podemos escribir el sistema en notación matricial como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \dots & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \text{ es decir, } A \cdot X = B$$

Llamaremos matriz del sistema, A, a la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \dots & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$, y

llamaremos matriz ampliada a la matriz $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

A cada sistema se le asocian las matrices A y A*. Un sistema queda completamente descrito por su matriz ampliada A*, que puede verse como una forma compacta de escribir el sistema suprimiendo los nombres de las incógnitas. Cada fila de A* corresponde a una ecuación del sistema y cada columna a los coeficientes de una incógnita, salvo la última que corresponde a los términos independientes del sistema. Para recordar esto, la columna de términos independientes suele escribirse separada del resto por una barra vertical.

Como cada fila de la matriz ampliada representa una ecuación del sistema, entre las filas de la A* se podrán hacer las mismas operaciones que entre las ecuaciones de un sistema. Las operaciones elementales entre filas que pueden efectuarse sobre cualquier matriz son:

- Multiplicar o dividir todos los términos de la ecuación por un mismo número.
- Intercambiar la posición de las ecuaciones
- Si dos ecuaciones son iguales ó proporcionales, eliminar una de ellas.
- Si una ecuación es combinación lineal del resto de las ecuaciones, eliminarla.
- Sumar ó restar a una fila otra multiplicada por un número.

Cuando una matriz se obtienen de otra mediante sucesivas operaciones elementales entre filas, se dice que ambas matrices son equivalentes por filas. Es evidente que dos matrices ampliadas equivalentes por filas describen sistemas equivalentes.

Método de Gauss

El método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales es una reducción escalonada para obtener un sistema equivalente más sencillo, cuya forma permite averiguar si se trata de un sistema compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible y, en los casos de compatibilidad, resolverlo. Podemos distinguir tres etapas en el método de Gauss:

- Etapa 1. Reducción del sistema, o de su matriz ampliada, a forma escalonada.
- Etapa 2. Clasificación del sistema escalonado obtenido en la etapa 1.
- Etapa 3. Resolución del sistema escalonado cuando sea compatible.

Etapas 1.

Se dice que una matriz es escalonada si se cumplen las siguientes condiciones:

- Todas las filas de ceros, si las hay, están en la parte inferior de la matriz.
- El primer elemento no nulo (de izquierda a derecha) de cada fila está situado más a la derecha que el primer elemento no nulo de la fila inmediata superior.

Toda matriz es equivalente por filas a alguna matriz escalonada. Es decir, mediante operaciones elementales entre filas, toda matriz puede llevarse a forma escalonada.

Se dice que un sistema es escalonado si su matriz ampliada es escalonada. Así pues, en un sistema escalonado la primera incógnita de cada ecuación está situada más a la derecha que la primera incógnita de la ecuación precedente.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right) \xrightarrow{\text{OPERACIONES EQUIVALENTES}} \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right)$$

Etapas 2 y 3.

Consideremos un sistema escalonado con n incógnitas. Sean r y r' el número total de ecuaciones y el número de ecuaciones no absurdas, respectivamente. Entonces:

- Si $r \neq r'$ el sistema es incompatible.
- Si $r = r'$ el sistema es compatible: Determinado si $r = n$ e indeterminado si $r < n$

Los sistemas escalonados sin ecuaciones absurdas y con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas se denominan sistemas triangulares.

Por ejemplo, para un sistema con 3 ecuaciones y 3 incógnitas (3x3) tendríamos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{OPERACIONES EQUIVALENTES}} \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{3,3} & b'_3 \end{array} \right)$$

Su solución se puede hallar por el método de sustitución hacia arriba.

- Primero se resuelve la última ecuación para la última incógnita: x_3 .
- A continuación, se sustituye el valor hallado de x_3 en la penúltima ecuación y se resuelve para la penúltima incógnita: x_2 .
- Después, se sustituyen los valores hallados de x_3 y x_2 en la antepenúltima ecuación y se resuelve para la primera incógnita: x_1 .

Si el sistema tuviera más incógnitas, se resolvería de forma análoga.

Un sistema escalonado compatible indeterminado de 3×3 puede tener una de estas formas:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \vdots & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \vdots & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \vdots & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OPERACIONES EQUIVALENTES}} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \vdots & b_1 \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} & \vdots & b'_2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

compatible indeterminado con un grado de indeterminación ó compatible indeterminado con dos grados de indeterminación respectivamente. Se define como grado de indeterminación de un sistema compatible indeterminado a la diferencia entre el número de incógnitas y el número de ecuaciones linealmente independientes. El grado de indeterminación indica el número de parámetros que se necesitan para resolver el sistema.

El sistema se resuelve en función de los parámetros de abajo arriba.

Un sistema será incompatible cuando al triangularlo, aparezca una ecuación absurda

$$\left(\begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & : & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & : & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & : & b_3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{OPERACIONES EQUIVALENTES}} \left(\begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & : & b_1 \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & : & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & : & b_3 \end{array} \right)$$

Sistemas de Cramer

Se llaman sistemas de Cramer a aquellos que tienen igual número de ecuaciones que de incógnitas y en los que el determinante de la matriz del sistema es distinto de cero

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 ++ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 ++ a_{2n}x_n = b_2 \\\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 ++ a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

Este tipo de sistemas se pueden resolver por la regla de Cramer, que dice que la solución será:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} , x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} , \dots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta} \quad \text{con:}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \dots\dots$$

$$\Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Teorema de Rouché – Frobenius.

Un sistema de m ecuaciones con n incógnitas es compatible si y solo si los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales, $\text{rg } A = \text{rg } A^*$. Además si el rango es igual al número de incógnitas será determinado y si es menor será indeterminado

$$\text{Sistemas: } \begin{cases} \text{Compatibles } (\text{rg } A = \text{rg } A^*) : \begin{cases} \text{Determinados } (\text{rg } A = \text{rg } A^* = n). \text{S.C.D.} \\ \text{Indeterminados } (\text{rg } A = \text{rg } A^* < n). \text{S.C.I.} \end{cases} \\ \text{Incompatibles } (\text{rg } A \neq \text{rg } A^*). \text{S.I.} \end{cases}$$

Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

El lenguaje algebraico es una de las herramientas más potentes que nos ofrece las Matemáticas. Esto se pone de manifiesto en la resolución de problemas mediante la obtención y posterior resolución de sistemas de ecuaciones.

En todo problema de carácter algebraico debemos de tener en cuenta:

- Los datos o valores conocidos
- Los valores desconocidos que debemos obtener, que llamamos incógnitas
- Las relaciones entre datos e incógnitas que dan lugar a ecuaciones

En la resolución de todo problema de carácter algebraico conviene seguir los siguientes pasos o etapas:

1. Familiarización con el problema

Antes de hacer nada, trataremos de entender con claridad la situación que propone el enunciado. Debemos tener en cuenta la situación de partida, la de llegada y lo que debemos lograr. Emplearemos para ello una o varias lecturas

2. Búsqueda de estrategia

En este tipo de problemas, el camino a recorrer será menos dificultoso si realizamos una buena elección de incógnitas. Es conveniente elegir las menos posibles, ya que muchas veces están relacionadas de forma sencilla unas con otras

3. Llevar adelante la estrategia

Después de la elección de incógnitas realizamos lo que se conoce como planteamiento del problema, que consiste en expresar, mediante ecuaciones, las relaciones que existen entre los datos y las incógnitas del problema

4. Resolución del sistema de ecuaciones planteado

5. Revisar el proceso y sacar conclusiones

Comprobamos las soluciones obtenidas en la resolución del sistema, sustituyendo los valores numéricos obtenidos en las ecuaciones y comprobando que quedan satisfechas. Por último, debemos realizar la discusión del problema, consistente en el examen de las soluciones obtenidas en función de las condiciones que ofrece el enunciado, es decir, comprobar si las soluciones obtenidas tienen sentido o no.