

Unidade 12:

Variables aleatorias

- 1 Variables aleatorias discretas.
 - 1.1 Definición.
 - 1.2 Funcións de masa de probabilidade e de distribución.
 - 1.3 Media, varianza e desviación típica dunha variable discreta.
- 2 modelo binomial.
 - 2.1 Función de masa de probabilidade dunha variable binomial.
 - 2.2 Media, varianza e desviación típica dunha variable binomial.
- 3 Variables aleatorias continuas.
 - 3.1 Definición.
 - 3.2 Función de densidade e función de distribución.
 - 3.3 Media, varianza e desviación típica dunha variable continua.
- 4 A distribución normal.
 - 4.1 Funcións de densidade e de distribución dunha variable normal.
 - 4.2 Parámetros dunha distribución normal.
 - 4.3 A normal estándar: tipificación dunha variable
- 5 Aproximación da binomial pola normal.

Introducción

Variables estadísticas

Un dos obxectivos da Estatística é o estudio de caracteres asociados a unha certa poboación: son as variables estadísticas.

Exemplo: O exame de selectividade de Filosofía consta de 2 temas elixidos ó chou de entre 7. Un alumno só estudiou 4 e quere saber cal é a nota que pode esperar no exame. Para averigualo valorou cal sería o seu resultado nas 5 últimas probas:

¿Que nota pode esperar no exame?

Preguntas que sabia	Nota	frec.	frec. relativa
0	0	1	1/5
1	5	2	2/5
2	10	2	2/5

Solución: a) A nota do exame é unha variable estatística. A nota media deses exames é a nota que pode esperar:

$$\bar{x} = \sum_i x_i \cdot f_i = 0 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{2}{5} + 10 \cdot \frac{2}{5} = 6$$

En moitas ocasións, non podemos utilizar os datos da poboación; ben porque desexemos facer o estudio antes de recoller os datos; ben porque sexa difícil ou costosa a recollida de datos (o método do alumno do exemplo anterior só proporciona unha idea aproximada pois de os resultados poden variar segundo en cantas probas comprobe cal sería a súa nota).

Nesas e en moitas outras situacións é preferible describir a situación cun modelo teórico que podemos construír asignándolle a cada valor da variable unha medida teórica das súas posibilidades: unha probabilidade.

Exemplo: No exemplo anterior podemos estudar cales son as posibilidades teóricas de obter cada unha das notas o que nos permitirá coñecer cal é a nota que pode esperar o alumno na proba de Filosofía.

Esta claro que só pode sacar un 0 (se non estudiou ningún dos autores), un 5 (se estudiou só un) ou un 10 (se estudiou ós dous), pero as tres notas non teñen as mesmas posibilidades.

Experimento aleatorio: Elixir ó chou 2 autores entre 7.

Espacio mostral: Conxunto de resultados do experimento.

$$\{(1,2),(1,3),(1,4),\dots,(2,3),(2,4),(3,4),\dots\} \text{ en total: } C_{7,2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)! \cdot 2!} = 21$$

Probabilidade: Como tódolos exames teñen a mesma probabilidade de saír podemos utilizar as probabilidades de Laplace:

1. Probabilidade de sacar 0 (non saber ningún dos autores): $P\{\text{Nota} = 0\} = \frac{C_{3,2}}{C_{7,2}} = \frac{3}{21}$
2. Probabilidade de sacar 5 (saber un dos autores): $P\{\text{Nota} = 5\} = \frac{C_{4,1} \cdot C_{3,1}}{C_{7,2}} = \frac{12}{21}$
3. Probabilidade de sacar 10 (saber os dous autores): $P\{\text{Nota} = 10\} = \frac{C_{4,2}}{C_{7,2}} = \frac{6}{21}$

Podemos calcular a nota media, nota esperada, utilizando as probabilidades en lugar das frecuencias relativas:

$$\bar{x} = \sum_i x_i \cdot p_i = 0 \cdot \frac{3}{21} + 5 \cdot \frac{12}{21} + 10 \cdot \frac{6}{21} = 5,71$$

Se ós valores dunha variable lle asociamos non a frecuencia dunha serie de probas senón a probabilidade de ese resultado obteremos unha **variable aleatoria** (no exemplo anterior, a nota da proba é unha variable aleatoria).

A Lei dos Grandes Números establece que a probabilidade é o límite das frecuencias relativas cando o número de datos tende a infinito.

Podemos considerar unha variable aleatoria como o límite das variables estatísticas cando o número de integrantes da poboación tende a infinito, e a media da variable aleatoria a nota media que acadaríamos de facer infinitos exames.

Variables aleatorias

Variables aleatorias

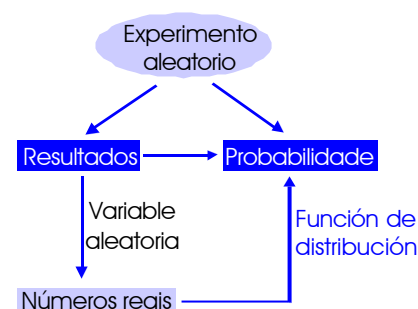
As **variables aleatorias** son modelos teóricos, equivalentes ás variables estadísticas cuantitativas, nas que en lugar de asignarlle a cada valor unha frecuencia, asignámoslle unha probabilidade.

Na Lei dos Grandes Números dicíamos que a probabilidade é o límite das frecuencias relativas cando o número de datos que tomamos tende a infinito. Do mesmo xeito, podemos considerar ás variables aleatorias como límite das variables estadísticas correspondentes a unha poboación que tenda a infinito.

- ✓ **Variable discreta:** Aquela que só toma valores illados.
- ✓ **Variable continua:** Toma valores nun intervalo $[a,b]$.

Para indicar como se distribuirían teoricamente os distintos valores dunha variable aleatoria X construímos a **función de distribución** asociándolle a cada número real a probabilidade de que a variable aleatoria tome un valor menor ou igual que ese número: $F(x) = P\{X \leq x\}$

A función de distribución establece unha relación entre a variable aleatoria e a probabilidade.



Variables discretas

Unha variable aleatoria X é discreta cando só toma valores illados. Designaremos ese os valores por x_i $i=1, 2, 3, \dots$

Á función que asocia cada valor dunha variable aleatoria discreta ca súa probabilidade chámase **función de masa de probabilidade**: $p_i = P\{X = x_i\}$

A función de masa de probabilidade equivale a frecuencia relativa das variables estadísticas.

A suma dos p_i é sempre 1: $\sum_i p_i = \sum_i P\{X = x_i\} = \Pr(E) = 1$

Exemplo: a EPA rexistrou, no 1º trimestre 1999, un 40% de paro entre as persoas de 16 a 19 anos. Queremos estudar cal é a situación nas familias con dous membros entre 16 e 19.

- ✓ **Experimento aleatorio:** Elexir dúas persoas de 16 a 19 anos.
- ✓ **Variable aleatoria:** Número de parados entre esas dúas persoas. A variable toma os valores $x_1=0$, $x_2=1$ e $x_3=2$.

✓ **Función de masa de probabilidade:**

$$p_1 = P\{X=0\} = 0'6 \cdot 0'6 = 0'36$$

$$p_2 = P\{X=1\} = 0'4 \cdot 0'6 + 0'6 \cdot 0'4 = 0'48$$

$$p_3 = P\{X=2\} = 0'4 \cdot 0'4 = 0'16$$

Fíxate que a suma de tódolos p_i é 1.

✓ **Función de distribución:**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 0'36 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0'84 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se } 2 \leq x \end{cases}$$

Media e desviación típica

De xeito semellante ás variables estatísticas discretas, podemos definir a media, a varianza e a desviación típica dunha variable aleatoria discreta sen máis que substituír as frecuencias relativas polos p_i :

✓ **Media:** $\mu = \sum_{i=1}^n x_i p_i$

✓ **Varianza:** $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i$

✓ **Desviación típica:** $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i}$

Tamén dispoñemos de dúas fórmulas para calcular a varianza dunha variable aleatoria discreta:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i \text{ desenvolvendo o cadrado queda:}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2) p_i = \sum_{i=1}^n (x_i^2 p_i - 2\mu x_i p_i + \mu^2 p_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \sum_{i=1}^n 2\mu x_i p_i + \sum_{i=1}^n \mu^2 p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - 2\mu \sum_{i=1}^n x_i p_i + \mu^2 \sum_{i=1}^n p_i \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - 2\mu \mu + \mu^2 1 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \mu^2 \end{aligned}$$

$$\text{Varianza: } \sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \mu^2$$

Exemplo: No exemplo anterior

$$\mu = 0 \cdot 0'36 + 1 \cdot 0'48 + 2 \cdot 0'16 = 0'8$$

A media representa o número de parados que podemos esperar, de aí que en ocasións a media tamén se lle chame **esperanza matemática**.

Exemplo: A varianza e a desviación típicas da variable X ="número de parados" son:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \mu^2 = 0^2 \cdot 0'36 + 1^2 \cdot 0'48 + 2^2 \cdot 0'16 - 0'8^2 = 0'48$$

$$\sigma = \sqrt{0'48} = 0'69$$

O modelo binomial

É un modelo teórico discreto (variable aleatoria discreta) que se aplica a situacións nas que:

- Realizamos un experimento con só dous resultados: A e B :
 $P(A) = p$ $P(B) = 1 - p = q$
- O experimento repítese de xeito independente un certo número de veces n .
- A variable aleatoria X indica o número de veces que se produce o resultado A (toma valores naturais de 0 a n).

Exemplo: Un 52% dos nacementos corresponden a mulleres e un 48% a homes. Unha parella decidiu trer 3 fillos. ¿Cal é a probabilidade de que ningún sexa muller, de que só 1 sexa muller, ...?

Solución: Supoñemos que sexo de cada fillo é independente do dos demais.

X ="núm. de mulleres" é unha variable binomial, pois:

- Cada fillo é un "experimento" con dous resultados excluíntes: ser home ou ser muller.
- Podemos considerar que o sexo dun fillo é independente do dos demais. Cada nacemento é independente dos outros.
- A variable aleatoria conta o número de veces que se produce un dos resultados: ser muller.

A función de masa de probabilidade é:

$$Pr\{X=0\} = 0'48 \cdot 0'48 \cdot 0'48 = 0'48^3 = 1 \cdot 0'48^3$$

$$Pr\{X=1\} = 0'52 \cdot 0'48 \cdot 0'48 + 0'48 \cdot 0'52 \cdot 0'48 + 0'52 \cdot 0'52 \cdot 0'48 = 3 \cdot 0'52 \cdot 0'48^2$$

$$Pr\{X=2\} = 0'52 \cdot 0'52 \cdot 0'48 + 0'52 \cdot 0'48 \cdot 0'52 + 0'48 \cdot 0'52 \cdot 0'52 = 3 \cdot 0'52^2 \cdot 0'48$$

$$Pr\{X=3\} = 0'52 \cdot 0'52 \cdot 0'52 = 0'52^3 = 1 \cdot 0'52^3$$

Fíxate que os números 1, 3, 3 e 1, que aparecen nas expresións finais desas probabilidade, corresponden ós xeitos

diferentes que hai de elixir 0 mulleres entre 3 nacementos, 1 muller entre 3 nacementos, 2 mulleres entre 3 e 3 mulleres entre 3 e dicir ás combinacións de 3 obxectos elixidos de 0 en 0, 3 de 1 en 1, 3 de 2 en 2 e 3 de 3 en 3. En xeral:

$$C_{3i} = \binom{3}{i} \rightarrow \Pr\{X=i\} = \binom{3}{i} \cdot 0.52^i \cdot 0.48^{3-i}$$

Distribución binomial

Función de masa de probabilidade dunha binomial: vén dada pola expresión:

$$P\{X=i\} = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

Temos que comprobar que a función de masa de probabilidade está ben definida: $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} = 1$

Dita suma compréndese co desenvolvemento do Binomio de Newton: a potencia n do binomio $(p+(1-p))^n$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} &= \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n + \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{n-1} + \dots = \\ &= [p + (1-p)]^n = (p + 1 - p)^n = 1^n = 1 \end{aligned}$$

Indicamos por $B(n,p)$ ás variables aleatorias binomiais de parámetros n (número de veces que se repite o experimento) e p (probabilidade do resultado que se conta).

Media e desviación típica dunha variable aleatoria binomial:

Media: $\mu = n \cdot p$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Exemplo: Entrevístase a 10 persoas dun grupo de 100, do que 60 son mulleres.

¿Cal é a probabilidade de que 5 sexan mulleres?

Solución: A variable X ="número de mulleres entrevistadas" non é binomial, pois non se verifican as hipóteses do modelo, en particular a independencia dos n experimentos.

$$\begin{aligned} P\{2^{\text{o}} \text{ muller} \mid 1^{\text{o}} \text{ muller}\} &= \frac{59}{99} \\ P\{2^{\text{o}} \text{ muller} \mid 1^{\text{o}} \text{ home}\} &= \frac{60}{99} \end{aligned}$$

Esas probabilidades son diferentes, os experimentos non son independentes. Sen embargo, como a diferenza é

pequena, podemos usar o modelo binomial obtendo unha aproximación.

$$P\{X = 5\} = \binom{10}{5} \cdot 0.6^5 \cdot 0.4^5 = 0.2007$$

Variables aleatorias continuas

Para manexar variables estatísticas continuas agrupabamos os datos en clases transformándoas en variables discretas e representabamos eses datos agrupados utilizando histogramas de frecuencias. Isto conleva unha perda de información en aras da simplicidade do tratamento.

Os histogramas son *diagramas de áreas* e cumpren:

- Tódalas barras teñen altura maior ou igual a 0.
- Área total das barras é 1.
- A función de distribución $F(x)$ é a área baixo das barras ata ese valor de x .

Supoñamos que a poboación correspondente a esa variable estatística faise cada vez maior.

Para evitar a perda de información, debemos elixir moitas máis clases (resultará un histograma como o da figura) e a área de cada barra é agora case 0.

Extrapolando o proceso ata o infinito:

- A variable estatística transformárase nunha variable aleatoria continua.
- As barras redúcense a liñas e a súa área faise 0.
- O perfil do histograma é a gráfica dunha función. Esa función recibe o nome de **función de densidade** e apoiáronos nela para definir as probabilidades asociadas á variable aleatoria.

A función de densidade sigue cumprindo as mesmas propiedades que os histogramas pero, como estamos falando de áreas debaixo dunha gráfica, debemos utilizar a linguaxe das integrais:

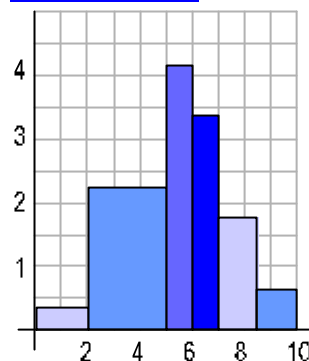
$$a) \quad f(x) \geq 0$$

$$b) \quad \int_a^b f(x)dx = 1$$

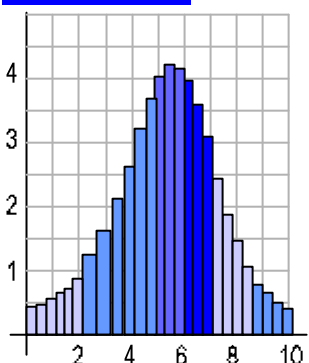
$$c) \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Se $f(x)$ é continua, do Teorema Fundamental do Cálculo Integral dedúcese que $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$.

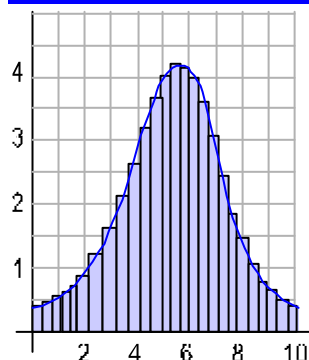
Histograma:

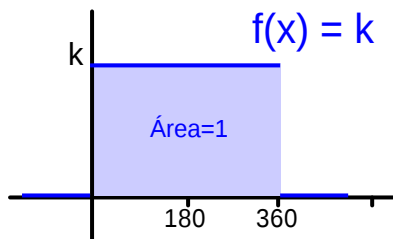


Histograma:



Función de densidade:





Exemplo: Para elixir ó chou unha dirección. Sexa a variable aleatoria X ="un ángulo entre 0° e 360° ". ¿Cal é a función de densidade de X ?

Solución: Dado que tódolos valores no intervalo $[0, 360]$ deben ter a mesma probabilidade de saír, $f(x)$ debe ser constante nese intervalo e 0 fora del.

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{se } x \in [0, 360] \\ 0 & \text{noutro caso} \end{cases}$$

Calculamos o valor de k tendo en conta que a área baixo a gráfica de $f(x)$ debe ser 1: $A = 360 \cdot k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{360}$.

Tamén presentando a integral:

$$\int_0^{360} f(x) dx = \int_0^{360} k dx = (kx)_0^{360} = 360k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{360}$$

Media e desviación típica

Utilizando o mesmo razoamento anterior, podemos definir as medias, varianzas e desviacións típicas dunha variable aleatoria continua:

Variable estatística:

✓ **Media:** $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i f_i$

✓ **Varianza e desviación típica:** $s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 f_i$ $s = \sqrt{s^2}$

Nas variables tratadas por intervalos, f_i é a área da barra correspondente á clase de x_i .

Ó tender o número de barras a infinito

1. A base é cada vez menor, un infinitésimo que representamos por dx .
2. A altura de cada barra tende a $f(x)$.
3. A área de cada barra pasa a ser $f(x)dx$.
4. A suma das infinitas barras $f(x)dx$ é unha integral definida.

Polo tanto, definimos:

• **Media:** $\mu = \int_a^b x \cdot f(x) dx$

• **Varianza:** $\sigma^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 f(x) dx$

• **Desviación típica:** $\sigma = \sqrt{\int_a^b (x - \mu)^2 f(x) dx}$

Dispoñemos de dúas fórmulas para calcular a varianza:

$$\sigma^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_a^b x^2 f(x) dx - 2\mu \int_a^b x f(x) dx + \mu^2 \int_a^b f(x) dx =$$

$$\int_a^b x^2 f(x) dx - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 \cdot 1 = \int_a^b x^2 f(x) dx - \mu^2$$

A distribución normal

A distribución binomial é útil para a descrición dunha gran cantidade de situacións pero, cando o número de casos é moi elevado, o cálculo das probabilidades asociadas é moi complexo.

De Moivre (1667-1754) descubriu que se pódese aproximar as probabilidades asociadas a unha binomial coas áreas correspondentes baixo da función:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

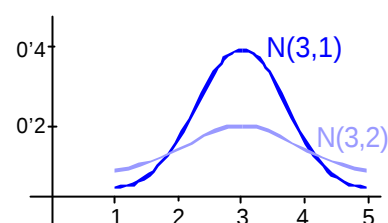
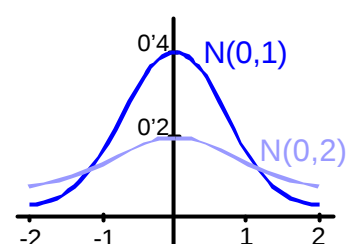
Posteriormente comprobouse que moitas variables aleatorias continuas teñen funcións de densidade son semellantes a esa funcións. Son as variables **aleatorias normais**.

Cando un fenómeno físico que toma valores nun intervalo está influído por moitas variables de xeito que a influencia de cada unha sexa pequena en relación ás demais, seguramente pode ser descrito por unha distribución normal (estaturas, pesos, esperanza de vida, erros ó medir unha magnitude, duración dunha máquina, etc. son exemplos de procesos que poden ser descritos por variables aleatorias normais).

Formalmente, unha variable aleatoria **normal** é unha variable continua, definida en todo $\mathbb{R}$, e que ten función de densidade:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\mu \text{ a media, } \sigma \text{ a desviación típica})$$

A función de densidade da normal non ten unha primitiva elemental polo que, para calcular probabilidades asociadas, transfórmase a variable noutra de media 0 e desviación típica 1 (tipifícase) e faise uso dunhas táboas da *función de distribución* da $N(0,1)$ (se non se fai a transformación, necesitaríamos unhas táboas para cada normal o que é claramente imposible).



As normais son:

- Simétricas respecto a media
- A gráfica é máis "aplanada" canto maior é a desviación típica.
- A probabilidade (área) lonxe da media é maior canto maior é a desviación típica.
- Un intervalo centrado na media e amplitude $2s$ contén unha probabilidade de 0'68

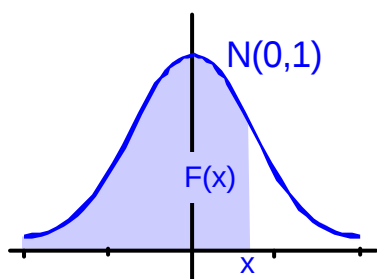
Tipificar unha variable

Consiste en transformala noutra co mesmo tipo de distribución pero de media 0 e desviación típica 1.

Cando a unha variable aleatoria X de media μ e desviación típica σ , se lle suma unha constante ou se multiplica por un número obtemos unha nova variable coas seguintes características:

- $Y = X + a$, ten media $\mu + a$ e varianza σ .
- $T = \frac{X}{b}$, ten media $\frac{\mu}{b}$ e varianza $\frac{\sigma}{b}$.
- En particular, $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ ten media 0 e desviación típica 1.

A Z chamáremoslle variable **tipificada**.



O valor da función de distribución nun punto x é a área baixo a función de densidade ata ese valor x .

Exemplo: O diámetro dos parafusos feitos por unha máquina segue unha distribución normal de media 5 mm e desviación típica 0'005 mm. Se só son válidos os parafusos cunha medida entre 4'98 e 5'05 ¿Cal é a porcentaxe de parafusos válidos?

Solución: As probabilidades asociadas á normal calcúlanse a partir da función de distribución $N(0,1)$, para o que é necesario tipificar a variable:

$$X \in N(5, 0'02) \Rightarrow Z = \frac{X - 5}{0'02} \in N(0,1)$$

$$P\{4'98 < X \leq 5'04\} = P\left\{\frac{4'98 - 5}{0'02} < Z \leq \frac{5'04 - 5}{0'02}\right\} = P\{-1 < Z \leq 2\} = F(2) - F(-1)$$

- $F(2)$ aparece directamente nas táboas: 0'9772
- $F(-1)$ non figura nas táboas, o seu valor calcúlase a partir da simetría da función de densidade: $F(-1) = 1 - F(1) = 1 - 0'8413 = 0'1587$
- Polo tanto: $P\{4'98 < X \leq 5'04\} = 0'9772 - 0'1587 = 0'8185$
- A porcentaxe de pezas válidas é 81'85%

Variables aleatorias

Modelos teóricos equivalentes ás variables estadísticas cuantitativas nas que, en lugar de frecuencias relativas, utilizamos probabilidades.

- ✓ **Función de distribución** dunha variable aleatoria X : $F(x) = P\{X \leq x\}$
- ✓ **Variables discretas:** Aquela que só toma valores illados.
 - **Función de masa de probabilidade:** a cada valor asócialle a súa probabilidade $p_i = P\{X = x_{ij}\}$. A suma dos p_i é 1:

$$\sum_i p_i = \sum_i \Pr\{X = x_i\} = P(E) = 1$$
 - **Media:**
$$\mu = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$
 - **Desviación típica:**
$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \mu^2}$$
- **Variables continuas:** toman valores nun intervalo $[a, b]$ e teñen unha función de densidade asociada cumprindo
 - a) $f(x) \geq 0$
 - b) $\int_a^b f(x) dx = 1$
 - c) $F(x) = \int_a^x f(t) dt$
- Se $f(x)$ é continua, $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$.
- **Media:**
$$\mu = \int_a^b x f(x) dx$$
- **Desviación típica:**
$$\sigma = \sqrt{\int_a^b (x - \mu)^2 f(x) dx} = \sqrt{\int_a^b x^2 f(x) dx - \mu^2}$$

O modelo binomial $B(n, p)$

Modelo teórico discreto (variable aleatoria discreta) aplicable a situacións nas que:

1. Realizamos un experimento con dous resultados excluíntes, A e B: $P(A)=p$, $P(B)=1-p$
2. O experimento repítase de xeito independente n veces.
3. X é o número de veces que se produce o resultado A. ($X=0, 1, \dots, n$).

- **Función de masa de probabilidade:** $\Pr\{X=i\} = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$
- **Media:** $\mu = n \cdot p$
- **Desviación típica:** $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

A distribución normal

Variable aleatoria **normal** é unha variable continua, definida en todo $\mathbb{R}$, e que ten función de densidade:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\mu \text{ a media, } \sigma \text{ a desviación típica})$$

- É simétrica en relación á media
- As probabilidades correspondentes a valores alonxados da media son case 0.
- A función de densidade da normal non ten primitiva elemental; para calcular probabilidades asociadas tipifícase e úsanse as táboas da $N(0,1)$.

Tipificar unha variable

Consiste en transformala noutra co mesmo tipo de distribución pero de media 0 e desviación típica 1. Se X é unha variable aleatoria de media μ e desviación típica σ , $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ é unha nova variable (variable **tipificada**) con media 0 e desviación típica 1.

Ampliación

A distribución normal

Unha variable aleatoria continua é un modelo teórico para a descrición de variables estatísticas de tipo continuo. Para "inventar" unha variable aleatoria aplicable a un certo proceso debemos atopar unha función de densidade que se aproxime ós histogramas desa variable estatística. Vexamos cal podería ser o proceso coa distribución normal.

Hai un gran número de fenómenos físicos que teñen histogramas de frecuencias relativas semellantes ó da figura (peso de ameixas de Carril). Debemos atopar unha función de densidade cunha gráfica semellante ó perfil deses histogramas.

Temos varias funcións elementais que teñen unha gráfica cunha forma semellante:

1. Fraccións alxébricas, como $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$
2. Parte da gráfica da función exponencial (cando o expoñente é negativo): $f(x) = e^x$

As fraccións alxébricas presentan dous problemas insalvables, polo que debemos rexeitalas: poden non ter media nin desviación típica e as áreas baixo da función lonxe da media non son nulas, en contra do que acontece coas variables estatísticas que pretende describir.

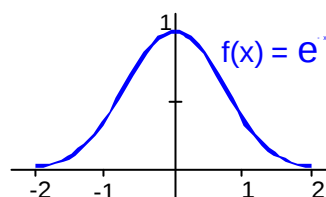
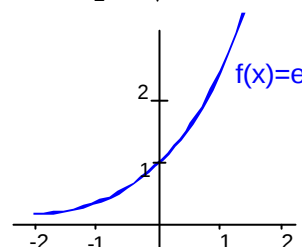
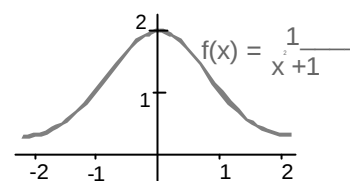
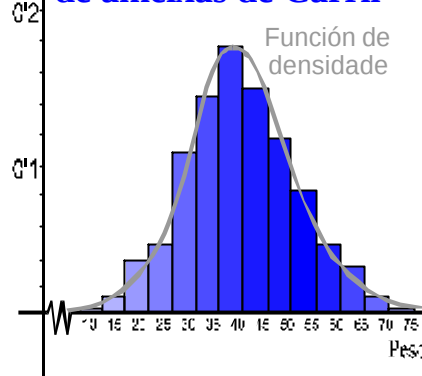
Para que a gráfica da exponencial se axuste ó histograma debemos facer que o expoñente sempre sexa

negativo, elevando ó cadrado e cambiándolle o signo: $f(x) = e^{-x^2}$

Dese xeito conseguimos tamén que sexa simétrica ó pasar a ser unha función par.

Resulta unha función simétrica en relación á orixe, con valores sempre positivos e definida en todo $\mathbb{R}$, cousa que non sucedía coas variables estatísticas das que partimos,

Histograma de pesos de ameixas de Carril



pero os seus valores tenden a 0 rapidamente ó alonxarnos da orixe e a área baixo da gráfica lonxe da orixe é despreziable¹.

Para que sexa función de densidade, a área baixo da gráfica debe ser 1. Como a función non ten primitiva elemental (non é posible aplicar Barrow), calculamos a área mediante integración por métodos numéricos utilizando unha calculadora:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \approx \int_{-10}^{10} e^{-x^2} dx = 1.772453851$$

O valor que obtivemos da área é certamente curioso: elevando ó cadrado:

$$(1.772453851)^2 = 3.141592654 \Rightarrow \int_{-10}^{10} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Dividindo a función por ese valor conseguimos que a área sexa 1: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$

Esa función xa é unha función de densidade, a media e a desviación típica son:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx \approx \int_{-10}^{10} x e^{-x^2} dx = 0$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx \approx \int_{-10}^{10} x^2 e^{-x^2} dx = 0.5 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sería moito mellor se a desviación típica fose 1 (variable tipificada), para o que debemos facer unha nova transformación:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}, \quad X \in N(0,1).$$



¹ Por exemplo, a área entre 10 e 1000 é: $\int_{10}^{1000} e^{-x^2} dx = 1.314052 \cdot 10^{-87}$

- 1 O número de pinchazos que sofre unha bicicleta de montaña cada 50 km ven dado pola variable aleatoria discreta que aparece na táboa.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
p_i	0'01	0'06	0'15	0'3	0'20	0'20	0'07	0'01

 - a) Calcula a media, mediana e desviación típica.
 - b) Probabilidade de que sufra menos de 4 pinchazos.
 - c) Se tivo menos de 4 pinchazos, ¿cal é a probabilidade de que pinchase dúas veces?
 - 2 Unha variable aleatoria discreta ten a función de masa de probabilidade que aparece na táboa, onde k é unha constante descoñecida.

x_i	0	1	3	5	7
p_i	k	4k	3k	2k	1k

 - a) Calcula o valor de k.
 - b) Calcula a media e a desviación típica desa variable.
 - c) Escribe a función de distribución desa variable.
 - 3 Un amo de casa comprobou que un certo artigo está de oferta no supermercado A 1 de cada 3 días, no supermercado B 2 de cada 5 e 1 de cada 4 no C. Considerando a variable aleatoria discreta que indica o número de supermercados nos que está de oferta ese artigo un día calquera, pídese:
 - a) Función de masa de probabilidade desa variable.
 - b) Media e desviación típica.
 - c) Probabilidade de que estea de oferta polo menos nun supermercado.
 - d) Sabendo que esta de oferta en un, ¿cal é a probabilidade de que sexa no A?
 - 4 Nunha caixa hai o mesmo número de caramelos que de bombóns. Se un neno colle seis doces da caixa ¿Cal é a probabilidade de que collese alomenos dous bombóns? ¿E cal a de que collese non menos de dous nin máis de catro?
 - 5 Calcular k para que a función $f(x) = k \cdot x$ con $0 \leq x \leq 1$ sexa unha función de densidade. ¿Cal sería a función de distribución correspondente?
 - 6 A función de densidade dunha variable aleatoria continua é:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4} & \text{se } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{noutro caso} \end{cases}$$
 - a) Calcula a media e desviación típica de X.
 - b) Atopa a fórmula da función de distribución de X.
 - c) Calcula $P\{0 < X \leq 0.5\}$
 - 7 A función de densidade dunha variable aleatoria continua X definida no intervalo $[0, 2]$ é:

$$f(x) = k(x^2 - 2x) \text{ onde } k \text{ é unha constante descoñecida}$$
 - a) Calcula o valor de k.
 - b) Calcula a media e desviación típica de X.
 - c) Calcula o valor a tal que $P\{X \leq a\} = 1/2$ (mediana de X).
 - d) Atopa a fórmula da función de distribución de X.
 - 8 A porcentaxe de galegos que viven en concellos con menos de 20000 habitantes é do 55%. Elixindo oito ó chou, calcular a probabilidade de que entre 3 e 5 (ámbolos dous incluídos) vivan en concellos con menos de 20000 habitantes, aplicando:
 - a) Distribución binomial.
 - b) Aproximación pola normal da binomial.

- 9** A probabilidade de que a causa dun accidente automobilístico sexa o alcohol é de 0'6.
- a) Se nun fin de semana prodúcense 10 accidentes ¿cal é a probabilidade de que polo menos 3 sexan debidos ó alcohol?
 - b) ¿Cantos deses 10 accidentes podes estimar que se deben á inxestión de alcohol?
 - c) Se en todo o ano prodúcense 1000 accidentes ¿cal é a probabilidade aproximada de que máis de 580 sexan debidos ó alcohol?
- 10** Sábese que 3% dos libros de texto teñen defectos de impresión.
- a) ¿Cal é a probabilidade de que dos 10 libros de texto dun alumno, ningún teña defectos?
 - b) Se un libreiro fai un pedido de 1000 libros, calcula a probabilidade de que 30 ou máis sexan defectuosos.
- 11** Nunha cidade estímase ca temperatura máxima no mes de xuño sigue unha normal de media 23° e desviación típica 5°. Calcular o número de días do mes nos que se espera alcanzar máximas entre 21° e 27°.
- 12** As notas dun exame seguen son normais de media 6'5 e desviación típica 1'5.
- a) Calcula a porcentaxe de alumnos e alumnas cunha calificación inferior a 5.
 - b) Se o profesor vai calificar con sobresaínte a un 10% da clase, ¿a partir de que nota se conseguirá esta calificación?
- 13** O peso das ameixas recollidas nunha ría galega segue unha distribución normal de media 20 grs. e desviación típica 4 grs.
- a) Para unha fábrica conserveira son válidas aquelas ameixas que pesan entre 18 e 35 grs. ¿Que proporción de ameixas cumpren esta características?
 - b) Nun lote de seis ameixas ¿cal é a probabilidade de que todas sexan válidas para a fábrica? ¿E a probabilidade de que alomenos unha ameixa do lote sexa válida?
- 14** A puntuación media das notas das probas de acceso é 5.5 e a desviación típica 0.5. Supoñendo que a distribución das notas segue unha normal, pídese:
- a) ¿Que porcentaxe de alumnos superan o 5?
 - b) ¿Para que valor da desviación típica o 40% dos alumnos superaría o 6, supoñendo que a media fora a mesma?
- 15** O tempo que emprega un estudante da súa casa ó instituto segue unha distribución normal de media 40 minutos e unha desviación típica de 5 minutos. Se sae da súa casa tódolos días ás 8:30 e debe estar ás 9:00 ¿Cantos días do ano é de esperar que chegue tarde supoñendo que fai 200 viaxes anuais?
- 16** Indica como serían as gráficas das funcións de densidade das variables aleatorias normais X, Y, Z e T cos seguintes parámetros.

	X	Y	Z	T
Media	7	7	18	18
D. Típica	0.5	2	1	4

Problema: O partido A fixo unha enquisa entrevistando a 100 persoas para coñecer que resultados podía esperar nunhas eleccións próximas, se o 20% da poboación vai votar ó partido A. ¿Cal é a probabilidade de que o resultado da enquisa corresponda a situación real cun erro menor ou igual ó 3%?