

Unidade 2: Trigonometría

1. Figuras semellantes. Razón de semellanza.
2. Triángulos rectángulos
 - 2.1. Razóns trigonométricas: Seno, coseno e tanxente.
 - 2.2. A Fórmula Fundamental da Trigonometría.
3. Coordenadas rectangulares e polares. Xeralización da definición de razón trigonométrica.
4. Resolución de triángulos
 - 4.1. Teorema do seno
 - 4.2. Teorema do coseno

Introducción

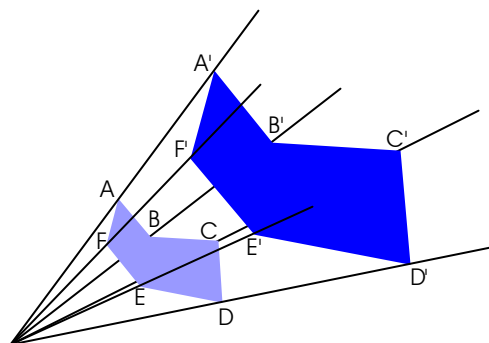
Figuras semellantes.

Chámanse figuras semellantes as que teñen a mesma forma e diferente tamaño.

Utilizando o Teorema de Tales pode comprobarse que dous polígonos son semellantes cando teñen os ángulos iguais e os lados proporcionais.

Que teñan os lados proporcionais significa que a razón entre os lados homólogos é sempre a mesma:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dots = r$$



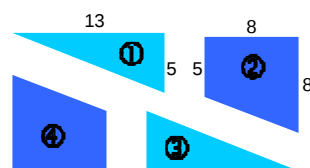
Esa constante recibe o nome de **razón de semellanza**.

Actividade 1:

- 1) ¿Para que dous polígonos sexan semellantes cumpre que os ángulos sexan iguais e os lados proporcionais ou é suficiente cunha das dúas condicións?
- 2) Contesta axiña as seguintes cuestións: ¿Canto mide a área dun cadrado de 1 m de lado? ... ¿E a área dun cadrado de medio metro de lado? ...
 - a) ¿Cal é a razón de semellanza entre unha moeda de 5 pts e outra de 100 pts? ¿Cal é a razón entre as súas áreas?
 - b) Sabemos que a relación entre os lados de dúas figuras semellantes é a razón de semellanza pero ¿Cal é a relación entre as áreas de figuras semellantes?

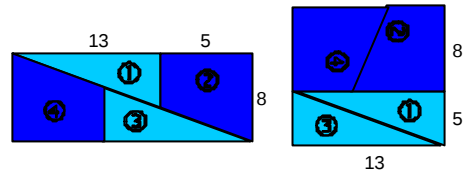
Problema 1: Constrúe en papel cuadriculado as figuras que aparecen no debuxo. Con elas podes construír dous rectángulos diferentes.

Se calculas as áreas atoparaste cunha pequena sorpresa:



$$S_1 = (13 + 8) \cdot 8 = 168 \text{ cadros} \quad \text{¿Onde está o cadro que falla?}$$

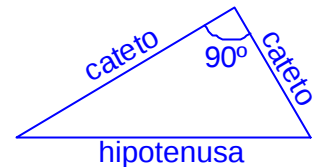
$$S_2 = 13 \cdot (8 + 5) = 169 \text{ cadros}$$



Triángulos, tipos e elementos

Dende antigo, por varias razóns, os triángulos xogan un papel fundamental na Xeometría:

- É a figura de lados rectos máis sinxela.
- Tódolos polígonos poden dividirse en triángulos.
- É unha figura ríxida (non pode deformarse sen rompelo) cousa que non sucede cos cuadriláteros.
- Queda determinado con tan só tres datos independentes: Os tres lados, dous lados e un ángulo, un lado e dous ángulos, dous lados e a altura, etcétera. (non serven os tres ángulos pois non son independentes, coñecendo dous xa coñecemos tamén o terceiro).



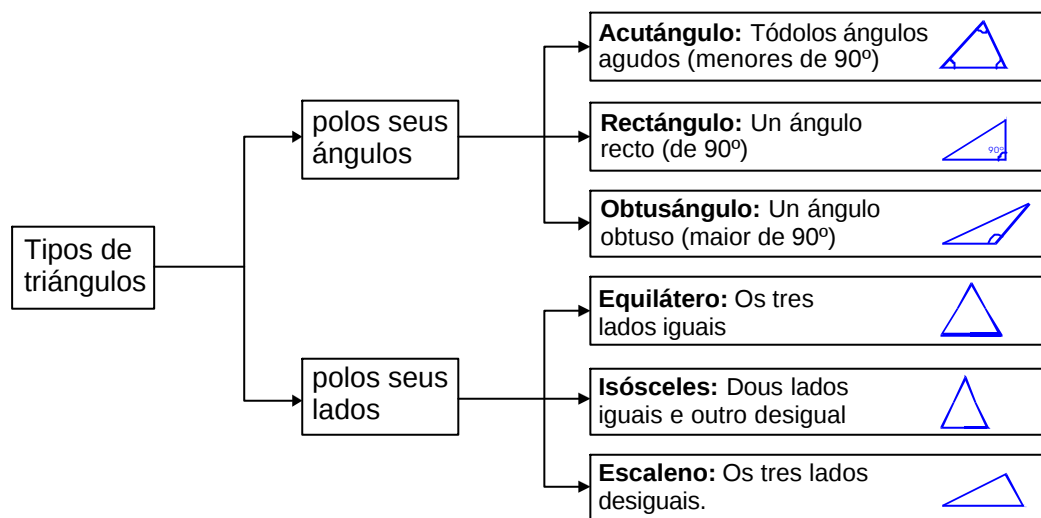
Os gregos representaban os triángulos rectángulos tal como aparece na figura, de aí os nomes dos lados:

- Hipo=abaixo, tenusa=tendido
- Catetos=que descende

Triángulos rectángulos: Nun triángulo rectángulo, os lados reciben nomes especiais segundo cal sexa a súa situación:

Hipotenusa: Lado oposto ó ángulo de 90° . É o lado maior do triángulo.

Catetos: Os outros dous lados. Noméanse facendo referencia os ángulos agudos.



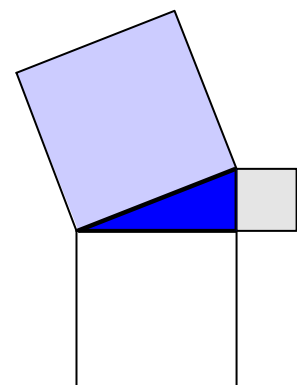
Cuestións: Resposta razoadamente ás seguintes cuestións

- ¿Pode un triángulo ser rectángulo e obtusángulo ó mesmo tempo?
- ¿Pode un triángulo rectángulo ser equilátero?
- ¿Hai triángulos rectángulos isósceles?
- ¿E triángulos obtusángulos isósceles?

O Teorema de Pitágoras

Xa os antigos exipcios coñecían que algúns triángulos rectángulos (coma o de lados 5, 4 e 3) verifican que o cadrado dun lado é igual a suma dos cadrados dos outros dous ($5^2 = 4^2 + 3^2$).

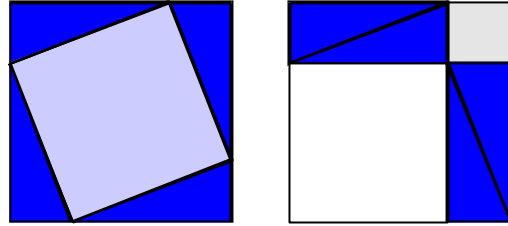
Foi sen embargo na Grecia Clásica onde se estableceu definitivamente o chamado **Teorema de Pitágoras**, que non foi descuberto nin demostrado por Pitágoras:



Un triángulo é rectángulo si e só si a área dun cadrado construído sobre o lado maior (hipotenusa) é igual a suma das áreas dos cadrados construídos sobre os outros dous (catetos).

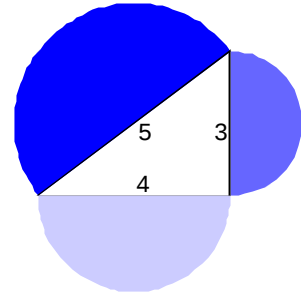
Un dos xeitos máis elegantes de demostrar o Teorema de Pitágoras consiste en construír dous cadrados de lado a suma dos catetos do triángulo e descompoñelos como aparece na figura.

A área dos cadrados é a mesma polo que ó recortarlle os catro triángulos, as áreas que quedan seguen sendo iguais: Demostramos que o cadrado construído sobre a hipotenusa ten unha área igual á suma das áreas dos cadrados construídos sobre os catetos.



Podemos enunciar o teorema dun xeito máis xeral utilizando figuras semellantes de calquera tipo, non só cadrados.

Actividade 2: Comproba se a área do semicírculo construído sobre a hipotenusa do triángulo de lados 5, 4 e 3 é igual a suma das áreas dos semicírculos construídos sobre os catetos.



Unha curiosidade

Nunha superficie plana, a recta que une dous puntos é a liña máis curta entre eses puntos.

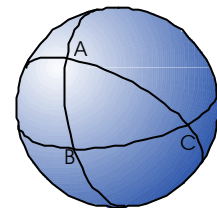
Podemos xeneralizar a definición de recta a calquera superficie partindo dese feito: Nunha superficie calquera, chamamos recta entre dous puntos á liña máis curta entre eses puntos.

Nunha esfera, a recta entre dous puntos é o círculo máximo (de centro o centro da esfera) que pasa por eses puntos.

De xeito semellante ás superficies planas, tres puntos non aliñados en calquera superficie forman os vértices dun triángulo que, en xeral, terá os lados curvilíneos.

No plano, a suma dos ángulos dun triángulo do plano é de 180° pero, se debuxas un triángulo enriba doutra superficie, a suma dos seus ángulos pode non ser 180° .

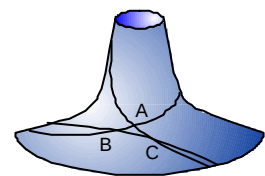
Nunha superficie esférica, como a Terra, a suma dos ángulos dun triángulo é maior de 180°



Os ángulos A, B e C suman máis de 180°

Nunha superficie hiperbólica (obtida ó facer xirar unha hipérbola ó redor dun eixe) os ángulos dun triángulo suman menos de 180° .

No espacio a recta entre dous puntos é o traxecto dun raio de luz entre eles (que non sempre é unha "recta" tal como demostrou Einstein). Se puidésemos medir con exactitude canto suman os ángulos dun triángulo no espacio coñeceríamos cal é a xeometría do noso Universo, se é aberto ou pechado, finito ou infinito.

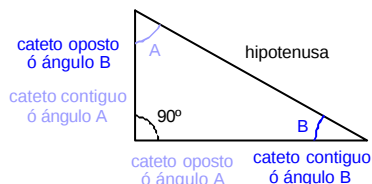


Os ángulos A, B e C suman menos de 180°

Trigonometría

As razóns trigonométricas.

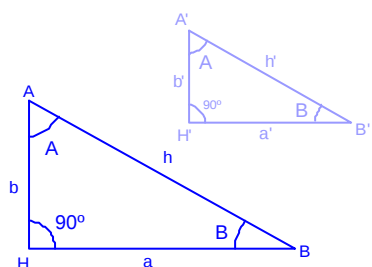
Definimos as razóns trigonométricas dun ángulo agudo A ($0^\circ \leq A \leq 90^\circ$) como es razóns entre os lados dun triángulo rectángulo que ten un dos seus ángulos igual a A :



$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(A) &= \frac{\text{cateto oposto a } A}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h} & \operatorname{cosec}(A) &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto a } A} = \frac{h}{a} \\ \cos(A) &= \frac{\text{cateto contiguo a } A}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h} & \sec(A) &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo a } A} = \frac{h}{b} \\ \tan(A) &= \frac{\text{cateto oposto a } A}{\text{cateto contiguo a } A} = \frac{a}{b} & \cotan(A) &= \frac{\text{cateto contiguo a } A}{\text{cateto oposto a } A} = \frac{b}{a}\end{aligned}$$

Temos que comprobar que as razóns trigonométricas non dependen do triángulo elixido, que os valores son os mesmos calquera que sexa o tamaño do triángulo.

Sexan dous triángulos rectángulos cun ángulo agudo igual a A . Eses triángulos son necesariamente semellantes por teren os ángulos iguais e, polo tanto, os seus lados son proporcionais:



$$\frac{a}{a'} = \frac{h}{h'} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{h} = \frac{a'}{h'} = \operatorname{sen}(A)$$

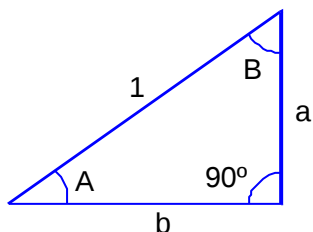
Invertindo os extremos da proporción

Queda probado que o seno dun ángulo non depende do triángulo elixido.

Actividade: demostra que as demais razóns trigonométricas tamén están ben definidas.

Algunhas propiedades

Se dividimos o seno dun ángulo polo seu coseno obtemos:



$$\frac{\operatorname{sen}(A)}{\cos(A)} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{b}{1}} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a}{b} = \tan(A)$$

A tanxente dun ángulo é igual o seno dividido polo coseno.

Nun triángulo rectángulo, os ángulos agudos A e B son complementarios: $A+B=90^\circ$. Ademais, o cateto oposto ó ángulo A é o cateto contiguo ó ángulo B . Polo tanto:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen}(A) &= \frac{a}{h} = \cos(B) \\ \cos(A) &= \frac{b}{h} = \operatorname{sen}(B) \end{aligned} \right\}$$

O seno dun ángulo é igual o coseno do complementario.

Nun triángulo rectángulo de hipotenusa 1 temos:

$$\operatorname{sen}(A) = \frac{a}{1} = a \qquad \cos(A) = \frac{b}{1} = b$$

Nun triángulo rectángulo de hipotenusa 1, o cateto oposto a un ángulo agudo mide o mesmo co seno do ángulo e o cateto contiguo mide o mesmo co coseno.

Aplicándolle o Teorema de Pitágoras o triángulo de hipotenusa 1 anterior resulta:

Fórmula Fundamental da Trigonometría:

$$\operatorname{sen}^2(A) + \cos^2(B) = 1$$

A suma do seno ó cadrado máis o coseno ó cadrado dun ángulo é sempre igual a 1.

Actividade: Dividindo á metade dous triángulos equiláteros é posible calcular, con total exactitude, as razóns trigonométricas dos ángulos de 30° e 60°. Faino, comproba que o valor das razóns trigonométricas non depende do tamaño do triángulo e que as razóns trigonométricas verifican as relacións anteriores.

Exemplo: Sabendo que $\operatorname{sen}(A)=0'8$, calcula $\cos(A)$ e $\tan(A)$.

Solución: A fórmula fundamental da trigonometría permítenos calcular o coseno dun ángulo coñecendo o seno.

$$\operatorname{sen}^2(A) + \cos^2(A) = 1 \rightarrow 0'8^2 + \cos^2(A) = 1 \rightarrow \cos(A) = \sqrt{1 - 0'8^2} = \pm 0'6$$

A raíz cadrada ten un dobre signo, pero o coseno dos ángulos ós que nos estamos a referir (entre 0° e 90°) é positivo: $\cos(A)=0'6$

Agora é doado calcula-la tanxente:

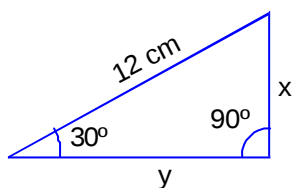
$$\tan(A) = \frac{\operatorname{sen}(A)}{\cos(A)} \rightarrow \tan(A) = \frac{0'8}{0'6} = \frac{4}{3}$$

Resolución de triángulos

Trátase de, coñecendo tres datos calquera dun triángulo, calcular tódolos demais, en especial os lados e os ángulos.

Se o triángulo é rectángulo, podemos utilizar directamente as razóns trigonométricas ou o Teorema de Pitágoras.

De non selo, deberemos descompoñelo en triángulos rectángulos (por exemplo trazando unha altura).



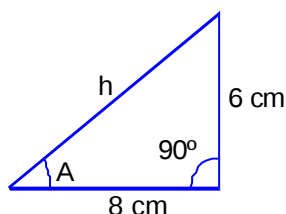
Exemplo: Sabendo que a hipotenusa dun triángulo rectángulo mide 12 cm e que un dos ángulos agudos é de 30° , calcula os demais lados do triángulo.

Solución: Coñecemos un ángulo, 30° e a hipotenusa, 12. Para calcular x, cateto oposto a 30° , só debemos preguntarnos que relaciona ó cateto oposto a un ángulo e a hipotenusa: o seno de 30°

$$\left. \begin{array}{l} \sin(30) = \frac{x}{12} \\ \text{Na calculadora} \rightarrow \sin(30) = 0'5 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{12} = 0'5 \Rightarrow x = 12 \cdot 0'5 = 6 \text{ cm}$$

Para calcular y, cateto contiguo a 30° , preguntámonos que relaciona ó cateto contiguo a un ángulo e a hipotenusa: o coseno.

$$\left. \begin{array}{l} \cos(30) = \frac{y}{12} \\ \text{Na calculadora} \rightarrow \cos(30) = 0'87 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{y}{12} = 0'87 \Rightarrow y = 12 \cdot 0'87 = 10'44 \text{ cm}$$



Exemplo: Nun triángulo rectángulo, os catetos miden 6 cm e 8 cm respectivamente. ¿Canto miden os ángulos do triángulo?

Solución: Coñecemos os catetos, ¿qué relaciona os catetos e un ángulo agudo do triángulo?: a tanxente do ángulo.

$$\tan(A) = 0'75 \quad \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{Na calculadora}}} \quad \tan^{-1}(0'75) = 36'87^\circ \Rightarrow A = 36^\circ 52' 12''$$

O outro ángulo agudo será: $B = 90 - A = 53^\circ 7' 48''$

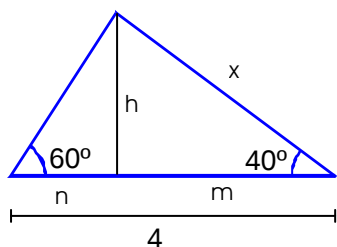
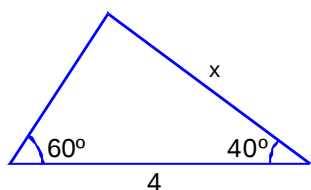
Exemplo: Comproba se o triángulo de lados 6, 8 e 10 é rectángulo.

Solución: Sabemos que só os triángulos rectángulos verifican o Teorema de Pitágoras, polo que só temos que comprobar se este o verifica ou non:

Teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 10^2 \underset{?}{=} 8^2 + 6^2 \Rightarrow 100 \underset{?}{=} 68 + 36 \Rightarrow 100 = 100$$

Obtemos unha identidade. O triángulo é rectángulo.



Exemplo: Calcula o lado x no triángulo da figura.

Solución: Comprobamos se é rectángulo, que sería o tipo de triángulo máis doado de estudar: $A + 60 + 40 = 180 \Rightarrow A = 80^\circ \neq 90^\circ$

O triángulo non é rectángulo polo que non podemos utilizar directamente os razóns trigonométricas.

Trazando a altura relativa ó lado x obtemos dous triángulos rectángulos:

$$\left. \begin{array}{l} \tan(60) = \frac{h}{4-m} = 1'73 \\ \tan(40) = \frac{h}{m} = 0'84 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} h = 1'73(4-m) \\ h = 0'84m \end{array} \right\} \Rightarrow 1'73(4-m) = 0'84m \Rightarrow m = 2'69$$

Agora o cálculo de x é doado:

$$\cos(40) = \frac{2'69}{x} \Rightarrow x = \frac{2'69}{\cos(40)} = 3'51$$

Exercicio: Calcula o outro lado.

Exemplo: Sobre un mapa é moito máis doado fixar a posición dun punto pola súa distancia ó orixe de coordenadas e polo ángulo en relación a dirección Norte-Sur. Son as **coordenadas polares: $P(d,A)$**

Atopa unha fórmula para pasar de coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

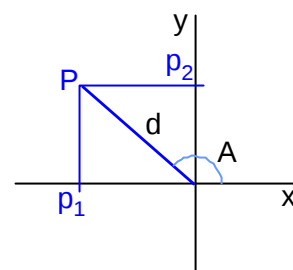
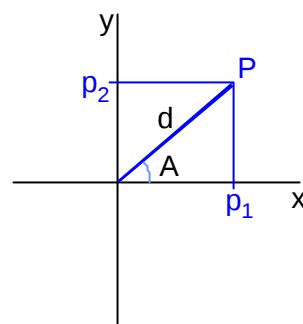
Solución: Só debemos ter en conta que as coordenadas rectangulares correspóndense cos catetos dun triángulo rectángulo.

- Coordenadas rectangulares: $P(p_1, p_2)$
- Coordenadas polares: $P(d, A)$

Para pasar dunhas a outras debemos utilizar as razóns trigonométricas do ángulo A :

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen}(A) = \frac{p_2}{d} \\ \text{cos}(A) = \frac{p_1}{d} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p_2 = d \cdot \text{sen}(A) \\ p_1 = d \cdot \text{cos}(A) \end{array} \right\}$$

As fórmulas anteriores son válidas para puntos do primeiro cadrante (noutro caso, non temos definidas as razóns trigonométricas do ángulo). Para poder aplicar as fórmulas anteriores a un punto calquera do plano, debemos definir o seno e o coseno dun ángulo calquera



Coseno e seno de calquera ángulo.

Nun triángulo rectángulo de hipotenusa 1, o cateto oposto a un ángulo agudo mide o mesmo co seno dese ángulo e o cateto contiguo o mesmo co coseno. Dese xeito podemos calcular o seno e o coseno dun ángulo sen efectuar ningunha operación.

En coherencia con isto imos definir as razóns trigonométricas dun ángulo calquera.

Debuxando varios triángulos con hipotenusa 1, os extremos da hipotenusa van formando unha circunferencia de radio 1 e, situando a circunferencia co centro na orixe de coordenadas, as coordenadas deses puntos coinciden co seno e o coseno dos ángulos.

Podemos definir o seno e o coseno dun ángulo calquera coa axuda desa circunferencia de radio 1 centrada na orixe de coordenadas (circunferencia trigonométrica ou tamén goniométrica).

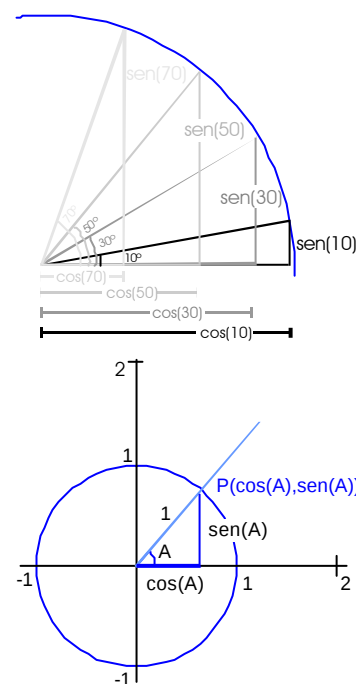
Coseno dun ángulo calquera: Primeira coordenada do punto que determina ese ángulo na circunferencia de radio 1.

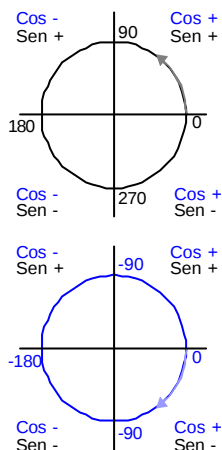
Seno dun ángulo calquera: Segunda coordenada do punto que determina ese ángulo na circunferencia trigonométrica.

Consecuencias inmediatas desas definicións son:

Signos: O coseno é positivo nos ángulos do 1º e 4º cuadrantes e negativo nos do 2º e 3º e o seno é positivo no 1º e 2º cuadrantes e negativo no 3º e 4º.

Senos e cosenos doados de calcular: o seno e coseno dalgúns ángulos son inmediatos a partir da gráfica.





Angulo	Coseno	Seno
0	1	0
90	0	1
180	-1	0

Angulo	Coseno	Seno
270	0	-1
360	1	0
450	0	-1

Senos e cosenos de ángulos negativos: os ángulos positivos mídense seguindo o sentido contrario ás agullas do reloxo e negativos no sentido contrario.

Compróbase facilmente que $\text{sen}(A) = -\text{sen}(-A)$ e $\text{cos}(A) = \text{cos}(-A)$

O seno e coseno dalgúns ángulos negativos son:

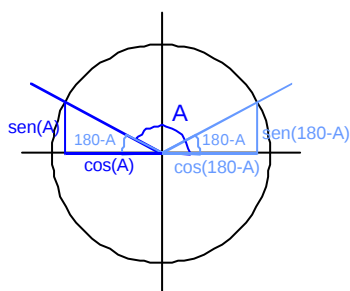
Ángulo	Coseno	Seno
-90	0	-1
-180	-1	0

Ángulo	Coseno	Seno
-270	0	1
-360	1	0

Valores máximos e mínimos: o maior valor que poden tomar o seno e o coseno é 1, e o menor é -1.

Formulas de redución o 1º cadrante: Para un ángulo calquera, A, hai outro do 1º cadrante B, de xeito que o seno e o coseno deses ángulos diferéncianse como moito no signo:

A do 2º cadrante	A do 3º cadrante	A do 4º cadrante
$B = 180 - A$	$B = A - 180$	$B = 360 - A$
$\text{sen}(A) = \text{sen}(B)$	$\text{sen}(A) = -\text{sen}(B)$	$\text{sen}(A) = -\text{sen}(B)$
$\text{cos}(A) = -\text{cos}(B)$	$\text{cos}(A) = -\text{cos}(B)$	$\text{cos}(A) = \text{cos}(B)$



Na figura aparece a demostración cando o ángulo A é do 2º cadrante. Como pode verse, se $B = 180 - A$, os triángulos que determinan os valores do seno e do coseno de A e B son iguais. A única diferenca nos seus valores é que o coseno de A é negativo por estar a esquerda da orixe.

Actividade: Coa axuda da calculadora, fai unha táboa cos valores do seno e do coseno para ángulos de 0 a 360 dando valores de 30 en 30 graos. Comproba que se cumpren as relacións anteriores.

Tanxente dun ángulo calquera

Definimos a tanxente dun ángulo calquera a partir do seno e coseno dese ángulo:

$$\tan(A) = \frac{\text{sen}(A)}{\text{cos}(A)}$$

Ó estar definida como un cociente, non existira tanxente cando o coseno (denominador) sexa 0. Non teñen tanxente os ángulos: -270º, -90º, 90º, 270º, 450º, ...

Podemos visualizar a tanxente utilizando a recta tanxente (de aí o nome) á circunferencia trigonométrica no punto (1,0).

A tanxente do ángulo é a 2ª coordenada do punto que determina sobre esa recta tanxente.

Vemos que, por exemplo, o ángulo de 90° non corta a recta tanxente. Non existe tanxente de 90° .

A diferenza do seno e do coseno que sempre están comprendidos entre -1 e 1 , a tanxente pode tomar calquera valor.

Actividade: Demuestra que realmente podemos visualizar a tanxente tal como se indicou anteriormente.

Exemplo: Coa axuda da calculadora, atopa tódolos ángulos comprendidos entre 0° e 360° que cumpran que o seu seno sexa $0'5$.

Solución. Sabemos que o seno é a altura (2^a coordenada) do punto que determina o ángulo na circunferencia. Buscamos pois o valor $0'5$ no eixe Y e debuxamos os ángulos que corresponden a ese valor. Obtemos dous, un no 1° e outro no 2° cuadrantes.

O ángulo do 1° cadrante dánolo a calculadora utilizando a función inversa do seno:

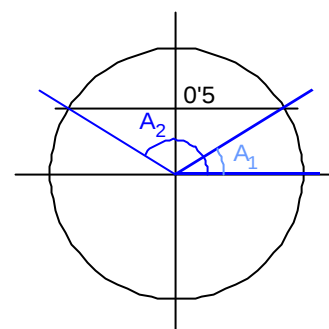
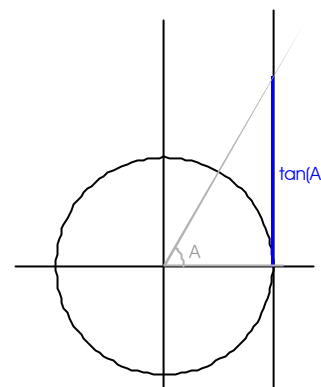
$$A_1 = \arcsin(0'5) = 30^\circ$$

Para calcula-lo correspondente ó 2° cadrante só compre decatarse de que

$$A_1 + A_2 = 180, \text{ polo tanto: } A_2 = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

Exercicio: Coa axuda da calculadora, atopa tódolos ángulos comprendidos entre 0° e 360° que cumpran:

- Que o seu coseno sexa $-0'71$.
- Que a súa tanxente sexa -2 .



Teorema do seno

Nun triángulo calquera, a razón entre un lado e o seno do ángulo oposto ten sempre o mesmo valor:

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

Demostración: Se o triángulo é rectángulo, a demostración é inmediata.

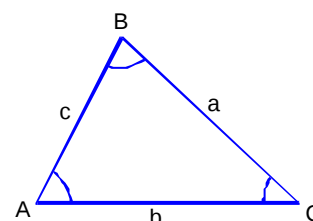
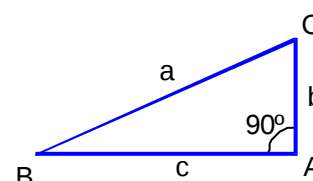
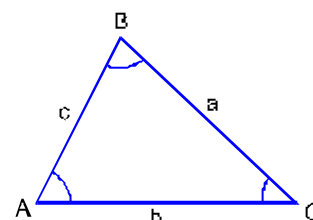
$$\left. \begin{array}{l} \sin(B) = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\sin(B)} \\ \sin(C) = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{\sin(C)} \end{array} \right\} \xrightarrow[\sin(A)=1]{A=90^\circ} \frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

En xeral, para triángulos non rectángulos, distinguiremos dous casos:

Caso 1: O triángulo ten tódolos ángulos agudos.

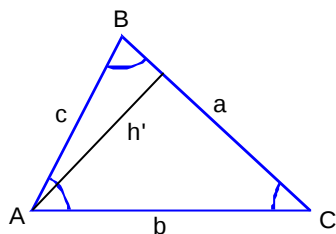
Sexa ABC un triángulo calquera. Trazamos unha altura para descompoñelo en triángulos rectángulos.

Resulta:



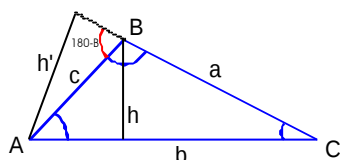
$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen}(A) &= \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \operatorname{sen}(A) \\ \operatorname{sen}(C) &= \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \operatorname{sen}(C) \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Igualando: } c \cdot \operatorname{sen}(A) = a \cdot \operatorname{sen}(C) \Leftrightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}(A)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(C)}$$



De xeito semellante, sen máis que considerar a altura relativa ó lado a, podemos deducir:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen}(B) &= \frac{h'}{c} \\ \operatorname{sen}(C) &= \frac{h'}{a} \end{aligned} \right\} c \cdot \operatorname{sen}(B) = a \cdot \operatorname{sen}(C) \Leftrightarrow \frac{b}{\operatorname{sen}(B)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(C)}$$



Caso 2: Un dos ángulos é obtuso. Neste caso a primeira parte é semellante pero para a segunda debemos ter en conta que a altura cae fora da base:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen}(A) &= \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \operatorname{sen}(A) \\ \operatorname{sen}(C) &= \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \operatorname{sen}(C) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}(A)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(C)}$$

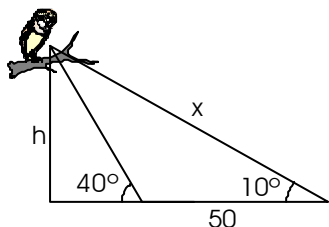
$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen}(180 - B) &= \frac{h}{c} \\ \operatorname{sen}(C) &= \frac{h}{a} \end{aligned} \right\} c \cdot \operatorname{sen}(180 - B) = a \cdot \operatorname{sen}(C) \Leftrightarrow \frac{b}{\operatorname{sen}(180 - B)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(C)}$$

$$\text{Como } \operatorname{sen}(180 - B) = \operatorname{sen}(B), \text{ obtemos } \frac{b}{\operatorname{sen}(B)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(C)}$$

Polo tanto, calquera que sexa o triángulo:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(A)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(B)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(C)}$$

O teorema do seno permite resolver triángulos calquera (non só rectángulos), con tal de coñecer un lado e o ángulo oposto.



Exemplo: Desde un certo lugar vemos unha curuxa pousada nunha pola dunha árbore. A visual forma un ángulo de 10° en relación á horizontal. Achegándonos 50 metros, o ángulo da visual pasa a ser de 40° . ¿A que altura está a curuxa e a que distancia nos atopabamos dela?

Solución: Empecemos por facer un esbozo da situación:

$$\text{Calculamos os ángulos do triángulo: } \left. \begin{aligned} 180 - 40 &= 140 \\ 180 - (10 + 140) &= 30 \end{aligned} \right\}$$

Polo teorema do seno:

$$\frac{50}{\operatorname{sen}(30)} = \frac{x}{\operatorname{sen}(140)} \Rightarrow x = \frac{50 \cdot \operatorname{sen}(140)}{\operatorname{sen}(30)} = 64'28 \text{ m}$$

$$\operatorname{sen}(10) = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x \cdot \operatorname{sen}(10) \rightarrow h = 64'28 \cdot \operatorname{sen}(10) = 11'16 \text{ m}$$

Teorema do coseno

Tamén coñecido como teorema de Pitágoras xeneralizado.

Nun triángulo calquera verifícase:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(A)$$

Demostración:

Caso 1: Se o ángulo A é recto, o teorema é inmediato.

Caso 2: Se A non é recto, trazámo-la altura relativa o lado b (ou o c no caso de que a anterior caese fora da base) e obtemos:

$$\left. \begin{array}{l} n = c \cdot \cos(A) \\ b = m + n \end{array} \right\} \Rightarrow m = b - c \cdot \cos(A)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = h^2 + m^2 = h^2 + (b - c \cdot \cos(A))^2$$

$$a^2 = h^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A) + c^2 \cdot \cos^2(A)$$

Aplicando Pitágoras ó outro triángulo:

$$c^2 = h^2 + n^2 = h^2 + (c \cdot \cos(A))^2 = h^2 + c^2 \cdot \cos^2(A)$$

Restando as ecuacións anteriores:

$$a^2 - c^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A) \Rightarrow a^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

Exemplo: Calcula os ángulos do triángulo de lados 10, 12 e 14.

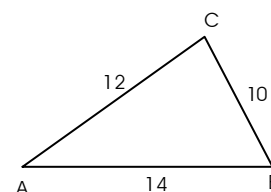
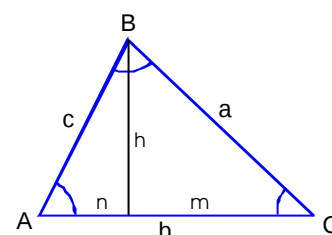
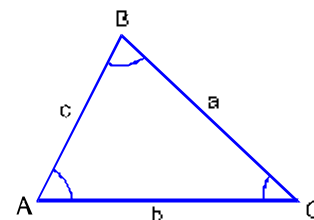
Solución: Polo teorema do coseno:

$$10^2 = 12^2 + 14^2 - 2 \cdot 12 \cdot 14 \cdot \cos(A) \Rightarrow \cos(A) = \frac{10^2 - 12^2 + 14^2}{-2 \cdot 12 \cdot 14} = 0'7143$$

$$A = \arccos(0'7143) = 44'41 \rightarrow A = 44^\circ 24' 36''$$

$$\frac{10}{\operatorname{sen}(44'41)} = \frac{14}{\operatorname{sen}(B)} \Rightarrow \operatorname{sen}(B) = \frac{14 \cdot \operatorname{sen}(44'41)}{10} = 0'9797$$

$$B = \arcsen(0'9797) = 78'44^\circ$$



Exercicio: Para medir o ancho dun río, dous observadores situados nunha das beiras e separados por unha distancia de 100 m ven unha árbore na outra beira baixo os ángulos de 42° e 37° respectivamente, ¿cal é ancho do río?

Exercicio: Nunha lagoa hai unha ponte colgante. Desde un lugar situado a 94 m dun dos extremos da ponte e 123 do outro, a ponte vese baixo un ángulo de 36° , ¿cal é a lonxitude da archinomeada ponte?

Síntese

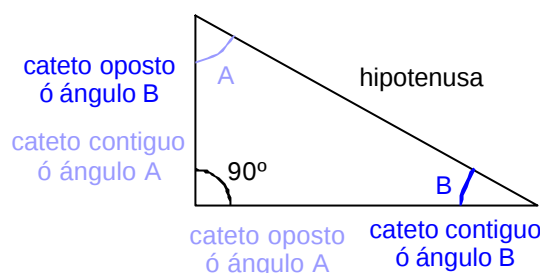
Razóns trigonométricas

Son as razóns entre os lados dun triángulo rectángulo. O seu valor só depende da forma do triángulo (da medida dos ángulos agudos) e non do tamaño do triángulo polo que se nomean facendo referencia a un dos ángulos agudos do triángulo:

$$\text{sen}(A) = \frac{\text{cateto oposto } a}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}$$

$$\text{cos}(A) = \frac{\text{cateto contiguo } b}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h}$$

$$\text{tan}(A) = \frac{\text{cateto oposto } a}{\text{cateto contiguo } b} = \frac{a}{b}$$

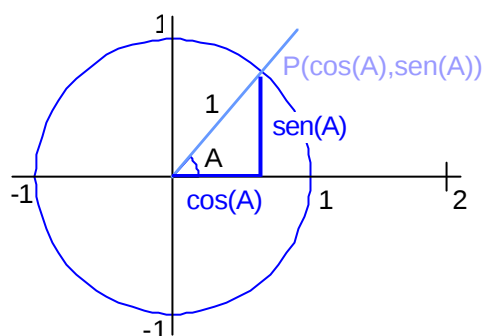


Seno, coseno e tanxente de calquera ángulo

Coseno: 1ª coordenada do punto que determina o ángulo na circunferencia trigonométrica

Seno: 2ª coordenada dese punto.

Tanxente: $\text{tan}(A) = \frac{\text{sen}(A)}{\text{cos}(A)}$

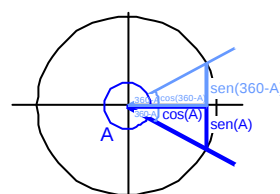
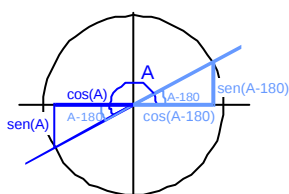
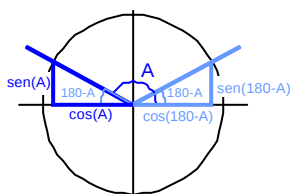


Propiedades

Fórmula fundamental: $\text{sen}^2(A) + \text{cos}^2(A) = 1$

Fórmulas de redución ó primeiro cadrante:

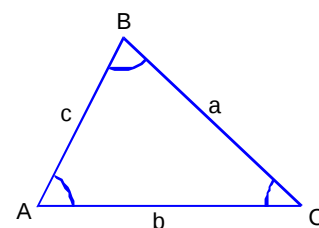
2º cadrante	3º cadrante	4º cadrante
$\text{sen}(A) = \text{sen}(180-A)$	$\text{sen}(A) = -\text{sen}(A-180)$	$\text{sen}(A) = -\text{sen}(360-A)$
$\text{cos}(A) = -\text{cos}(180-A)$	$\text{cos}(A) = -\text{cos}(A-180)$	$\text{cos}(A) = \text{cos}(360-A)$



Resolución de triángulos

Teorema do seno: $\frac{a}{\text{sen}(A)} = \frac{b}{\text{sen}(B)} = \frac{c}{\text{sen}(C)}$

Teorema do coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$

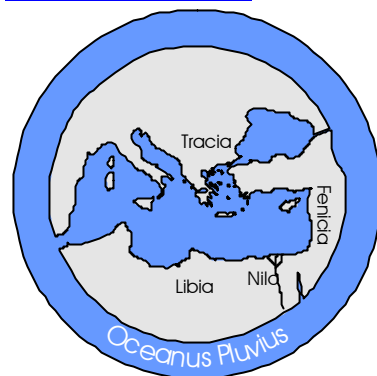


As primeiras medidas, a Terra plana: Hecateo

Na Grecia antiga (ata o 450 a.C. aproximadamente) coidábase que a Terra era un disco plano, no centro do disco atopábanse os continentes rodeados polo río Océano e, no centro dos continentes, Grecia. O mundo reducíase ó Mediterráneo.

Hecateo de Mileto (500 a. C.) estimou que o disco debía ter uns 8000 km. de diámetro (25000 km² de superficie).

Mapa da época de Homero:



A Terra esférica: Eratóstenes.

A primeira suxerencia que temos dunha Terra esférica data do 450 a. C. e débese a Filolao de Tarento (480-? a. C.). Esta idea xa era aceptada pola maioría dos pensadores polo 350 a.C. pero a primeira proba concluínte só chegou en 1522, cando Magallanes completou a primeira volta o Mundo.

Cando se consideraba a Terra como un disco plano, o único xeito de calcular o seu tamaño era chegando ata o borde e medindo a distancia. Cunha Terra esférica as cousas son moi diferentes. Unha superficie curva produce efectos que fan posible medir a súa curvatura e, polo tanto o seu tamaño.

O primeiro en utilizar un deses efectos para medir o tamaño do noso planeta foi Eratóstenes de Cirene (276-196 a. C.)¹.

Eratóstenes leu que en Siena (no Alto Exipto), ó mediodía do día do solsticio de verán, as estacas verticais non proxectaban sombras e o Sol penetraba ata o fondo dos pozos.

En Alexandría, eso non era así, o que atribuíu correctamente á curvatura da superficie terrestre.

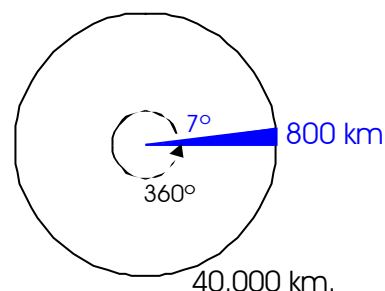
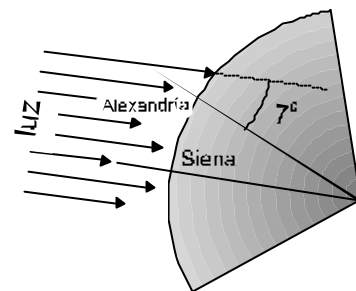
Eratóstenes obtivo unha medida de 7° para a inclinación dos raios do Sol en Alexandría o día do solsticio e deduciu que ese ángulo ten que ser igual ó ángulo formado polas liñas que parten de Siena e Alexandría ata o centro da Terra.

Contratou un home para ir de Alexandría a Siena contando os pasos e medir, dese xeito, a distancia entre as vilas (800 km.) e, con eses datos, calculou a medida da circunferencia da Terra:

Se 7° corresponden a 800 km. 360° corresponderán a:

$$L = \frac{800}{7} \cdot 360 \approx 40.000 \text{ km}$$

$$\text{Diámetro da Terra}^2: d = \frac{40.000}{p} \approx 13.000 \text{ km.}$$

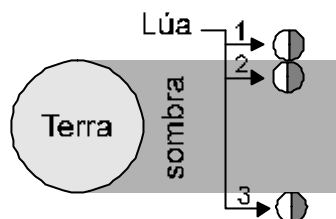


¹ Un dos grandes sabios da antigüidade, astrónomo, historiador, xeógrafo, filósofo, poeta, matemático e director da Biblioteca de Alexandria

² Ós contemporáneos de Eratóstenes esas dimensións pareceronlle escasivas polo que repetiron as observacións e obtiveron cifras máis pequenas (29000 km de circunferencia e 9100 de diámetro), cifras que foron aceptadas sen discusión e que foron

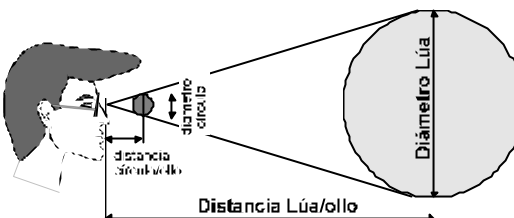
O tamaño do Sistema Solar: distancia Terra-Lúa

Antes de que Eratóstenes obtivese a medida da Terra, Aristarco de Samos³, obtivo unha estimación da distancia Terra-Lúa baseada na medición dos *tempos de tránsito* da Lúa durante un eclipse: O tempo que emprega a Lúa en pasar da posición 1 a 2 depende do seu diámetro e o que emprega en pasar da 2 a 3 depende do diámetro da Terra.



O tempo do paso de de 2 a 3 é 4 veces maior co do paso de 1 a 2, o que leva a que a Terra é 4 veces maior ca Lúa (o método foi perfeccionado por Hiparco de Nicea, 190-120 a.C.).

Unha vez calculado o tamaño da Terra e da Lúa, puideron calcular a distancia Terra-Lúa a partir do tamaño aparente da Lúa: Situamos un círculo diante do ollo e alonxámo-lo ata que oculte a Lúa, nese intre os tamaños aparentes do círculo e da Lúa son iguais.



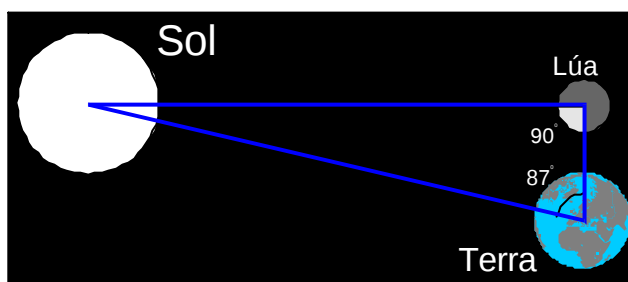
$$\frac{\text{diam.circulo}}{\text{diam.Lua}} = \frac{\text{dist.circulo / ollo}}{\text{dist.Lua / ollo}} \Rightarrow \text{dist.Lua / ollo} = 390.000 \text{ km}$$

O tamaño do Sistema Solar: distancia Terra-Sol

Novamente foi a xenialidade de Aristarco a que, por primeira vez que nos saibamos, desenvolveu un método correcto para medir a distancia Terra-Sol.

Aristarco decatouse de que cando a Lúa está en carto crecente ou en carto mingunte, a Terra, o Sol e a Lúa; forman os vértices dun triángulo rectángulo.

Aristarco obtivo un valor de $87^{\circ} 8'$ para un ángulo agudo dese triángulo, o que permite calcular a distancia Terra-Sol:



$$\cos(87^{\circ} 8') = \frac{390.000}{d} = 0'05 \Rightarrow d = \frac{390.000}{0'05} \approx 8.000.000 \text{ km}$$

	Grecia Clásica	Actualidade
Diámetro da Terra	13.000 km	12.756 km
Diámetro da Lúa	3.250 km.	3.476 km.
Distancia Terra-Lúa	390.000 km	384.400 km
Distancia Terra-Sol	8.000.000 km	150.000.000 km.

recollidas moito despois nun mapa por Toscanelli, mapa que seguramente tiña Colón, e que utilizou para demostrar a viabilidade da súa viaxe as Indias seguindo o Sol, pero esta é outra historia.

³ Aristarco foi outro dos grandes científicos da antigüidade. Sostiña que o Universo era moito maior do que se pensaba, que as estrelas eran soles distantes e que, como o Sol, estaban fixas; que a Terra xiraba ó redor do Sol nun círculo enorme e as estrelas estaban a unha distancia moito maior.

Exercicios e actividades

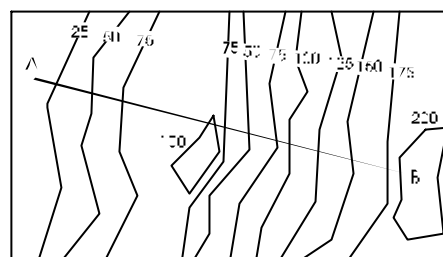
- 1 Tendo en conta que designamos con letras maiúsculas ós ángulos, coa minúscula correspondente o lado oposto e que para a hipotenusa utilizamos sempre a h , resolve os seguintes triángulos rectángulos:

- a) $A=45^\circ$, $a=10$ m. b) $B=30^\circ$, $h=20$ m.
c) $A=60^\circ$, $b=10$ m. d) $a=4$ m, $b=3$ m, $h=5$ m

- 2 Un rapaz está a voar un papaventos. Por efecto do vento, a corda forma un ángulo de 60° coa horizontal. Sabendo que a corda mide 50 m ¿a que altura voa o papaventos?

- 3 Un edificio proxecta unha sombra que mide 12'5 m cando os raios do Sol inciden cun ángulo de 60° en relación á horizontal. ¿Cal é a altura do edificio?

- 4 ¿Canto mide o lado dun pentágono regular inscrito nunha circunferencia de lado 5 cm.?



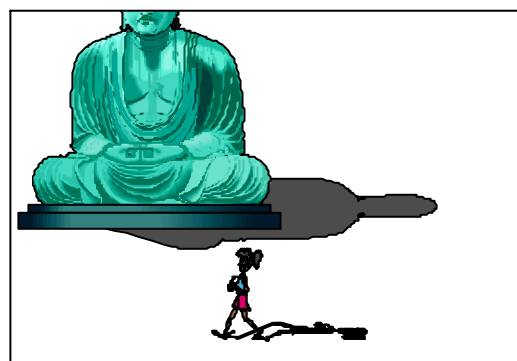
Escala 1:25.000

- 5 No mapa da figura, ¿podemos ver o punto A desde o punto B?

- 6 Di a tradición que Galileo estudiaba o movemento dun sólido en caída libre deixando caer pedras desde o alto da Torre de Pisa. Se a Torre ten unha escaleira con 280 escalóns de 20 cm para chegar ó cumio e as pedras que tiraba Galileo caían a 4'2 m da base da Torre. ¿Que inclinación ten a Torre?

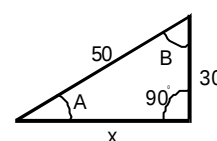
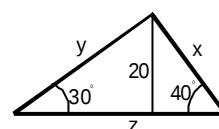
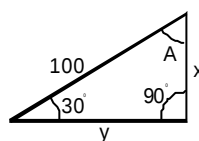
- 7 ¿Un triángulo de lados 24, 12 e 16 é semellante a outro de lados 18, 12 e 9? Xustifica a resposta.

- 8 Dunha viaxe a Tailandia, Carolina trouxo a foto que aparece na figura e quere descubrir a altura do Buda que aparece nela (incluída a cabeza). Se Carolina mide 1'7 metros de altura ¿podes dicir cal é a altura do Buda?



- 9 Estudia se o triángulo de lados 8, 6 e 10 é rectángulo.

- 10 Calcula os lados e ángulos que se indican con letras nos seguintes triángulos rectángulos:

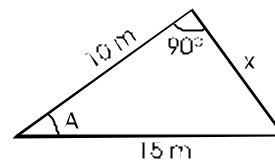
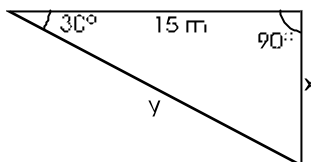


- 11 Desde a terraza da súa casa, Pepiño ve o seu can ó outro lado da rúa, cun ángulo de 35° en relación á vertical. Se a rúa ten 15 m de ancho ¿Cal é a altura da terraza da casa de Pepiño?

12 Dous lados dun triángulo miden 15 e 11'5 e o ángulo que forman mide 40° . ¿É un triángulo rectángulo? Xustifica a resposta.

13 Cal é o volume dun tetraedro de 4 metros de aresta.

14 Nunha estrada aparece unha sinal de 8% de pendente, o que quere dicir que, percorrendo 100 m pola estrada, a altura varia 8 m. ¿Cal é a inclinación, en graos, desa estrada?



15 Calcula os datos que se indica nos triángulos rectángulos da figura:

16 O lado da base da pirámide de Keops mide 227 m e a aresta lateral 212 m. ¿Cal é a altura da pirámide? ¿E a inclinación das súas caras?

17 Para as razóns trigonométricas da maioría dos ángulos empréganse aproximacións sen embargo, é posible calcular con total exactitude as razóns dalgúns ángulos mediante triángulos rectángulos teóricos:

- Calcula as razóns de 30° e 60° a partir do triángulo rectángulo que se obtén ó trazala altura dun triángulo equilátero.
- Calcula as razóns trigonométricas de 45° a partir do triángulo obtido ó trazala diagonal dun cadrado.

18 O seno dun ángulo é 0'6, calcula o seu coseno e a súa tanxente. ¿Hai máis dunha solución?

19 Calcula os ángulos comprendidos entre 0° e 360° que teñan coseno é igual a tanxente.

20 Sabendo que $\cos(A) = -0'6$ e que o A é un ángulo do segundo cadrante, calcula:

- | | | |
|------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| a) O seno e a tanxente de A. | b) ¿En que cadrante está $90-A$? | c) $\cos(A+90)$ |
| d) ¿En que cadrante está $180-A$? | e) $\sin(90-A)$ | f) ¿En que cadrante está $450+A$? |
| g) $\sin(180-A)$ | h) $\cos(90-A)$ | i) ¿En que cadrante está $180+A$? |
| j) $\cos(180-A)$ | k) ¿En que cadrante está $A+90$? | l) $\sin(180+A)$ |

21 Atopa tódolos ángulos A comprendidos entre 0° e 360° que cumpran: $\sin^2(A) = \frac{1}{2}$

22 Atopa tódolos ángulos A entre 0° e 360° que cumpran as seguintes condicións:

- | | | |
|----------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| a) $\sin(A)=1$ | b) $\cos(A)=-1$ | c) $\sin(A)=0'5$ |
| d) $\sin(A)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | e) $\tan(A)=\frac{5}{2}$ | f) $\sin(A)+\cos(A)=\frac{1}{2}$ |
| g) $\sin(A)=2\cos(A)$ | h) $\sin(A)+\cos(A)=\sqrt{2}$ | i) $\tan(A)=2\cdot\cos(A)$ |

23 Desde os extremos dun túnel, rectilíneo e horizontal, vese o cumio do monte con ángulos de 15° e 10° . Se a altura do monte desde o nivel do túnel é de 560 m ¿Cal é a lonxitude do túnel?

- 24** Un avión achégase ó aeroporto de Labacolla. O ángulo que forma a visual ó avión en relación á horizontal desde a torre de control é de 5° . Despois de percorrer 5 km en dirección á torre, o ángulo pasou a ser de 10° . ¿A que altura voa o avión e cal é a súa distancia a torre no primeiro intre?
- 25** A función $f(x)=2x-6$ ten por gráfica unha recta.
- Atopa as coordenadas dos puntos onde esa recta corta ós eixes de coordenadas.
 - Representa graficamente esa función.
 - Medimos a inclinación dunha recta polo ángulo que forma co eixe X. ¿Cal é a inclinación desa recta?
- 26** Calcula a tanxente dese ángulo ¿Qué relación ten coa fórmula de $f(x)$? ¿Coidas que esa relación é casual? Xustifica a resposta.
- 27** Un triángulo ten dous ángulos de 40° e 30° respectivamente. O lado común ós dous ángulos mide 20 m. ¿Canto miden os outros dous lados do triángulo?
- 28** ¿Pode existir un triángulo que teña por lados 10, 9 e 20 metros? ¿Qué condicións teñen que cumprir tres segmentos para que podan ser os lados dun triángulo?
- 29** Resolve, cando sexa posible, os seguintes triángulos:
- | | |
|--|--|
| a) $a=12$ m, $b=9$ m, $A=30^\circ$ | b) $a=20$ m, $B=40^\circ$, $C=120^\circ$ |
| c) $a=12$ m, $b=9$ m, $C=30^\circ$ | d) $a=20$ m, $b=20$ m, $C=30^\circ$ |
| e) $a=25$ m, $B=40^\circ$, $A=60^\circ$ | f) $A=50^\circ$, $B=110^\circ$, $C=30^\circ$ |
- 30** Resolve o triángulo que ten base 15 m, altura 12 m e o ángulo oposto á base é de 30° .

Problema: Dado un triángulo rectángulo calquera, demostra que o centro da circunferencia circunscrita ó triángulo está sobre a hipotenusa.