

Unidade 3:

Xeometría vectorial afín

1. Coordenadas cartesianas e polares.
2. Os vectores libres do plano
 - 2.1. Concepto de vector.
 - 2.2. Características: Módulo, dirección e sentido.
3. Operacións con vectores.
 - 3.1. Suma de vectores e produto por escalares.
 - 3.2. Bases dos vectores do plano. Componentes dun vector.
4. A recta no plano.
 - 4.1. Ecuación vectorial da recta.
 - 4.2. Outras ecuacións da recta.

Introducción

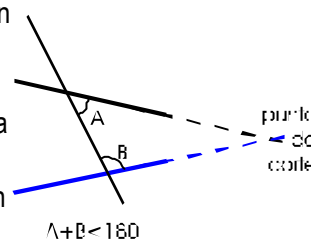
A Xeometría

Os antigos exipcios víanse obrigados a refacer as divisións das propiedades despois de cada enchente do Nilo que arrastraba consigo tódalas marcaxes das terras. Para poder facelo necesitaban de planos, medidas de distancias e ángulos, coñecer as figuras xeométricas e as súas propiedades. Dise que foi no antigo exipcio onde naceu a Xeometría (xeo=terra, metría=medida) pero, seguramente, podemos remontarnos máis atrás. As figuras abstractas que aparecen nos petroglifos tamén son unha forma de Xeometría.

Foron sen embargo os sabios da Grecia Clásica, en especial Euclides, os que elevaron á Xeometría a categoría de ciencia dándolle un conxunto de axiomas¹ nos que apoiarse.

Euclides estableceu os seus cinco famosos axiomas nos que debían basearse tódalas construcións e teoremas xeométricos:

- I. Por dous puntos pode trazarse unha única recta.
- II. Un segmento pode prolongarse de maneira continua ata unha liña recta infinita.
- III. Pode construírse unha circunferencia de centro un punto dado e cun radio dado.
- IV. Tódolos ángulos rectos son iguais.
- V. Se unha recta corta a outras dúas non paralelas, entón as dúas rectas córtanse do lado no que os



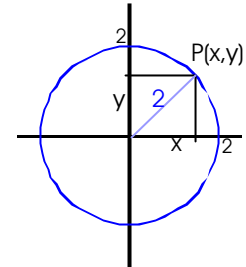
¹ De axio, xusto. Os axiomas son propostas que se consideran válidas por si mesmas. A partir deles, mediante razoamentos lóxicos, obtéñense as demais propiedades.

ángulos interiores son menores que dous rectos. Este é o famoso V postulado², tamén coñecido como das paralelas, pois equivale a que “por un punto exterior a unha recta pode trazarse unha e só unha paralela a esa recta”.

Consecuencia destes postulados é que, para facer unha demostración, só pode utilizarse a regra e o compás.

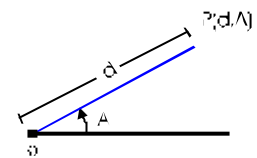
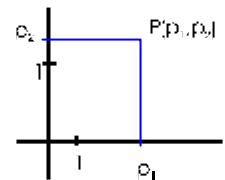
A Xeometría analítica

O matemático e pensador francés René Descartes (1596-1650) descubriu o xeito de transformar os problemas xeométricos en problemas numéricos e alxébricos mediante a introducción de coordenadas (a circunferencia de radio 2 e centro na orixe equivale á ecuación $x^2+y^2=4$ porque as coordenadas dos puntos da circunferencia cumpren esa ecuación e, ademais, son os únicos que a cumpren).



Sistemas de coordenadas no plano

- **Coordenadas cartesianas:** Eliximos a orixe de coordenadas e dúas rectas pasando pola orixe, sobre cada unha desas rectas e partindo da orixe eliximos dúas medidas (que poden ser iguais ou non). A posición de cada punto do plano queda determinada pola súa distancia ós eixes de coordenadas (medida en relación as unidades que temos elixido).
- **Coordenadas polares:** Elíxese a orixe, unha semirecta (eixe), e unha unidade de medida para as distancias. As coordenadas dun punto son a distancia dese punto a orixe e o ángulo que forma co eixe a “visual” desde a orixe ó punto.



Actividade: ¿Cales son as coordenadas polares dos puntos de coordenadas cartesianas (4,3), (-12,9), (-6,-8) e (8,-6)? Atopa fórmulas que permitan cambiar automaticamente de coordenadas cartesianas a polares.

² Aplícase o termo postulado (de postular, propoñer) cando os axiomas son menos evidentes, pero seguen considerándose válidos.

Xeometría Afín

Xeometría Afín

A Xeometría Afín (afín=semellante) é a que só trata de problemas de intersección e paralelismo e non utiliza as medidas de distancias nin de ángulos.

Para facilitar o seu estudio imos apoiarnos nos vectores do plano, o que nos permitirá resolver moitos problemas dun xeito moito máis rápido e elegante.

Vector

Chamarémolle **vector libre** do plano a un segmento orientado que poderemos situar libremente en calquera posición do plano.

Para determinar un vector necesitaremos coñecer:

- **Módulo**, é dicir a lonxitude do segmento.
- **Dirección**, entendendo por tal o feixe de rectas paralelas que o contén (dous vectores teñen a mesma dirección cando as rectas que os conteñen son paralelas).
- **Sentido**. Para cada dirección existen dous sentidos opostos segundo cara a onde apunte o vector (nótese que só podemos comparar os sentidos de vectores coa mesma dirección).

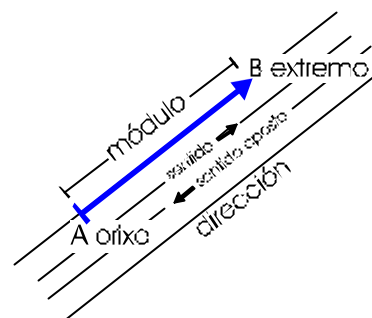
Outro xeito de determinar un vector é coñecendo o punto do que parte (orixe) e o punto onde remata (extremo).

Os vectores nomearémolos cunha letra minúscula cunha frecha enriba, \vec{v} , ou indicando a súa orixe e o seu extremo, \overrightarrow{AB} .

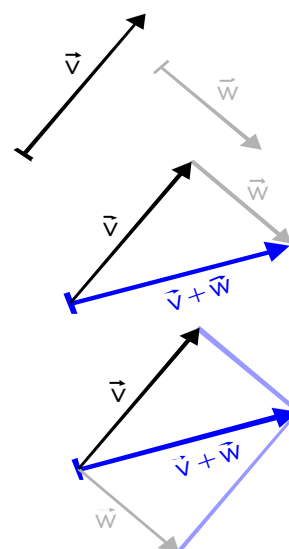
Suma de vectores

Para sumar dous vectores poñemos un a continuación do outro facendo coincidir a orixe do segundo co extremo do primeiro. A suma será o vector que vai da orixe do primeiro ó extremo do segundo.

Tamén podemos utilizar a **regra do paralelogramo**, neste caso sitúanse cas orixes en común e complétase o paralelogramo. A suma será o vector que forma a diagonal do paralelogramo.



Para describir exactamente moitas das magnitudes que coñeces cumpre un número, para a súa magnitude, pero tamén unha dirección e un sentido: Forzas, velocidades, aceleracións, intensidade eléctrica, posición dun punto, etc. describíense utilizando vectores.



Regra do paralelogramo

Pódese comprobar facilmente que a suma de vectores verifica as seguintes propiedades:

- 1 **Conmutativa.** Sexan \vec{v} e \vec{w} vectores, entón:

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$$

- 2 **Asociativa.** Dados \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} , entón:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

- 3 **Existe neutro** (por convenio consideramos a existencia dun vector de módulo 0 que chamaremos $\vec{0}$). Calquera que sexa o vector \vec{v} , entón $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$

- 4 **Todo vector ten oposto** (o oposto dun vector é outro vector que ten a mesma dirección e o mesmo módulo pero o sentido contrario, noméase cun signo “-“): $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

Son as mesmas propiedades que verifica a suma de números polo que poderemos operar cos vectores do mesmo xeito.

Producto dun número por un vector

O produto dun número por un vector é outro vector que ten:

Módulo: O produto do módulo do vector polo número.

Dirección: A mesma que a do vector de partida.

Sentido: Igual ó do vector orixinal se o número é positivo e contrario se é negativo.

Ó produto dun número por un vector tamén se lle chama *produto por escalares*³.

O produto por escalares verifica as seguintes propiedades:

5. **Distributiva da suma de números:**

$$(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$$

(fíxate que a suma do primeiro membro é unha suma de números e a do segundo unha suma de vectores).

6. **Distributiva da suma de vectores:**

$$a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}$$

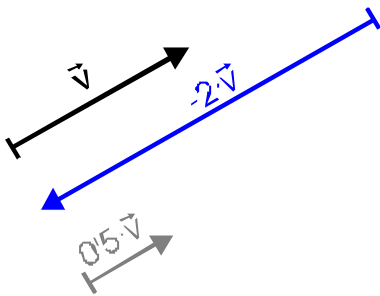
7. **Asociativa:** $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$

(no primeiro membro hai dous produtos de números por vectores e no segundo un produto de números e outro de un número por un vector).

8. **Producto pola unidade:** $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ (un vector por 1 é o mesmo vector)

9. **Producto por 0:** $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ (un vector por 0 é o vector $\vec{0}$)

10. **Producto por -1:** $-1 \cdot \vec{v} = -\vec{v}$ (ó multiplicar por -1 un vector obtense o vector oposto).



³ Escalares=en escada, emprégase este termo para indicar que os números podemos poñelos en ordenados de maior a menor, mentras que os vectores non xa que non é posible comparar vectores con direccións diferentes.

Actividade: Comproba as propiedades 9 e 10 a partir das anteriores utilizando as que che resulten convenientes.

Unha consecuencia fundamental da definición de produto dun número por un vector é que, se dous vectores non nulos teñen a mesma dirección, entón un é igual ó outro multiplicado por un número.

$$\vec{v} \parallel \vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v} = a \cdot \vec{w} \\ \vec{w} = b \cdot \vec{v} \end{cases}$$

O número polo que debemos multiplicar é o cociente dos módulos, con signo positivo se teñen o mesmo sentido ou negativo se os sentidos son contrarios.

Se non teñen a mesma dirección, eso non podería facerse, e diremos que os vectores son independentes.

Debemos considerar aparte ó vector $\vec{0}$ xa que para todo vector \vec{v} , $\vec{0} = 0 \cdot \vec{v}$ pero non $\vec{v} = a \cdot \vec{0}$ ($\vec{v} \neq \vec{0}$).

Combinación linear de vectores

As ideas de suma de vectores e o poder expresar un vector como produto dun número por outro coa mesma dirección preséntannos a posibilidade de construír calquera vector a partir duns poucos combinándoos axeitadamente.

Se eliximos dous vectores do plano que non teñan a mesma dirección \vec{e}_1 e \vec{e}_2 entón, calquera outro vector do plano \vec{v} pode poñerse como combinación deles.

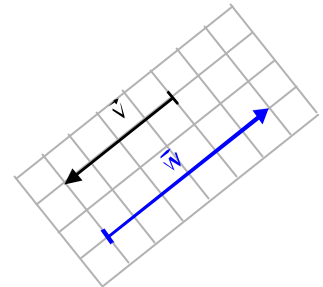
Para facelo só temos que trazar pola orixe e o extremo de \vec{v} rectas coa dirección de \vec{e}_1 e \vec{e}_2 respectivamente:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_1 \parallel \vec{e}_1 \Rightarrow \vec{v}_1 = a \cdot \vec{e}_1 \\ \vec{v}_2 \parallel \vec{e}_2 \Rightarrow \vec{v}_2 = b \cdot \vec{e}_2 \end{array} \right\} \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2$$

Diremos que $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ é unha **base** dos vectores do plano e ós números a e b chamarémoslles **compoñentes** de \vec{v} en relación a esa base. Escribímolo $\vec{v} = (a, b)$.

En xeral, chámase **combinación linear** dun conxunto de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ a unha suma deses vectores multiplicados por números: $a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + a_n \cdot \vec{v}_n$.

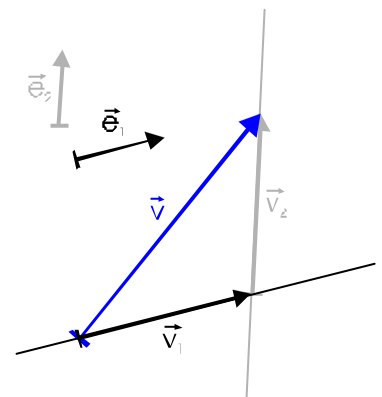
Diremos que un conxunto de vectores é linearmente independente se a única combinación linear súa que da o vector $\vec{0}$ é a que ten tódolos coeficientes 0:



Os vectores da figura teñen a mesma dirección. Os seus módulos son 4 e 6, polo tanto:

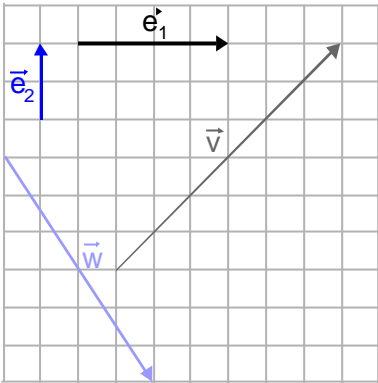
$$\vec{v} = -\frac{4}{6} \vec{w} \text{ e } \vec{w} = -\frac{6}{4} \vec{v}$$

(O signo negativo débese a que os vectores teñen sentidos contrarios).



$$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \text{ independent} \Leftrightarrow a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_n \vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ \dots \\ a_n = 0 \end{cases}$$

Son dependentes cando algún dos coeficientes da combinación linear non é 0.



Actividade: a) Constrúe \vec{v} e \vec{w} a partir de \vec{e}_1 e \vec{e}_2 . Escribe as compoñentes.

b) Elixo outra base diferente e constrúe con ela \vec{v} e \vec{w} . Escribe as compoñentes.

c) Comproba que \vec{v} e \vec{w} son independentes.

Operacións e compoñentes

Ó ter os vectores referidos a unha base, podemos considerar cada vector como un par de números (as súas compoñentes) e facer de xeito analítico as operacións con vectores.

Na actividade anterior:

$$\vec{v} = 1'5 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2 \equiv (1'5, 3)$$

$$\vec{w} = -3 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 \equiv (-3, 1)$$

- **Suma de vectores:** No caso anterior

$$\vec{v} + \vec{w} = (1'5 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2) + (-3 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2) \equiv (-1'5, 4)$$

En xeral:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 \\ \vec{w} = w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2 \end{array} \right\} \vec{v} + \vec{w} = (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2) + (w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2) =$$

$$v_1 \vec{e}_1 + w_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + w_2 \vec{e}_2 = (v_1 + w_1) \cdot \vec{e}_1 + (v_2 + w_2) \cdot \vec{e}_2$$

As compoñentes do vector suma son a suma das compoñentes é dicir, súmanse compoñente a compoñente:

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

- **Producto por un número:**

$$5 \cdot \vec{v} = 5 \cdot (1'5 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2) = 7'5 \cdot \vec{e}_1 + 15 \cdot \vec{e}_2 \equiv (7'5, 15)$$

En xeral:

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2$$

$$a \cdot \vec{v} = a \cdot (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2) = av_1 \vec{e}_1 + bv_2 \vec{e}_2$$

As compoñentes do produto son as compoñentes do vector multiplicadas polo número, polo tanto:

$$a \cdot \vec{v} = a \cdot (v_1, v_2) = (a \cdot v_1, a \cdot v_2)$$

Vectores coa mesma dirección

Se dous vectores teñen a mesma dirección, as súas compoñentes son proporcionais:

$$(v_1, v_2) \parallel (w_1, w_2) \Leftrightarrow (v_1, v_2) = a \cdot (w_1, w_2) \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = a \cdot w_1 \\ v_2 = a \cdot w_2 \end{cases}$$

Consecuencia do anterior é que dous vectores teñen a mesma dirección se e só se a razón entre as súas compoñentes é a mesma:

$$(v_1, v_2) \parallel (w_1, w_2) \quad (v_1, w_1 \neq 0) \Leftrightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{w_2}{w_1}$$

Pendente dun vector: Sexa $\vec{v} = (v_1, v_2)$, con $v_1 \neq 0$,

chamámoslle pendente de \vec{v} ó número: $m = \frac{v_2}{v_1}$

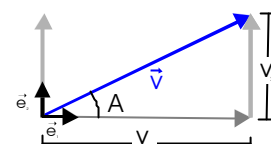
(Excluimos $v_1=0$ para evitar a división entre 0, xa que non é posible).

A pendente é a tanxente do ángulo que forma o vector co primeiro elemento da base e indica a dirección do vector

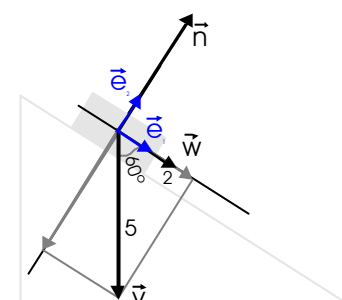
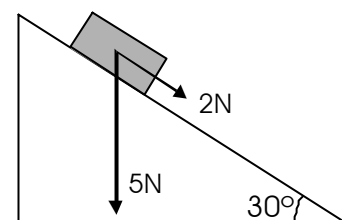
Exemplo: A un obxecto de 5 N de peso situado nun plano inclinado dáselle un impulso inicial de 2 N. Se o plano forma un ángulo de 30° en relación á horizontal ¿Cal é a forza resultante que actúa sobre o obxecto?

Solución: Para facilitar os cálculos, referimos os vectores a unha base. Eliximos \vec{e}_1 e \vec{e}_2 axeitados ó problema (na dirección do movemento e perpendicular ó plano) e calculamos as compoñentes do peso e do impulso en relación a eles.

- Peso: $\vec{v} = 5 \cos(60) \cdot \vec{e}_1 - 5 \sin(60) \cdot \vec{e}_2 \equiv (2,5, -4,33)$
- Normal: $\vec{n} = 0 \cdot \vec{e}_1 + 5 \sin(60) \cdot \vec{e}_2 \equiv (0, 4,33)$
- Impulso: $\vec{w} = 2 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 \equiv (2, 0)$
- Resultante: $\vec{v} + \vec{n} + \vec{w} = (2,5, -4,33) + (0, 4,33) + (2, 0) = (4,5, 0)$



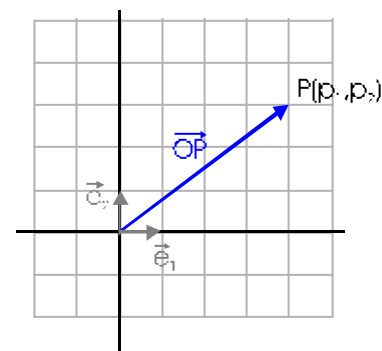
A pendente dun vector é a tanxente do ángulo que forma co primeiro elemento da base.



Vectores e coordenadas.

Para introducir coordenadas no plano debemos:

1. Elixir a orixe de coordenadas.
2. Elixir unha base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ (dous vectores con distinta dirección). É preferible que os vectores sexan perpendiculares e de módulo 1, nese caso diremos que é unha **base ortonormal**.
3. As coordenadas dun punto son as compoñentes do vector que vai da orixe a ese punto en relación a \vec{e}_1 e \vec{e}_2

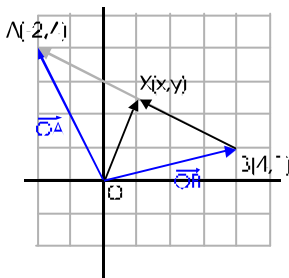
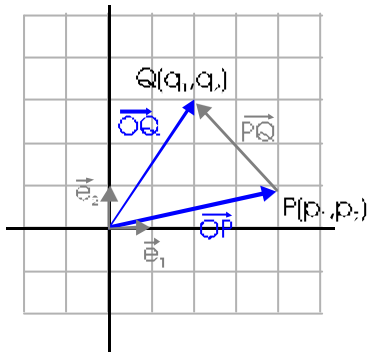


Elixindo \vec{e}_1 e \vec{e}_2 perpendiculares e de módulo 1 (base ortonormal), as coordenadas vectoriais coinciden coas cartesianas.

$$P(p_1, p_2)$$

$$\overrightarrow{OP} = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 \Rightarrow \overrightarrow{OP} = (p_1, p_2)$$

O vector que vai da orixe de coordenadas ó punto recibe o nome de **vector de posición do punto**. Deste xeito podemos entender o par (p_1, p_2) como as coordenadas do punto P ou como compoñentes do vector \overrightarrow{OP} , xa que ámbolos dous obxectos, punto e vector de posición, quedan identificados.



Vector que vai dun punto a outro

Calcúlase restando o vector de posición do extremo menos o da orixe.

$$\left. \begin{array}{l} P(p_1, p_2) \\ Q(q_1, q_2) \end{array} \right\} \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

$$\overrightarrow{PQ} = (q_1, q_2) - (p_1, p_2) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$$

Exemplo: Calcula o punto medio do segmento de extremos A(-2,4) e B(4,1).

Solución: Sexa X o punto medio de AB. Calcular as coordenadas do punto equivale a calcular as compoñentes do seu vector de posición.

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BX} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} = (4,1) + \frac{1}{2} [(-2,4) - (4,1)] = (1,2.5)$$

Outro xeito de resolver o problema é tendo en conta que o vector \overrightarrow{AX} ten que ser a metade do vector \overrightarrow{AB} :

$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \Rightarrow (x, y) - (4,1) = \frac{1}{2} [(-2,4) - (4,1)]$$

$$(x, y) = (4,1) + \frac{1}{2} [(-2,4) - (4,1)] = (1,2.5)$$

Actividade: Deducir unha fórmula xeral para o punto medio dun segmento.

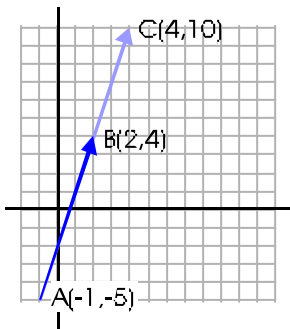
Exemplo: Comproba se os puntos A(-1,-5), B(2,4) e C(4,10) están aliñados (estar nunha mesma recta).

Solución: Se os puntos están aliñados, os vectores que van dun dos puntos ós outros dous teñen que ter a mesma dirección.

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = a \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3,9) \\ \overrightarrow{AC} = (5,15) \end{array} \right\} (3,9) = a(5,15) \Leftrightarrow (3,9) = (5a, 15a)$$

Para que dous vectores sexan iguais, teñen que ser iguais compoñente a compoñente:



$$(3,9) = (5a, 15a) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 5a \Rightarrow a = \frac{3}{5} \\ 9 = 15a \Rightarrow a = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Dado que obtemos o mesmo valor de a para as dúas compoñentes, os vectores teñen a mesma dirección e, polo tanto, os tres puntos están sobre unha recta.

Actividade: Comproba se $A(-2,5)$, $B(4,1)$ e $C(7,-2)$ están aliñados.

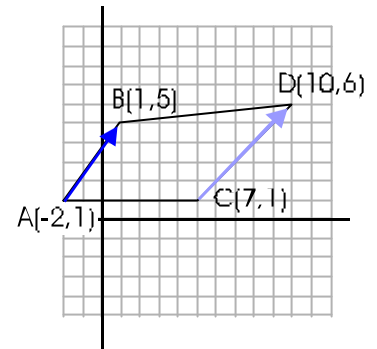
Exemplo: ¿Forman os puntos $A(-2,1)$, $B(1,5)$, $C(7,1)$ e $D(10,6)$ os vértices dun paralelogramo?

Solución: Un paralelogramo é un cuadrilátero que ten os lados paralelos dous a dous. Polo tanto, os vectores que forman os lados opostos teñen que ser iguais ou opostos (teñen a mesma dirección o o mesmo módulo).

É un paralelogramo si e só si $\vec{AB} = \vec{CD}$

$$\left. \begin{aligned} \vec{AB} &= (1,5) - (-2,1) = (3,4) \\ \vec{CD} &= (10,6) - (7,1) = (3,5) \end{aligned} \right\} \vec{AB} \neq \vec{CD}$$

Polo tanto, non forman un paralelogramo.



Exemplo: Nun certo intre da súa travesía, un barco está situado no punto de coordenadas $(2,9)$. Se a súa velocidade é tal que cada hora efectúa un desprazamento dado polo vector $(2,-3)$, pídese:

¿En que punto se atopará o cabo de 1 hora? ¿E de 2 horas? ¿E de t horas?
¿Qué tipo de traxectoria segue o barco?

Solución:

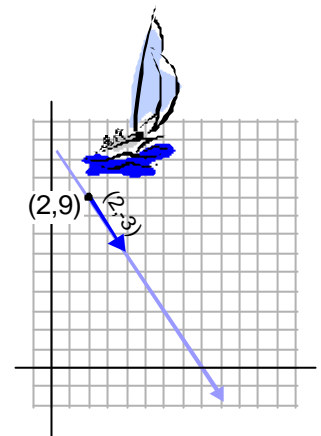
Despois de 1 hora: $(x, y) = (2,9) + (2,-3) = (4,6)$

Despois de 2 horas: $(x, y) = (2,9) + 2 \cdot (2,-3) = (6,3)$

Despois de t horas: $(x, y) = (2,9) + t \cdot (2,-3)$ (*)

A traxectoria é unha recta. De feito a expresión (*) é un xeito de expresar a ecuación desa recta, facendo operacións resulta:

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 + 2t \\ y &= 9 - 3t \end{aligned} \right\} \begin{aligned} t &= \frac{x-2}{2} \rightarrow \frac{y-9}{-3} = \frac{x-2}{2} \rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 12 \end{aligned}$$

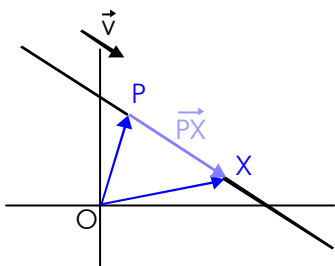


Ecuación vectorial dunha recta

Dado un punto $P(p_1, p_2)$ dunha recta e un vector $\vec{v}(v_1, v_2)$ coa mesma dirección da recta, entón a expresión:

$(x, y) = (p_1, p_2) + t(v_1, v_2)$ (t un parámetro con valores en \mathbb{R}) describe os puntos da recta ou, o que é o mesmo, ó darlle valores a t obtemos tódolos puntos da recta e só os puntos da recta.

Demostración: Debemos comprobar que calquera punto da recta cumpre esa ecuación e que só a cumpren os puntos da recta.



1. Sexa $X(x,y)$ un punto da recta, entón: $\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{PX}$

Por seren P e X puntos da recta, o vector \vec{PX} ten a mesma dirección ca recta e, polo tanto, que $\vec{v}(v_1, v_2)$:

$$\vec{PX} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{PX} = t \cdot \vec{v} \quad (\text{sendo } t \text{ un certo número real})$$

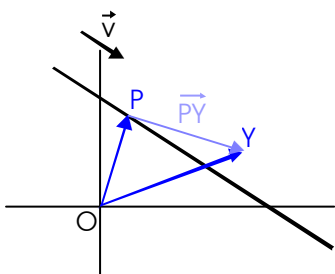
Substituíndo: $\vec{OX} = \vec{OP} + t \cdot \vec{v}$

Por compoñentes: $(x, y) = (p_1, p_2) + t(v_1, v_2)$

Esa expresión recibe o nome de **ecuación vectorial da recta** e o vector $\vec{v}(v_1, v_2)$ **vector de dirección da recta**.

2. Se $Y(x',y')$ non é un punto da recta \vec{PY} non é paralelo a \vec{v} , logo $\vec{PY} = (x'-p_1, y'-p_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ non son proporcionais: non hai ningún número t tal que:

$$(x', y') - (p_1, p_2) = t(v_1, v_2) \Rightarrow \begin{cases} x' = p_1 + t \cdot v_1 \\ y' = p_2 + t \cdot v_2 \end{cases}$$



Outras ecuacións da recta

Facendo transformacións na ecuación vectorial da recta podemos expresar esa ecuación de diversas maneiras:

$$(x, y) = (p_1, p_2) + t(v_1, v_2) \rightarrow (x, y) = (p_1 + t \cdot v_1, p_2 + t \cdot v_2)$$

Igualando as compoñentes resulta:

$$\left. \begin{aligned} x &= p_1 + t \cdot v_1 \\ y &= p_2 + t \cdot v_2 \end{aligned} \right\} \text{Ecuacións paramétrica da recta}$$

Despexando t e igualando:

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} \quad \text{Ecuación continua da recta.}$$

Operando e traspoñendo termos obtemos a **ecuación xeral**:

$$v_2 x - v_1 y + p_2 v_1 - p_1 v_2 = 0 \xrightarrow[\substack{v_2=A \\ -v_1=B \\ p_2 v_1 - p_1 v_2 = C}]{\quad} Ax + By + C = 0$$

Despexando y resulta a coñecida **ecuación explícita**:

$$y = \frac{v_2}{v_1} x + \frac{p_2 v_1 - p_1 v_2}{v_1} \xrightarrow[\substack{v_2=a \\ p_2 v_1 - p_1 v_2 = b}]{\quad} y = ax + b$$

Hai que ter en conta que, dependendo de cal sexa o vector de dirección, algunhas destas ecuacións (continua, explícita) pode non existir xa que non podemos dividir por 0.

Exemplo: Atopa a ecuación da recta que pasa por A(3,7) e B(5,3).

Solución: Para a ecuación vectorial necesitamos un punto da recta (podemos elixir A ou B) e un vector de dirección (usaremos o vector \overrightarrow{AB})

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (5,3) - (3,7) = (2,-4) \\ r &\equiv (x, y) = (5,3) + t(2,-4)\end{aligned}$$

Podemos ir transformando a ecuación vectorial ata obter a explícita:

$$\left. \begin{array}{l} x = 5 + 2t \\ y = 3 - 4t \end{array} \right\} \xrightarrow{1^a) \cdot 2 + 2^a)} 2x + y = 13 \rightarrow y = -2x + 13$$

Exemplo: Atopa a ecuación da recta que pasa por A(3,7) e B(5,7).

Solución: Vector de dirección (o vector \overrightarrow{AB}): $\overrightarrow{AB} = (5,7) - (3,7) = (2,0)$

Ecuación vectorial da recta: $r \equiv (x, y) = (3,7) + t(2,0)$

Transformamos a ecuación vectorial ata obter a explícita:

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 + 2t \\ y = 7 + 0t \end{array} \right\} \xrightarrow{2^a)} y = 7$$

Exemplo: Atopa a ecuación da recta que pasa por A(3,7) e B(3,3).

Solución: Vector de dirección $\overrightarrow{AB} = (3,3) - (3,7) = (0,-7)$.

Ecuación vectorial: $r \equiv (x, y) = (3,3) + t(0,-7)$

Podemos ir transformando a ecuación vectorial ata obter a explícita:

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 + 0t \\ y = 3 - 7t \end{array} \right\} \xrightarrow{1^a)} x = 3$$

Neste caso trátase dunha recta vertical e NON ten ecuación explícita.

Intersección e paralelismo

Trátase de estudar a posición relativa de dúas rectas no plano a partir das súas ecuacións. Pódense dar tres casos distintos:

- **Cortarse nun punto.**
- **Paralelas:** Cando teñen a mesma dirección. Diremos que son paralelas en *sentido estricto* se non teñen puntos comúns.
- **Coincidentes:** As rectas son a mesma. Pode considerarse un caso de paralelismo en sentido non estricto.

Temos dous xeitos de estudar a posición relativa de dúas rectas a partir das súas ecuacións:

- 1 Comprobar se as direccións son as mesmas (mediante as pendentes, os coeficientes das ecuacións xerais ou os vectores de dirección). Deste xeito non sempre é doado

distinguir entre rectas paralelas (en senso estricto) e coincidentes.

- 2 Resolver o sistema formado polas súas ecuacións
- Solución única: as rectas córtanse nun punto.
 - Moitas solucións: as rectas son coincidentes.
 - Sen solución: as rectas son paralelas en sentido estricto.

Exemplo: estudar a posición relativa dos pares de rectas:

- $r \equiv (x, y) = (2, -1) + t(-1, 3)$ e $s \equiv y = -3x + 2$
- $r \equiv 2x - 4y + 1 = 0$ e $s \equiv y = -3x + 2$
- $r \equiv (x, y) = (0, 1) + t(2, -5)$ e $s \equiv -10x - 4y + 4 = 0$

Solución:

a) 1º método: Comparamos as direccións das rectas mediante as súas pendentes. En r , $(-1, 3)$ é un vector de dirección e a súa pendente coincide coa da recta. En s a pendente é -3 :

$$\left. \begin{array}{l} m_r = \frac{3}{-1} = -3 \\ m_s = -3 \end{array} \right\} \text{As pendentes coinciden, son paralelas}$$

2º método: Estudiamos a intersección das rectas pasando as ecuacións á forma xeral ou á explícita. Un punto común verificaría as dúas ecuacións, logo sería unha solución do sistema:

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv 3x + y = 5 \\ s \equiv y = -3x + 2 \end{array} \right\} 3x + (-3x + 2) = 5 \rightarrow 2 = 5$$

Chegamos a unha contradicción ($2=5$), polo tanto as rectas non se cortan. Son paralelas en sentido estricto.

b) Calculamos os puntos de corte:

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv 2x - 4y = 2 \\ s \equiv 3x + y = 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{(1^*) + 2^*) \cdot 4} 14x = 14 \rightarrow x = 1$$

$$3 \cdot 1 + y = 2 \rightarrow y = 2 - 3 = -1$$

Córtanse en $(1, -1)$

c) 1º método:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, -5) \rightarrow m_r = \frac{-5}{2} \\ \vec{v}_s = (-B, A) \rightarrow m_s = \frac{-10}{4} \end{array} \right\} \frac{-5}{2} = \frac{-10}{4} \text{ As rectas son paralelas}$$

2º método:

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv 5x + 2y = 2 \\ s \equiv -10x - 4y = -4 \end{array} \right\} \xrightarrow{(1^*) \cdot 2 + 2^*)} 0 = 0, \text{ sempre certo para calquera } x \text{ e } y.$$

O sistema ten infinitas solucións, as rectas son a mesma.

En realidade non era necesario resolver o sistema, só cumpría decatarse de que os coeficientes da segunda ecuación son proporcionais ós da primeira.

Vector: Segmento orientado.

- **Módulo:** Lonxitude do vector.
- **Dirección:** Feixe de rectas paralelas que o contén.
- **Sentido:** Para cada dirección hai dous sentidos opostos.

Suma de vectores: Mediante a regra do triángulo (poñendo un a continuación do outro) ou a regra do paralelogramo. Ten as mesmas propiedades ca suma de números: Asociativa, conmutativa, neutro e oposto.

Analiticamente: $\vec{v} + \vec{w} = (v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$

Producto por escalares: É un novo vector coa mesma dirección que se obtén multiplicando o módulo polo número, e se o número é negativo, cambiando o sentido do vector orixinal.

Analiticamente: $a \cdot \vec{v} = a \cdot (v_1, v_2) = (a \cdot v_1, a \cdot v_2)$

Vectores ca mesma dirección: Se dous vectores teñen a mesma dirección, cada un pode obterse multiplicado o outro por un número.

Pendente dun vector: $\vec{v} = (v_1, v_2)$, con $v_1 \neq 0$, a pendente é: $m = \frac{v_2}{v_1}$ (se dous

vectores teñen a mesma pendente, teñen a mesma dirección)

Combinación linear de vectores: Suma de vectores multiplicados por números.

Vectores independentes: Se a única combinación linear súa que da o vector $\vec{0}$ é a que ten tódolos coeficientes 0.

Base: No plano, dous vectores con diferente dirección abundan para construír calquera outro. Forman unha base.

Calquera vector pode poñerse como combinación linear dos elementos dunha base: $\vec{v} = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 \equiv (v_1, v_2)$ (v_1 e v_2 compoñentes do vector)

Base ortonormal: Dous vectores perpendiculares e de módulo 1.

Coordenadas e vectores (se a base é ortonormal coinciden coas cartesianas):

1. Eliximos a orixe de coordenadas.
2. Eliximos a base de vectores.
3. As coordenadas dun punto son as compoñentes do vector que vai da orixe a ese punto en relación á base: $\vec{OP} = p_1 \vec{e}_1 + p_2 \vec{e}_2 \Rightarrow \vec{OP} = (p_1, p_2)$

O vector que vai da orixe de coordenadas ó punto é o **vector de posición do punto**.

(p_1, p_2) son as coordenadas do punto ou as compoñentes do vector vector de posición.

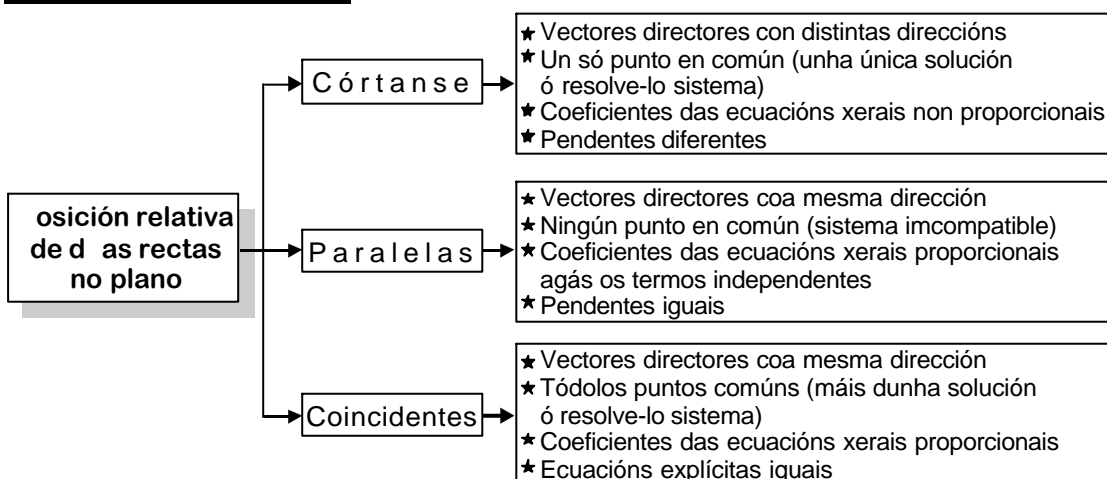
Vector que vai dun punto a outro: Obtense restando o vector de posición do extremo menos o da orixe: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (q_1, q_2) - (p_1, p_2)$

Ecuación vectorial dunha recta: Necesitamos un punto $P(p_1, p_2)$ da recta e un vector de dirección $\vec{v}(v_1, v_2)$. entón teremos a expresión: $(x, y) = (p_1, p_2) + t(v_1, v_2)$

Outras ecuacións da recta: Facendo transformacións na ecuación vectorial da recta podemos expresar esa ecuación de diversas maneiras:

- **Ecuacións paramétrica da recta:**
$$\left. \begin{aligned} x &= p_1 + t \cdot v_1 \\ y &= p_2 + t \cdot v_2 \end{aligned} \right\}$$
- **Ecuación continua da recta:**
$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}$$
- **Ecuación xeral:**
$$Ax + By + C = 0$$
- **Ecuación explícita:**
$$y = ax + b$$

Posición de dúas rectas:



Ampliación

O postulado das paralelas.

O axioma V de Euclides equivale a que por un punto exterior a unha recta pode trazarse unha e só unha paralela.

Este axioma semella moito máis complexo que os demais polo que, desde os tempos da Grecia Clásica, foi obxecto de controversias: ¿É realmente un axioma ou pode deducirse a partir dos anteriores?.

Tódolos intentos de demostralo a partir dos demais foron errados, polo que se mantivo como un problema sen resolver ata o século XIX.

O matemático Farkas Bolyai, que dedicou parte da súa vida a tentar demostrar o postulado das paralelas, díxolle ó seu fillo Janos cando se enterou que este tamén estaba obsesionado co mesmo problema: “Por amor de Deus, prégocho. Esquéceco, témeo como as paixóns sensuais porque, o mesmo que elas, pode chegar a absorber o teu tempo e a privarte da saúde, da paz de espírito e da felicidade”.

O matemático Nicolai Lobachewsky (1793-1856) adoptou un enfoque diferente⁴. En lugar de tentar demostrar o postulado das paralelas, construíu unha xeometría na que se incluía un postulado alternativo ó das paralelas: por un punto exterior a unha recta poden trazarse varias rectas paralelas a ela.

A xenialidade de Lobachewsky é doada de entender: se o axioma V non depende dos outros pode construírse unha xeometría coherente que non o cumpra e, se depende deles, esa xeometría tería contradicións internas.

A xeometría de Lobachewsky é coherente, o que demostra que o axioma V non depende dos outros. É certamente unha xeometría estraña, Lobachewsky chamoulle “xeometría imaxinaria”.

Estas ideas supuxeron un cambio enorme. A xeometría deixou de ser unha escrava do mundo físico para transformarse no estudio dun universo abstracto rexido polas súas propias leis lóxicas.

Berhard Riemann (1826-1866), o gran matemático alemán, foi aínda máis lonxe. Consideraba que a xeometría non debía estudar puntos e rectas no sentido habitual, senón conxuntos n-plas (coordenadas de puntos nun espacio de dimensión n) que se combinan seguindo certas leis⁵. A xeometría euclídea é un caso particular desas novas xeometrías.

Riemann destacaba a importancia da definición de distancia entre dous puntos moi próximos a partir do módulo do vector que vai dun punto ó outro. Na xeometría euclídea o módulo dun vector do plano (x,y) calcúlase

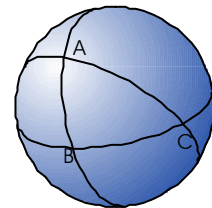
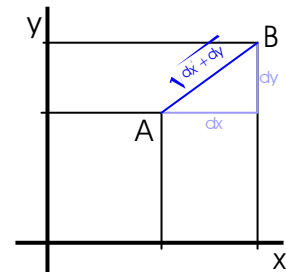
mediante a expresión: $|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Paro esa é só unha das infinitas fórmulas posibles para calculalo. Unha fórmula máis xeral sería:

$$|(x, y)| = \sqrt{ax^2 + by^2 + cxy} \quad a, b \text{ e } c \text{ números ou funcións.}$$

Podemos construír modelos que nos permitan entender mellor esas xeometrías.

Xeometría esférica: Interpretamos o plano como a superficie dunha esfera e as rectas como círculos máximos sobre esa esfera (nesta xeometría non hai paralelas a unha recta por un punto exterior e os ángulos dun triángulo suman máis de 180°).

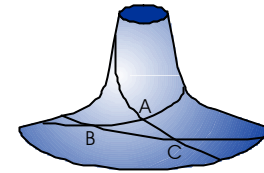


Os ángulos A, B e C suman máis de 180°

⁴ Janos Bolyai (1802-1860) chegou, de xeito independente, as mesmas conclusións que Lobachewsky nun traballo publicado como apéndice a outro do seu pai, pero atopouse coa falla de recoñecemento público o que o levou a non publicar nada máis.

⁵ Nesta unidade, se esqueces as referencias ó plano, estudias conxuntos de pares (x,y) nun espacio de dimensión 2 e que se combinan seguindo certas leis, tal como propoñía Riemann.

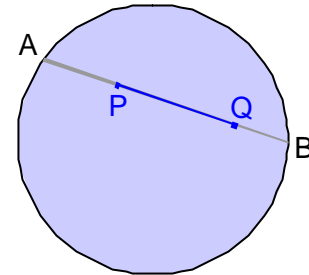
Xeometría hiperbólica: Considerando o plano como a superficie dun hiperboloide de revolución e as rectas como xeodésicas sobre ela (infinitas paralelas a unha recta por un punto exterior e os ángulos dun triángulo suman menos de 180°).



Os ángulos A, B e C suman menos de 180°

Xeometría de Klein: Un exemplo máis simple é o modelo hiperbólico de Klein (1849-1925) no que o plano é o interior dun círculo e unha recta o segmento (sen extremos) de recta contido nese círculo. O distancia entre dous puntos obtense mediante a expresión:

$$d(P,Q) = \text{Ln} \left(\frac{\overline{AQ} \cdot \overline{PB}}{\overline{AP} \cdot \overline{QB}} \right)^{(6)}$$



Problema: Na xeometría de Klein

- ¿Verifícase o postulado V de Euclides? Xustifica a resposta.
- Calcula a distancia entre dous puntos, un situado no centro e outro próximo ó centro.
- Calcula a distancia entre dous puntos, un situado no centro e outro próximo ó bordo do espacio.

Pode que non o creas, pero a xeometría hiperbólica de Klein é moi semellante á euclídea, agás no V postulado.

Pode parecer que estas xeometrías só teñen un interese puramente teórico, que non poden utilizarse para describir o mundo físico, pero non é así.

O modelo do universo de Newton baséase na xeometría euclídea. É un modelo magnífico, que permite predicir a volta dun cometa despois de centos de anos, un eclipse, as mareas, ... a posición de tódolos astros do Sistema Solar con centos ou miles de anos de antelación e cunha gran precisión. É un modelo no que a luz viaxa seguindo unha liña recta no sentido euclídeo.

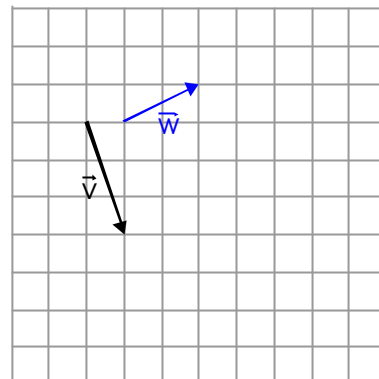
Einstein construíu un modelo aínda mellor, un modelo no que os erros son menores e no que a luz tamén viaxa seguindo unha liña recta pero xa non son rectas no senso euclídeo, son as "liñas máis curtas" entre dous puntos. O modelo de Einstein xa non se basea na xeometría euclídea, utiliza unha xeometría de Riemann.

⁶ Ln é unha operación chamada "logaritmo neperiano", incluída nas calculadoras científicas. Para este problema só necesitas coñecer que $\text{Ln}(1)=0$ e que canto maior é o número, maior é o logaritmo neperiano.

Exercicios e actividades

1 Dados os vectores v e w do gráfico, calcula:

- $v+w$
- $2v+w$
- $v-w$
- $-v+2w$
- $v-3w$
- Dado que v e w non teñen a mesma dirección, forman unha base dos vectores do plano. Calcula as compoñentes dos vectores anteriores en relación a esa base.



2 Dados os vectores $\vec{v} = (-3, 2)$ e $\vec{w} = (2, 1)$ efectúa gráfica e numericamente as seguintes operacións:

- $\vec{v} + \vec{w}$
- $2\vec{v}$
- $-3\vec{w}$

3 Estudia se os vectores $\vec{v} = (-8, 6)$ e $\vec{w} = (12, -9)$ teñen a mesma dirección.

4 Calcula cantas veces é máis largo o vector $(9, 12)$ que o $(-6, -8)$.

5 Estudia cales dos seguintes pares de vectores forman bases dos vectores do plano:

- $\vec{v} = (2, -4)$ $\vec{w} = (-5, 3)$
- $\vec{v} = (6, -4)$ $\vec{w} = (-9, 6)$
- $\vec{v} = (0, 0)$ $\vec{w} = (2, 1)$

6 Estudia cales dos seguintes conxuntos de vectores son linearmente independentes:

- $\vec{v} = (5, 3)$ $\vec{w} = (1, -2)$
- $\vec{v} = (-10, -4)$ $\vec{w} = (15, 6)$
- $(-1, 3)$, $(2, 1)$ e $(4, -2)$

7 Escribe o vector $(6, -3)$ como combinación lineal dos vectores $(2, -1)$ e $(1, 5)$.

8 Escribe o vector $(4, 7)$ como combinación lineal dos vectores $(4, -2)$ e $(-6, 3)$.

9 Comproba se os puntos $A(-2, 3)$, $B(6, -1)$ e $C(10, -3)$ están aliñados.

10 Estudia se os puntos $A(5, 0)$, $B(-1, -2)$ e $C(8, 2)$ forman os vértices dun triángulo.

11 Calcula m de xeito que os vectores $(m, 2)$ e $(-6, 5)$ teñan a mesma dirección.

12 Calcula m de xeito que puntos $(m, -2m)$, $(1, 4)$ e $(5, 9)$ esatean aliñados.

- 13** Atopa as coordenadas dos puntos que dividen ó segmento de extremos $A(1,5)$ e $B(7,-4)$ en tres partes iguais.
- 14** Descubre unha fórmula para calcular o punto medio dun segmento coñecendo as coordenadas dos seus extremos.
- 15** Chámase mediana a recta que une un vértice co punto medio do lado oposto. Atopa as coordenadas do baricentro (punto de corte das medianas) do triángulo de vértices $A(2,1)$, $B(8,-3)$ e $C(6,7)$.
- 16** Un explorador está no punto de coordenadas $(2,14)$ e desexa dirixirse o punto $(34,-18)$. Calcula que pode efectuar o traxecto en 3 horas, ¿cal debe ser o a súa velocidade (vector que percorre cada hora)?
- 17** Pepiño atópase no punto de coordenadas $(10,-30)$ e quere chegar ó punto $(100,210)$. Cada hora efectúa un desprazamento que ven dada polo vector $(3,8)$. ¿Conseguirá chegar ó seu destino? Razona a resposta.
- 18** Comproba, de dúas maneiras diferentes, se as rectas de ecuacións $4x - 6y = 4$ e $-6x + 9y + 2 = 0$ son paralelas
- 19** Atopa a ecuación xeral das seguintes rectas:
- Recta que pasa polos puntos $A(5,-1)$ e $B(-2,-6)$
 - Recta paralela a $3x+2y=4$ pasando pola orixe de coordenadas.
 - Eixe X.
 - Eixe Y.
- 20** Estudia se os puntos $A(-3,0)$, $B(1,5)$, $C(7,-1)$ e $D(3,-6)$ forman os vértices dun paralelogramo.
- 21** Dados os puntos $A(-1,5)$, $B(5,2)$, $C(1,-1)$ e $D(5,-3)$
- Estudia se o cuadrilátero que forman ten os lados paralelos.
 - Atopa as coordenadas do punto onde se cortan as diagonais dese cuadrilátero.
 - ¿Cal debería ser-lo punto D para que o cuadrilátero fose un paralelogramo
- 22** Calcula as coordenadas dun punto que forme con $A(1,-7)$, $B(3,5)$ e $C(9,1)$ os vértices dun paralelogramo. ¿Hai máis dunha solución? ¿Cales?
- 23** Atopa a ecuación vectorial da recta $3x+2y=5$
- 24** Atopa a ecuación explícita ou xeral das seguintes rectas:
- Recta que pasa polos puntos extremos $A(1,9)$ e $B(7,3)$
 - Recta paralela á recta de ecuación $(x,y)=(2,-1)+t(2,-4)$ que pasa polo punto $(0,4)$.
 - Recta paralela á recta $2x-3y+4=0$ pasando pola orixe de coordenadas.
 - Recta bisectriz do primeiro e terceiro cuadrantes.

25 Atopa a ecuación explícita ou xeral das seguintes rectas:

- a) Recta que pasa polos pola orixe de coordenadas e ten pendente -3 .
- b) Eixe X.
- c) Eixe Y

26 Os puntos $A(-1,-2)$, $B(5,2)$, $C(-3,5)$ e $D(6,11)$ son os vértices dun cuadrilátero, pídese:

- a) Coordenadas do punto medio do lado CD.
- b) Ecuación xeral da recta que pasa por A e D.
- c) ¿Ten algúns lados paralelos?
- d) Ecuación xeral da recta paralela a recta $2x+3y=1$ pasando polo punto A.

27 Estudia a posición relativa dos seguintes pares de rectas:

a) $2x+3y=4$ e $5x-$

b) $y=5x+1$ e $-x+2y+4=0$

$y+5=0$

c) $(x,y)=(1,0)+t(2,-4)$ e $y=-2x+3$

d) $x=0$ e $9x+3y=6$

e) $6x-2y=4$ e $y=3x-2$

f) $(x,y)=(0,2)+t(2,4)$ e $(x,y)=(1,4)+t(-3,-6)$

28 O día 10 de outubro de 1911 R. Amundsen saíu do punto de coordenadas $(-3008,1984)$ cunha velocidade media diaria dada polo vector $(47,-31)$. O seu destino é o Polo Sur. O 3 de novembro do mesmo ano, o inglés Scot sae do punto $(532,-2204)$ cunha velocidade media diaria de $(-7,29)$ e co mesmo obxectivo.

- a) Atopa a ecuación das traxectorias que seguiron os dous exploradores.
- b) ¿Cales son as coordenadas do Polo Sur sabendo que é o punto onde se cortan as traxectorias?
- c) ¿Canto tarda cada un en chegar?

Problema: Demostra que o baricentro dun triángulo está situado en cada mediana a $\frac{2}{3}$ da distancia entre o vértice e o punto medio do lado oposto.

Problema: Demostra que, nos vectores do plano, se dous vectores son linealmente dependentes entón teñen a mesma dirección.

Problema: Demostra que nos vectores do plano o número máximo de vectores que pode ter un conxunto de vectores independentes é 2.