Unidade 4:

Xeometría métrica do plano

1. **Producto escalar de dous vectores.**
2. **Modulo dun vector. Distancia entre dous puntos**
3. **Ángulo de dous vectores. Ángulo de dúas rectas.**
4. **Lugares xeométricos. Mediatriz dun segmento.**
5. **Cónicas: Circunferencia, elipse, parábola e hipérbola.**

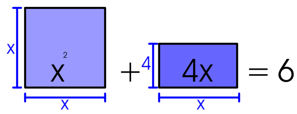
Introducción

Xeometría e Álxebra.

Despois de descubrir que non tódolos números eran racionais, os matemáticos e pensadores da Grecia Clásica dedicaron os seus esforzos á Xeometría.

Naquela época, non tiñan inventado a notación que utilizamos na actualidade. Unha ecuación expresábana como unha relación entre segmentos e, no caso de que aparecesen cadrados, entre áreas.

Por exemplo, a ecuación $x^2 - 4x = 6$ interprétase como a procura dun segmento, *x*, de xeito que a área do cadrado de lado *x* menos a área do rectángulo de base *x* e altura 4 sexa 6.



As cónicas

Problemas clásicos da matemática grega foron a *duplicación do cubo* (atopar un cubo de volume dobre que outro dado) e a *cuadratura do círculo* (dado un círculo, atopar un cadrado coa mesma área.

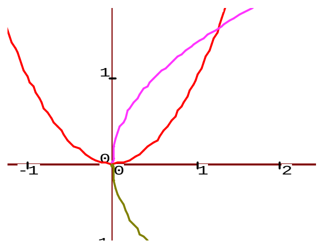
Coa notación alxébrica moderna, a resolución deses problemas é doada:

1. Duplicación do cubo de aresta *a*:

$$x^3 = 2 \cdot a^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{2 \cdot a^3} = a\sqrt[3]{2}$$

2. Cuadratura do círculo de radio r:

$$x^2 = p \cdot r^2 \rightarrow x = \sqrt{p \cdot r^2} = r\sqrt{p}$$



Ningún deses problemas pode resolverse só con regra e compás, polo que a súa resolución estaba máis alá das posibilidades dos métodos da Xeometría Grega. A pesar das dificultades, Menecmo (375 a.p., 325 a.p.), discípulo de Eudoxo e Platón, conseguiu resolver a duplicación dun cubo de aresta *a* mediante a intersección das parábolas $x^2=ay$ e $y^2=2ax$.

Os gregos descoñecían a linguaxe alxébrica. Menecmo describía as parábolas como a intersección dun cono cun plano paralelo a unha xeratriz.

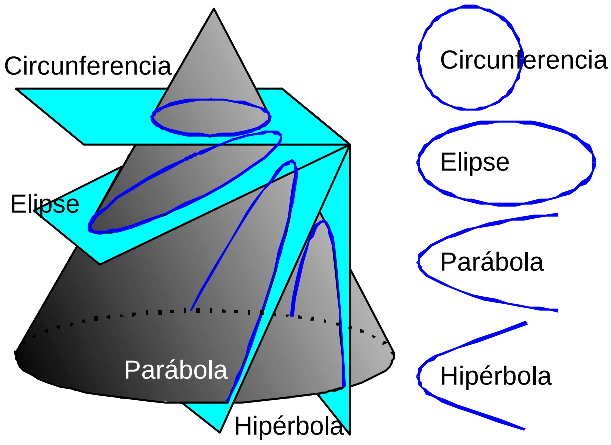
As curvas que se obteñen ó cortar un cono cun plano chámanse **seccións cónicas**[1]:

Circunferencia, cando o plano é perpendicular á altura do cono

Elipse, se o plano corta á xeratriz e á altura.

Parábola, plano paralelo á unha xeratriz.

Hipérbola, se o plano é paralelo á altura.



Dinostrato, irmán de Menecmo, resolve o problema da cuadratura do círculo utilizando a trisectriz de Hipias (unha curva utilizada para dividir un ángulo en tres partes) pero esta solución, igual que a de Menecmo para a duplicación do cubo, non se atén as regras de utilizar só regra e compás polo que durante séculos seguiuse buscando infructuosamente outras solucións só con regra e compás ata que se demostrou a súa imposibilidade, ... pero esa é outra historia.

Problema: Comproba que a abscisa do punto de corte das parábolas $x^2=ay$ e $y^2=2ax$ soluciona efectivamente o problema da duplicación dun cubo de aresta a.

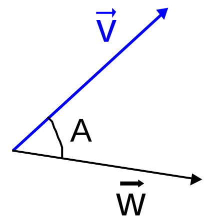
[1] O máis detallado estudio sobre as cónicas débese a Apolonio (262 a.p a 190 a.p.), un dos grandes matemáticos da Época Helenística, xunto con Euclides e Arquímedes. Ese estudio foi traducido ó Latín en 1706 por Halley, astrónomo amigo e defensor de Newton, a partir dunha traducción árabe anterior.

Xeometría métrica

Xeometría métrica

Chámase Xeometría Métrica á que se ocupa de problemas nos que aparecen medidas de distancias e ángulos.

Debemos, polo tanto, definir o xeito de medir distancias e ángulos no plano. Para elo imos apoiarnos novamente nos vectores e nunha nova operación: *producto escalar*.



Producto escalar de dous vectores

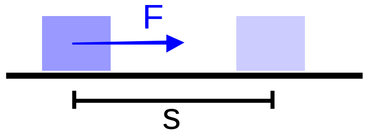
Dados dous vectores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, o producto escalar deses vectores é o número que se obtén multiplicando os módulos polo coseno do ángulo que forman: $\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(A)$

Fíxate que na expresión anterior aparecen dous productos diferentes: No primeiro membro o producto escalar de vectores que estamos a definir e no segundo productos de números.

O producto escalar cumpre as propiedades:

- **Conmutativa:** $\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{v}$
- **Multilinearidade** (linearidade respecto ós dous factores):
  1. En relación á suma de vectores:
     $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ $\qquad(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
     (Nas expresións anteriores aparecen dúas sumas diferentes: suma de vectores e suma de números).
  2. En relación ó producto por escalares:
     $\vec{v}\cdot(a\cdot\vec{w})=a\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})$ $\qquad(a\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}=a\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})$
     (Nesas expresións aparecen tres productos: producto escalar de dous vectores, producto dun vector por un escalar e producto de dous números).

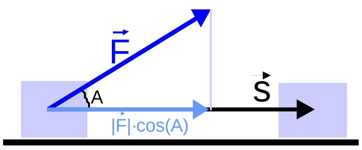
Sobre a situación do debuxo:



Definimos o traballo realizado por unha forza *F* que produce un desprazamento *s* por:

T=F·s

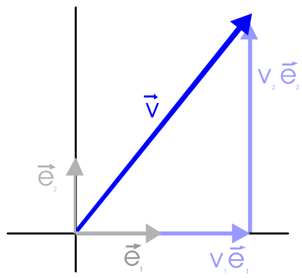
Cando a dirección da forza non coincide coa do desprazamento:



O traballo será o realizado pola "forza efectiva": $|\vec{F}|\cos(A)$

$$T=|\vec{F}|\cdot\cos(A)\cdot s$$

A expresión resultante é o producto escalar do vector que describe a forza polo que correspondente ó desprazamento



$\vec{v}=v_1\vec{e}_1+v_2\vec{e}_2$

Expresión analítica do producto escalar

Utilizando unha base ortonormal $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ (vectores perpendiculares e de módulo 1) para o sistema de coordenadas, podemos calcular o producto escalar de dous vectores $\vec{v}=(v_1,v_2)$ e $\vec{w}=(w_1,w_2)$ mediante a expresión:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=(v_1,v_2)\cdot(w_1,w_2)=v_1\cdot w_1+v_2\cdot w_2$$

Demostración: Utilizando as propiedades do producto escalar obtemos:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=(v_1\vec{e}_1+v_2\vec{e}_2)\cdot(w_1\vec{e}_1+w_2\vec{e}_2)=$$
$$v_1w_1(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1)+v_2w_1(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1)+v_1w_2(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)+v_2w_2(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2)$$

Dado que a base é ortonormal, entón:

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1=|\vec{e}_1|\cdot|\vec{e}_1|\cdot\cos(0)=1$$
$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1=|\vec{e}_1|\cdot|\vec{e}_2|\cdot\cos(90)=0$$
$$\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2=|\vec{e}_2|\cdot|\vec{e}_2|\cdot\cos(0)=1$$

Polo tanto, $\vec{v}\cdot\vec{w}=v_1\cdot w_1+v_2\cdot w_2$

Podemos incluso definir o producto escalar mediante a súa expresión analitica e deducir a partir dela a anterior definición, pois ambalas dúas definicións son equivalentes.

O producto escalar proporciona un método sinxelo e "elegante" para medir distancias e ángulos

Exercicio: Calcula o producto escalar dos vectores (-3,4) e (8,6) e interpreta o resultado.

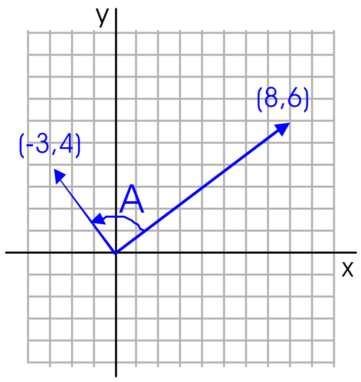
Solución: Utilizando a expresión analítica do producto escalar resulta:

$$(-3,4)\cdot(8,6)=-3\cdot 8+4\cdot 6=0$$

O producto dos vectores é: $|(-3,4)|\cdot|(8,6)|\cdot\cos(A)$

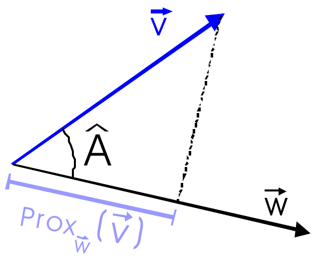
Para que o producto sexa 0 debe ser 0 algún dos factores:

- ¿Algún dos módulos é 0?: Neste caso non é así, o único vector con módulo 0 é $\vec{0}=(0,0)$.
- Logo o coseno é 0: O que significa que o ángulo que forman é de 90º ou 270º. Os vectores son perpendiculares.



Consecuencias e propiedades

Utilizando a definición de producto escalar e a expresión analítica do mesmo podemos deducir algunhas propiedades:



Interpretación gráfica: O valor absoluto do producto escalar de dous vectores é o producto do módulo dun dos vectores pola proxección do outro vector sobre el:

$$\cos(A)=\frac{\text{prox}_{\vec{w}}(\vec{v})}{|\vec{v}|}=\frac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}\Rightarrow|\vec{v}\cdot\vec{w}|=|\vec{w}|\cdot\text{prox}_{\vec{w}}(\vec{v})$$

Proxección dun vector sobre outro: Tendo en conta o anterior, podemos calcular facilmente a proxección dun vector sobre outro:

$$|\vec{v}\cdot\vec{w}|=|\vec{w}|\cdot\text{prox}_{\vec{w}}(\vec{v})\Rightarrow\text{prox}_{\vec{w}}(\vec{v})=\frac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{|\vec{w}|}$$

Vectores perpendiculares: Debido a que cos(90º)=0 e cos(270°)=0, o producto escalar de dous vectores perpendiculares é 0: $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

<u>Vector perpendicular a outro dado:</u> Dado un vector $\vec{v}(v_1, v_2)$, $\vec{w}(-v_2, v_1)$ é perpendicular a el:

$$(v_1, v_2) \cdot (-v_2, v_1) = -v_1 v_2 + v_2 v_1 = 0$$

<u>Vectores coa mesma dirección:</u> Tendo en conta que o coseno de 0° é 1 e o de 180° é −1, o valor absoluto do producto escalar de vectores coa mesma dirección é igual ó producto dos seus módulos:

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$$

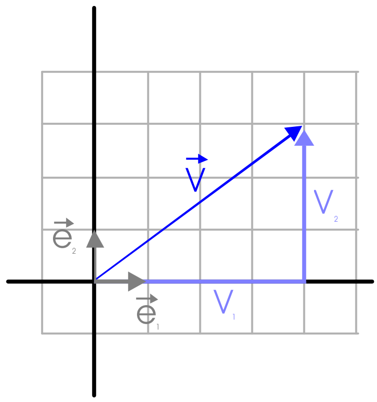
Módulo dun vector

Calcularemos o módulo dun vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ a partir do producto escalar do vector por si mesmo:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(0) = |\vec{v}|^2$$

Polo tanto: $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1 \cdot v_1 + v_2 \cdot v_2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

Graficamente, sen máis que aplicar o Teorema de Pitágoras, vemos que a expresión anterior proporciona efectivamente a medida da lonxitude do vector.



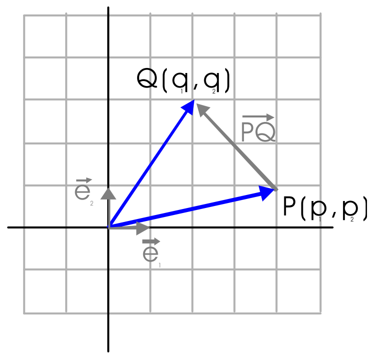
Exercicio: Calcula o módulo do vector (8,6)

Solución: $|(8{,}6)| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{10} = 10$

Distancia entre dous puntos:

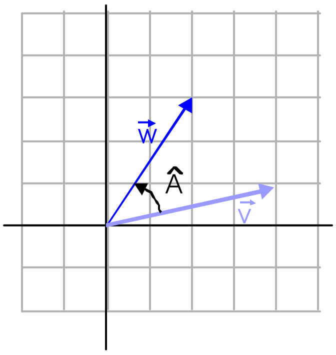
Calculamos a distancia entre dous puntos a partir do módulo do vector que vai dun punto ó outro:

$$\left.\begin{matrix} P(p_1, p_2) \\ Q(q_1, q_2) \end{matrix}\right\} \quad d(P,Q) = |\vec{PQ}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$$



Exercicio: Calcula a distancia entre os puntos P(1,-5) e Q(4,2)

Solución: $d(P,Q) = |\vec{PQ}| = |(3{,}7)| = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58} = 7'62$



Ángulo de dous vectores

Apoiándonos no producto escalar, podemos calcular facilmente o coseno do ángulo que forman dous vectores:

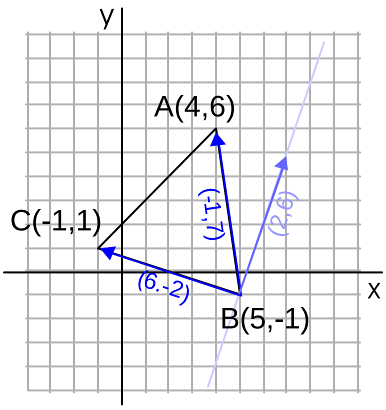
$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}=(v_1,v_2)\\ \vec{w}=(w_1,w_2)\end{array}\right\} \quad \vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(\vec{v},\vec{w})$$

$$\cos(\vec{v},\vec{w})=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}=\frac{v_1\cdot w_1+v_2\cdot w_2}{\sqrt{{v_1}^2+{v_2}^2}\cdot\sqrt{{w_1}^2+{w_2}^2}}$$

Exercicio: Determina canto mide o ángulo que forman (2,3) e (4,1)

Solución: $\cos(A)=\frac{(2,3)\cdot(4,1)}{|(2,3)|\cdot|(4,1)|}=\frac{2\cdot 4+3\cdot 1}{\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2+1^2}}=0'74$

O ángulo é: $A=\cos^{-1}(0'74)=42'26^{\circ}$



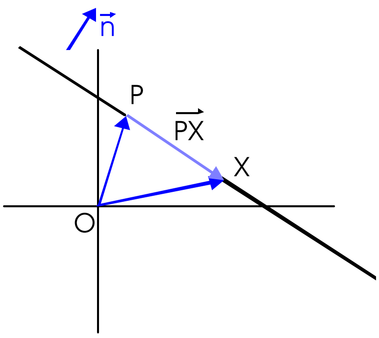
Exercicio: Calcula a área do triángulo de vértices nos puntos A(4,6), B(5,-1) e C(-1,1)

Solución: Necesitamos a base e a altura do triángulo. Poderiamos calcular os lados do triángulo (distancias entre os vértices) e un dos ángulos a partir dos vectores que forman os lados para finalmente calcular a altura, pero a utilización de vectores proporciona un método moito máis rápido e elegante:

- Base: $d(C,B)=|\overrightarrow{CB}|=|(6,-2)|=\sqrt{6^2+(-2)^2}=\sqrt{40}$
- Altura: A altura é a proxección do vector $\overrightarrow{BA}$ sobre un vector $\vec{n}$ perpendicular á base: $\overrightarrow{BC}=(-6,2)\Rightarrow\vec{n}=(2,6)$

$$\text{prox}_{\vec{n}}\overrightarrow{BA}=\frac{(-1,7)\cdot(2,6)}{|(2,6)|}=\frac{-1\cdot 2+7\cdot 6}{\sqrt{2^2+6^2}}=\frac{40}{\sqrt{40}}$$

- A área é: $S=\frac{1}{2}\sqrt{40}\cdot\frac{40}{\sqrt{40}}=20$



Fíxate que se X non estivese na recta, o vector $\overrightarrow{PX}$ non tería a mesma dirección ca recta.

Ecuación normal da recta

Dado $P(p_1,p_2)$ un punto dunha recta e $\vec{n}(n_1,n_2)$ un vector perpendicular á recta entón, utilizando o producto escalar, podemos atopar unha nova expresión para ecuación da recta:

$$[(x,y)-(p_1,p_2)]\cdot(n_1,n_2)=0$$

Demostración: Debemos comprobar que calquera punto da recta cumpre esa ecuación e que só a cumpren os puntos da recta.

Se X(x,y) é un punto da recta, entón o vector $\overrightarrow{PX}$ ten a mesma dirección ca recta e é perpendicular a $\vec{n}(n_1, n_2)$, polo tanto o seu producto escalar será 0: $\overrightarrow{PX} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0$

Por compoñentes: $[(x, y) - (p_1, p_2)] \cdot (n_1, n_2) = 0$

Esa expresión recibe o nome de *ecuación normal da recta* e o vector $\vec{n}(n_1, n_2)$ *vector de normal ou característico*.

Desenvolvendo a expresión anterior obtemos a ecuación xeral:

$$n_1 x + n_2 y - (n_1 p_1 + n_2 p_2) = 0 \xrightarrow[\substack{n_1 = A \\ n_2 = B \\ -(n_1 p_1 + n_2 p_2) = C}]{} Ax + By + C = 0$$

Fíxate que os coeficientes A e B determinan un vector perpendicular á recta.

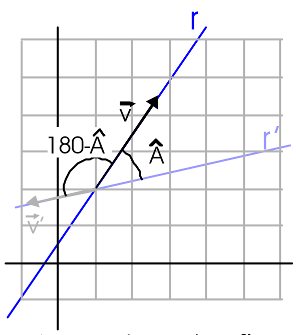
Ángulo de dúas rectas

Dúas rectas córtanse formando catro ángulos iguais dous a dous. Definimos o ángulo de dúas rectas como o menor deses ángulos. Fíxate que ese ángulo está sempre entre 0º e 90º.

O coseno dese ángulo coincide co valor absoluto do coseno do ángulo que forman os vectores de dirección da recta e tamén co dos vectores característicos da recta:

$$\cos(r, r') = \left| \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}'}{|\vec{v}| \cdot |\vec{v}'|} \right|$$

Necesítase o valor absoluto pois o ángulo que forman os vectores pode ser o que definimos como ángulo entre as rectas ou o seu suplementario e, nese caso, o valor do coseno sería o mesmo pero con signo negativo.



As rectas da figura córtanse formando un ángulo A, pero os seus vectores de dirección forman un ángulo 180–A e cos(A)= –cos(180–A)

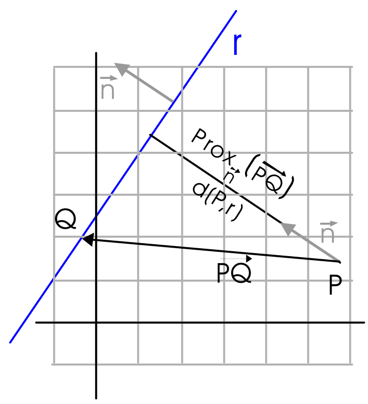
Exercicio: Calcula o ángulo formado polas rectas -2x+3y=4 e 5x+y=2

Solución: Os vectores característicos das rectas son (-2,3) e (5,1).

$$\cos(A) = \left| \frac{(-2,3) \cdot (5,1)}{|(-2,3)| \cdot |(5,1)|} \right| = \left| \frac{-7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} \right| = 0'38 \rightarrow A = \cos^{-1}(0'38) = 67'62$$

Distancia dun punto a unha recta

Definimos a distancia dun punto *P* a unha recta *r* como a menor das distancias do punto ós puntos da recta.



O punto da recta máis próximo a *P* obtense trazando unha perpendicular a *r* pasando por *P*.

A distancia entre eses dous puntos será a distancia de *P* a *r*.

Podemos calcular facilmente esa distancia tendo en conta que é a proxección do vector que vai de P a X(x,y), un punto calquera da recta, sobre un vector normal da recta:

$$d(P,r) = \text{prox}_{\vec{n}}\left(\overrightarrow{PX}\right) = \left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PX}}{|\vec{n}|}\right|$$

Se a recta está en forma xeral:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv Ax+By+C=0 \\ \vec{n}=(A,B) \end{array}\right\} d(P,r) = \left|\frac{(A,B)\cdot[(p_1,p_2)-(x,y)]}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

$$d(P,r) = \left|\frac{Ap_1+Bp_2-Ax-By}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

Dado que X é un punto da recta $C=-Ax-By$, polo tanto:

$$d(P,r) = \left|\frac{Ap_1+Bp_2+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

Exercicio: Calcula a distancia do punto (3,-5) á recta -2x+3y=4

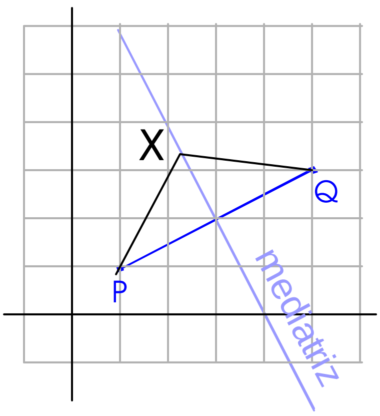
Solución: $d(A,r) = \left|\frac{-2\cdot 3+3\cdot(-5)-4}{\sqrt{(-2)^2+3^2}}\right| = \left|\frac{-21}{\sqrt{13}}\right| = 5'824$

Lugares xeométricos.

Chámase lugar xeométrico ó conxunto de puntos que verifican unha certa condición. Un lugar xeométrico pode, polo tanto, ser calquera conxunto de puntos inclusive o conxunto baleiro (cando ningún dos puntos do plano verifica a condición que define ó lugar xeométrico).

Estudiamos algúns lugares xeométricos definidos por condicións métricas:

Lugar xeométrico dos puntos que equidistan de dous dados.



Sexan *P* e *Q* os puntos e *X* un punto xenérico dese lugar. Ten que cumprirse: $d(P,X)=d(Q,X)$

$$\sqrt{(x-p_1)^2+(y-p_2)^2} = \sqrt{(x-q_1)^2+(y-q_2)^2}$$

Facendo transformacións e simplificando:

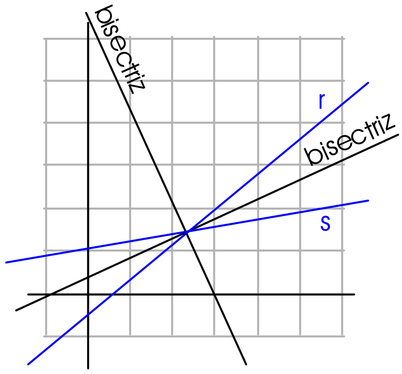
$$-2p_1x+p_1^2-2p_2y+p_2^2=-2q_1x+q_1^2-2q_2y+q_2^2$$

$$(q_1-p_1)x+(q_2-p_2)y+\frac{p_1^2+p_2^2-q_1^2-q_2^2}{2}=0$$

É a ecuación dunha recta pois é do tipo Ax+By+C=0.
O vector característico (vector normal á recta) é:

$$(q_1-p_1, q_2-p_2)=\overrightarrow{PQ}$$

Esa recta é a **mediatriz** do segmento PQ



<u>Lugar xeométrico dos puntos que equidistan de dúas rectas:</u>

Sexan *r* e *s* as rectas. Un punto *X* está nese lugar xeométrico se: d(X,r)=d(X,s)

$$\left.\begin{array}{l} r\equiv Ax+By+C=0 \\ s\equiv A'x+B'y+C'=0 \end{array}\right\} \quad \left|\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=\left|\frac{A'x+B'y+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}\right|$$

$$\left|\frac{Ax}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=\left|\frac{A'x}{\sqrt{A'^2+B'^2}}+\frac{B'x}{\sqrt{A'^2+B'^2}}+\frac{C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}\right|$$

A expresión anterior non é tan complicada como parece: $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ... $\frac{C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}$ son números, chamándolles *a,b, ... c'* resulta:

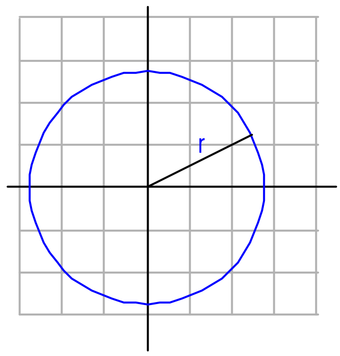
$$|ax+by+c|=|a'x+b'y+c'|$$

Para evitar os valores absolutos debemos xogar coas posibilidades de que as expresións que conteñen teñan signos iguais ou contrarios:

$$ax+by+c=a'x+b'y+c'\rightarrow(a-a')x+(b-b')y+c-c'=0$$
$$ax+by+c=-(a'x+b'y+c')\rightarrow(a+a')x+(b+b')y+c+c'=0$$

Obtemos as ecuacións de dúas novas rectas, as **bisectrices** dos ángulos que forman as rectas iniciais.

<u>Circunferencia:</u> Lugar xeométrico dos puntos que están a unha distancia *r* do centro C(c_1,c_2):

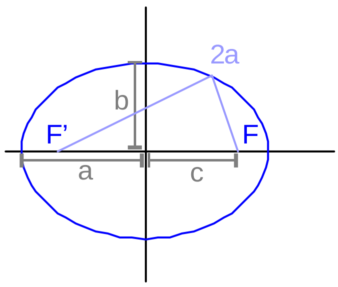


$$d(X,C)=r\Leftrightarrow\sqrt{(x-c_1)^2+(y-c_2)^2}=r$$

No particular, se o centro é a orixe de coordenadas:

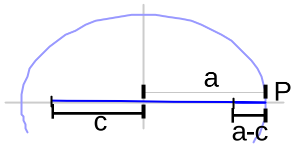
$$\sqrt{x^2+y^2}=r\rightarrow x^2+y^2=r^2$$

<u>Elipse:</u> Lugar xeométrico dos puntos que a suma das súas distancias a dous puntos fixos é constante.



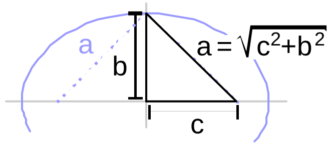
Nunha elipse distinguiremos os seguintes elementos:

- **Focos, F e F':** puntos fixos ós que se calcula as distancias.
- **Distancia focal, c:** Distancia dos focos ó centro.



- **Eixe maior:** Corda maior da elipse.
- **Semieixe maior, a:** Metade do eixe maior.
- **Eixe menor:** Corda menor da elipse.
- **Semieixe menor, b:** Metade do eixe menor.

Se consideramos os puntos da elipse situados ós extremos dos semieixes é doado comprobar que:



- A suma das distancias ós focos é 2a:

$$d(P,F) + d(P,F') = (a - c) + (a + c) = 2a$$

- Relación entre semieixes e distancia focal: $a^2 = b^2 + c^2$

Vemos, como exemplo, o caso de elipses de eixe horizontal e centro na orixe de coordenadas, o que implica que os focos teñen coordenadas (c,0) e (-c,0).

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Para facer desaparecer as raíces illámolas nun membro da ecuación e elevamos ó cadrado (dúas veces):

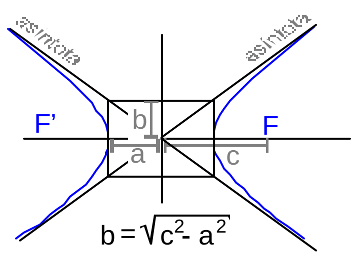
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2a = -\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + y^2$$

$$-a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2 \rightarrow a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right] = c^2x^2 - 2ca^2x + a^4$$

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \xrightarrow[\substack{a^4 - a^2c^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right) \\ a^2 - c^2 = b^2}]{} b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo por a^2b^2 obtemos a ecuación reducida dunha elipse de centro na orixe de coordenadas: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

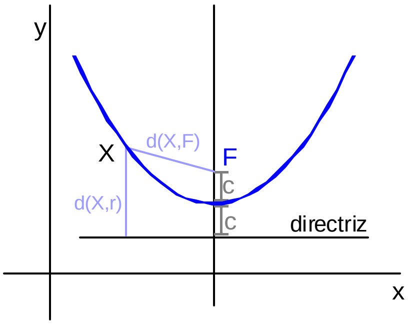


<u>Hipérbola:</u> Lugar xeométrico dos puntos que a diferencia das súas distancias ós focos é 2a.

De xeito semellante á elipse, a ecuación reducida dunha hipérbola de centro na orixe de coordenadas e focos situados no eixe X é:

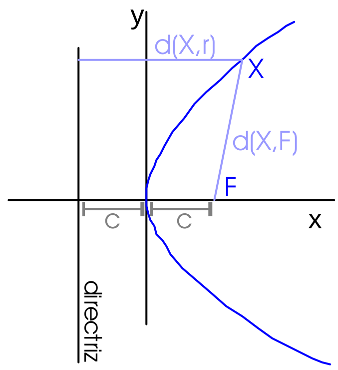
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Problema: Chámanse hipérbolas equiláteras ás que teñen os semieixes *a* e *b* iguais. Atopa a ecuación dunha hipérbola equilátera de centro na orixe de coordenadas e cos focos na bisectriz do 1º e 3º cadrantes.



<u>Parábola:</u> Lugar xeométrico dos puntos que equidistan dun punto fixo (foco) e dunha recta fixa (directriz).

<u>Parábolas de eixe vertical:</u> A directriz é unha recta horizontal (a súa ecuación será do tipo By+C=0) e o foco F(a,b) un punto calquera:



$$\sqrt{(x-c_1)^2+(y-c_2)^2}=\left|\frac{By+C}{B}\right|$$

Elevando ó cadrado e facendo transformacións obtemos unha ecuación do tipo: $y=ax^2+bx+c$

<u>Parábolas de eixe horizontal:</u> A directriz é unha recta vertical. Só trataremos as centradas na orixe, o foco será F(c,0) e a directriz a recta x=-c.

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=x+c \rightarrow y^2=4cx$$

Síntese

Producto escalar de dous vectores

Definición: Producto dos módulos polo coseno do ángulo: $\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(\hat{A})$

Cálculo: Mediante a expresión analítica $\vec{v}\cdot\vec{w}=v_1\cdot w_1+v_2\cdot w_2$

Propiedades:

- **Conmutativa:** $\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{v}$
- **Multilinearidade:**
  Suma: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ $\quad(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
  Producto por escalares: $\vec{v}\cdot(a\cdot\vec{w})=(a\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}=a\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})$
- **Interpretación xeométrica:** $|\vec{v}\cdot\vec{w}|=\left||\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot cos(\hat{A})\right|=|\vec{v}|\cdot prox_{\vec{v}}(\vec{w})$
- **Proxección dun vector sobre outro**: $\text{prox}_{\vec{v}}(\vec{w})=\dfrac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{|\vec{v}|}$
- **Dous vectores son perpendiculares se o seu producto escalar é 0**.
  $$\vec{v}\perp\vec{w}\Leftrightarrow\vec{v}\cdot\vec{w}=0$$
- **Vector perpendicular a outro:** o vector $\vec{w}(-v_2,v_1)$ é perpendicular a $\vec{v}(v_1,v_2)$.

Módulo dun vector

É a raíz do producto escalar do vector por si mesmo: $|\vec{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$

Distancia entre dous puntos

Módulo do vector que vai dun punto ó outro:

$$\left.\begin{matrix}P(p_1,p_2)\\Q(q_1,q_2)\end{matrix}\right\}\quad d(P,Q)=\left|\dot{PQ}\right|=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2}$$

Ángulo de dous vectores

Mídese a partir do coseno:

$$\left.\begin{matrix}\vec{v}=(v_1,v_2)\\\vec{w}=(w_1,w_2)\end{matrix}\right\}\quad cos(\vec{v},\vec{w})=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}=\frac{v_1\cdot w_1+v_2\cdot w_2}{\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2}\cdot\sqrt{w_1{}^2+w_2{}^2}}$$

Ecuación normal da recta

Necesitamos un punto da recta $P(p_1,p_2)$ e un vector perpendicular (característico) $\vec{n}(n_1,n_2)$. A ecuación será: $[(x,y)-(p_1,p_2)]\cdot(n_1,n_2)=0$

Ángulo de dúas rectas

Menor dos ángulos que forman ó cortarse.

$$\cos(r,r') = \left|\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}'}{|\vec{v}|\cdot|\vec{v}'|}\right|$$ ($\vec{v}$, $\vec{w}$ vectores de dirección ou perpendiculares ás rectas)

Distancia dun punto a unha recta

Mínimo das distancias do punto ós puntos da recta

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv Ax + By + C = 0 \\ P(p_1, p_2) \end{array}\right\} \qquad d(P,r) = \left|\frac{Ap_1 + Bp_2 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

Lugares xeométricos.

Conxunto de puntos que verifican unha condición.

Mediatriz dun segmento: Lugar xeométrico dos puntos que equidistan dos extremos do segmento.

Bisectriz de dúas rectas: Lugar xeométrico dos puntos que equidistan das rectas dadas.

Circunferencia: Lugar dos puntos que están a unha distancia *r* do centro .

Ecuación da circunferencia de centro a orixe e radio r: $x^2 + y^2 = r^2$

Elipse: Lugar dos puntos que a suma das súas distancias ós focos é constante (esa constante ten que ser a medida do eixe maior da elipse).

A ecuación da elipse de centro a orixe e semieixes *a* e *b* é: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Hipérbola: Lugar dos puntos que a diferencia das súas distancias ós focos é constante (esa diferencia ten que ser o dobre do semieixe *a*). A ecuación da elipse de centro a orixe e semieixes a e b é: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Parábola: Lugar dos puntos que equidistan dun punto e dunha recta .

De eixe vertical (a directriz é unha recta horizontal): $y = ax^2 + bx + c$

De eixe horizontal (directriz vertical). Ecuación das centradas na orixe $y^2 = 4cx$

Ampliación

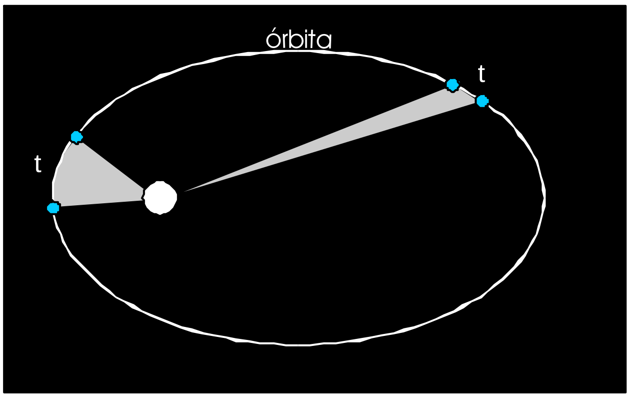
O universo

As primeiras teorías sobre o Universo das que temos noticia datan do 2000 a.C. Nesta época víase a Terra como un gran disco plano envolto por varias esferas concéntricas nas que estaban fixos os demais astros (Lúa, Sol, planetas, estrelas).

En 1609 Johannes Kepler (1571-1630) deduciu as leis que describen o movemento dos planetas do Sistema Solar:

I.- Os planetas describen órbitas elípticas co Sol nun dos focos.

II.- As áreas cubertas polos radios vectores en tempos iguais, son iguais.



Uns anos despois, Isaac Newton (1624-1727) formula a Lei da Gravitación Universal que permite entender e describi-lo movemento de calquera obxecto nun campo gravitatorio.

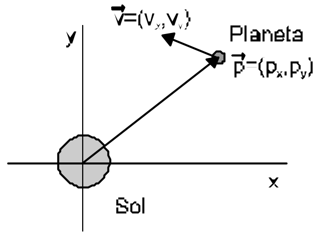
O principio básico da Gravitación universal é moi simple: *"dous corpos atráense cunha forza proporcional ó producto das súas masas e inversamente proporcional ó cadrado das súas distancias:* $\left|\vec{F}\right| = k\dfrac{m \cdot m'}{d^2}$*"*

Un modelo de simulación

Utilizando os nosos coñecementos de Xeometría e de vectores imos intentar construír como é o movemento dun planeta nun sistema solar.

Nun modelo de simulación intentamos mediante un procedemento numérico reproducir un fenómeno físico, para elo pártese das leis que supoñemos describen ese fenómeno e simúlase cun experimento teórico. Se os resultados obtidos aseméllanse á realidade podemos supoñer que as leis de partida son correctas (normalmente é un proceso complicado e laborioso pero, coa axuda de calculadoras ou ordenadores é moito máis doado. De feito, na actualidade, os modelos de simulación xogan un papel fundamental en tódalas ramas da ciencia e da tecnoloxía).

No noso caso, imos construír un modelo de simulación para o movemento dun planeta cerca dunha estrela utilizando a Lei da Gravitación Universal (LGU).



A forza de atracción é a que determina a LGU. Esa forza produce unha aceleración sobre o planeta.

- Situaremos a estrela (un obxecto cunha gran masa M) nun punto do plano e suporemos que está inmóbil.
- Noutro punto calquera do plano situaremos un obxecto de masa *m*, moito menor, cunha velocidade arbitraria. Este obxecto ten que moverse pois, de non facelo, caería cara a estrela.
- A forza de atracción é a que determina a LGU:

$$\left|\vec{F}\right| = G\frac{M \cdot m}{d^2}\ .$$

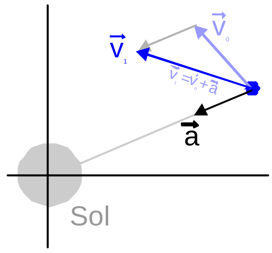
- Esa forza produce unha aceleración sobre o obxecto menos masivo[2] dada pola expresión:

---

[2] Tamén produce unha aceleración sobre o outro, pero ó ser a súa masa moito maior esa aceleración é moi pequena polo que prescindiremos dela.

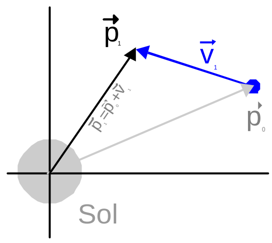
$$\left.\begin{aligned}\left|\vec{F}\right| &= G\frac{M\cdot m}{d^2}\\ \vec{F} &= m\cdot\vec{a}\end{aligned}\right\}\quad \left|\vec{a}\right| = \frac{G\dfrac{M\cdot m}{d^2}}{m} = G\frac{M}{d^2} = \frac{K}{d^2}\quad (3)$$

A aceleración é un vector con dirección a liña que une os centros dos obxectos, sentido cara a estrela e módulo inversamente proporcional ó cadrado da distancia.



- Descomporemos o movemento do astro en fraccións pequenas de tempo nas que suporemos que o movemento é uniforme (para simplificar suponse que esas fraccións de tempo duran a unidade).
- A velocidade nun dese intres calcúlase sumándolle á velocidade no intre anterior a aceleración para o que necesitamos darlle a K un valor axeitado ó tamaño do noso debuxo (fíxate que K depende das unidades, polo que pode tomar calquera valor sen máis que utilizar as unidades axeitadas):

$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\cdot t$, se t=1 temos $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}$



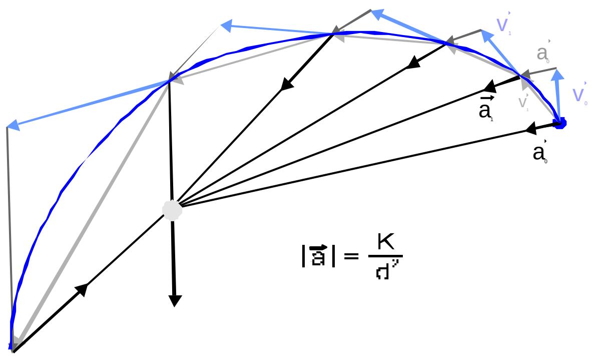
- A nova posición calcúlase a partir da posición anterior sumándolle a velocidade que acabamos de calcular:

$\vec{p} = \vec{p}_0 + \vec{v}\cdot t$, para t=1 resulta $\vec{p} = \vec{p}_0 + \vec{v}$

- A simulación da órbita obtense aplicando sucesivamente os pasos anteriores.

Tódalas operacións efectúanse graficamente, agás o cálculo do módulo da aceleración para o que se emprega a fórmula obtida a partir da Lei da Gravitación Universal.

A principal diferencia entre a simulación e o proceso real é que na simulación o movemento efectúase a saltos discretos do tempo en tanto que na realidade é un proceso continuo. Canto menores sexan eses saltos, mellor será a aproximación.



Os modelos dinámicos como o anterior desempeñan un papel fundamental nas Matemáticas e na Física actuais. Con eles é posible describir fenómenos moi complexos: a evolución do burato de ozono, a contaminación atmosférica, a formación dos planetas, o comportamento dunha coche ó chocar son algúns dos fenómenos que se estudian mediante modelos dinámicos e simulacións utilizando grandes ordenadores para realizar as inxentes cantidades de operacións que precisan.

3 O producto de G·M é constante pois son dous números concretos.

Exercicios e actividades

1 Calcula a distancia entre os puntos (2,4) e (8,-7).

2 Calcula o ángulo formado polos seguintes pares de vectores:

a) $\vec{v}=(6,-9)$, $\vec{w}=(-4,6)$ b) $\vec{v}=(6,-9)$, $\vec{w}=(-12,-8)$ c) $\vec{v}=(0,-4)$, $\vec{w}=(8,8)$ d) $\vec{v}=(4,0)$, $\vec{w}=(0,-2)$

3 Dados os vectores $\vec{v}=(-1,-4)$ e $\vec{w}=(2,-5)$:

a) ¿Cal é o seu módulo?
b) ¿Canto mide o ángulo que forman?
c) Atopa un vector perpendicular a cada un deles.
d) Atopa dous vectores de módulo 1 e coas mesmas direccións que os dados.

4 Dados os vectores $\vec{v}=(4,-3)$ e $\vec{w}=(2,a)$, calcula o valor de a de xeito que os vectores sexan perpendiculares.

5 Comproba se os puntos A(2,-3), B(3,1) e C(5,9) están aliñados.

6 Dados os puntos A(1,-1), B(12,1), C(2,5) e D(11,-5)

a) Estudia se forman os vértices dun paralelogramo.
b) Estudia se forman os vértices dun rectángulo.
c) Calcula a área do cuadrilátero que forman.

7 Atopa as ecuacións xerais das seguintes rectas:

a) Recta que pasa polos puntos A(2,-4) e B(6,2)
b) Recta paralela a 2x–5y=4 pasando polo punto P(-3,2).
c) Recta paralela a y=2x+2 pasando pola orixe de coordenadas.
d) Recta pasando por P(-1,7) e con vector de dirección $\vec{v}=(-1,-4)$.
e) Recta perpendicular á x+6y–2=0 polo punto P(5,-2).

8 Atopa a ecuación xeral das seguintes rectas:

a) Recta que pasa polos puntos A(5,-1) e B(-2,-6)
b) Recta paralela a 3x+2y=4 pasando pola orixe de coordenadas.
c) Mediatriz do segmento de extremos A(0,4) e B(6,0).

9 Calcula as seguintes distancias:

a) Distancia entre os puntos P(-3,-2) e Q(5,6).
b) Distancia entre a recta 2x+9y=5 e o punto P(3,-1).
c) Distancia do punto P(2,6) á recta (x,y)=(-2,0)+t(-2,-3).
d) Distancia entre as rectas 4x+2y=5 e y=-2x+7.
e) Distancia entre as rectas 3x+5y=2 e 2x+6y=1.

10 Calcula, mediante dous procedementos diferentes, a distancia do punto (-2,4) á recta de ecuación –3x+4y–7=0.

11 Atopa as coordenadas dos puntos da recta 2x+3y=4 que está a distancia 10 da recta de ecuación 3x-4y+2=0.

12 Dados os puntos A(4,1), B(1,3) e C(5,6)

a) Estudia se forman os vértices dun triángulo equilátero.
b) Calcula a área do triángulo que forman.

13 ¿Pertence o punto (4,3) a circunferencia de centro a orixe e radio 5?

14 Calcula a ecuación do lugar xeométrico dos puntos que equidistan das rectas 2x+4y=0 e x–5y+2=0.

15 Atopa as ecuacións das seguintes cónicas:

a) Circunferencia de centro na orixe e radio 3.
b) Elipse de centro na orixe e semieixes 6 e 9.
c) Elipse de focos F(4,0) e F'(-4,0) e semieixe maior 5.
d) Parábola de foco F(3,0) e recta directriz x=-3.
e) Parábola de foco F(0,4) e recta directriz y=-4.

16 Atopa as ecuacións das rectas tanxentes á circunferencia de radio $\sqrt{2}$ e centro na orixe nos puntos de abscisa x=1.

17 Calcula os puntos de corte da recta 2x+3y=4 coa elipse de centro na orixe e semieixes 5 e 3.

18 Calcula os puntos de corte da parábola $y=0'5x^2-0'5$ coa circunferencia de centro na orixe e radio 13.

19 Atopa a ecuación do lugar xeométrico dos puntos que equidistan do punto P(4,5) e da recta y=-2.

20 Atopa a ecuación do lugar xeométrico dos puntos que equidistan da circunferencia de centro na orixe e radio 1 e da circunferencia de centro en (4,0) e radio 2. ¿A que corresponde ese lugar xeométrico?

21 Atopa a ecuación do lugar xeométrico dos puntos que equidistan da circunferencia de ecuación $x^2+y^2=4$ e da recta y=-5.

22 Identifica a que tipo de cónicas corresponden as seguintes ecuacións e di cales son os seus principais parámetros:

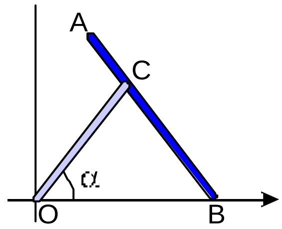
a) $x^2+y^2-16=0$	b) $9x^2+9y^2-3=0$	c) $2x^2+3y^2=6$
d) $x^2-y^2-5=0$	e) $5x+y^2=0$	f) $x^2+y=0$

Problema: Atopa a ecuación da recta tanxente á circunferencia $x^2+y^2=25$ desde o punto (7,1).

Problema: Demosatra que se inscribimos un triángulo nunha circunferencia e un dos lados coincide cun diametro, entón ese triángulo é rectángulo.

Problema: Kepler descubriu que as órbitas dos planetas eran elipses co Sol situado nun dos focos. Situando os eixes de coordenadas co centro no Sol de xeito que o eixe X coincida co eixe maior da órbita, expresa do xeito máis simple posible a ecuación da órbita da Terra en relación a eses eixes (afelio e perihelio da órbita terrestre: $152\cdot10^6$ km e $149\cdot10^6$ km respectivamente.).

Problema: Determina cal é a ecuación do lugar xeométrico dos puntos que equidistan da circunferencia de radio 2 e centro na orixe de coordenadas e a recta de ecuación $x=-6$. ¿A que figura corresponde ese lugar xeométrico?



Problema (proposto en selectividade): Na figura aparece un dispositivo formado por dúas variñas AB e OC. A variña OC está fixa en polos seus extremos en dous eixes e a variña AB ten o extremo B que se despraza ó largo dunha recta que pasa por O (o eixe X). Sábese que $OC=AC=2CB=a$

a) En función do ángulo α atopa as coordenadas de A, de B e de C.
b) Calcula a ecuación do lugar xeométrico que describe o extremo A e indica o tipo de curva de que se trata.