

Unidade 5: Funcións

1. Concepto de función
 - 1.1. Dominio.
 - 1.2. Xeitos de descripción.
2. Características.
 - 2.1. Continuidade.
 - 2.2. Crecemento e decrecemento. Extremos.
 - 2.3. Curvatura. Puntos de inflexión.
 - 2.4. Ramas asíntóticas.
 - 2.5. Periodicidade.
3. Límite dunha función nun punto.
 - 3.1. Definición.
 - 3.2. Cálculo.

Introducción

Matemáticas

O gran matemático Sixto Rios definía as Matemáticas como unha colección de modelos. De feito, as distintas partes das Matemáticas tiveron un desenvolvemento separado e case independente:

- **Álgebra:** Océpase da fundamentación das Matemáticas. Xurde a partir da procura de métodos para resolver ecuacións.
- **Xeometría:** É unha das partes máis antigas. O seu obxectivo é a descrición do espacio e as súas figuras.
- **Análise:** A parte das Matemáticas con maior relación coa Física, de feito o seu nacemento foi o estudio de magnitudes que varían en relación ó tempo (a posición dun móbil, a velocidade, etcétera). O concepto básico do Análise é o de **función**.
- **Probabilidade:** Desenvólvese a partir dos traballos de Pascal e Fermat (s XVII) sobre xogos de cartas e dados. O seu obxectivo é describir fenómenos impredecibles nos que interveña o azar.
- **Estatística:** Xurde dun xeito eminentemente práctico ó estudar a esperanza de vida de poboacións.

O Análise

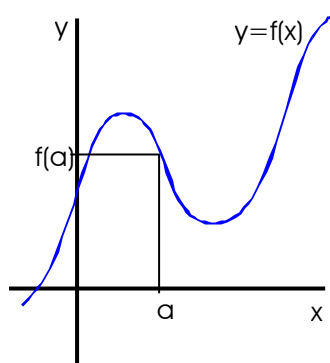
Podemos establecer a súa orixe cando Descartes, despois de inventar os sistemas de coordenadas, establece que algunhas curvas e figuras corresponden a representación gráfica de ecuacións.

Ó traballar con ecuacións en lugar de curvas concretas, os matemáticos pasaron de estudar problemas concretos (cálculo da área dunha elipse, como trazar unha tanxente a unha parábola, ...) a problemas xerais (atopar un método para calcular a área dunha figura a partir da súa ecuación, atopar a ecuación da tanxente a unha curva dada pola súa ecuación, ...).

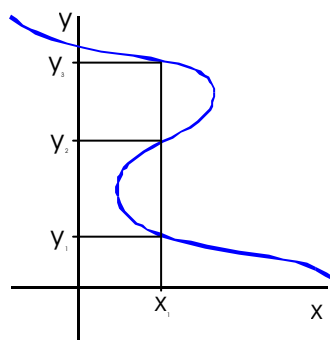
Pero o aspecto fundamental do Análise é que as ecuacións non só describen figuras xeométricas, tamén describen relacións entre magnitudes físicas. A ecuación $y=4'9x^2$ corresponde a unha parábola no plano pero tamén representa o espacio percorrido por un móbil en caída libre.

Dese xeito, o estudio das ecuacións, proporcionou unha ferramenta imprescindible para a descrición da realidade e dos fenómenos físicos. Non é casualidade que Newton sexa un dos inventores do Análise moderno e tamén un dos maiores físicos de tódolos tempos.

Funcións



Esta gráfica corresponde a unha función: A cada valor x correspóndelle un e só un $f(x)$



Esta gráfica non pode ser dunha función: Ó valor x_1 correspóndenlle varios valores de y (y_1, y_2, y_3)

Concepto de función

Cando estudiamos, por exemplo, o efecto invernadoiro atopámonos que é necesario medir a concentración de CO_2 na atmosfera e ver como vai cambiando esa concentración co paso do tempo: Hai unha relación entre o tempo e a cantidade de CO_2 de xeito que, a cada valor do tempo correspóndelle unha certa concentración de CO_2 na atmosfera.

O concepto de función é un modelo para estudar esas relacións entre magnitudes numéricas.

Función: Relación entre conxuntos numéricos de xeito que a cada valor do conxunto inicial correspóndelle un e só un do conxunto final.

O conxunto inicial recibe o nome de **dominio** e **imaxe** ou **percorrido** o conxunto final. As funcións máis habituais, que son as que imos estudar a continuación, teñen por dominio e imaxe dous conxuntos de números reais: son as funcións reais de variable real que nós chamaremos simplemente funcións.

Exemplo: A teoría da relatividade di que a masa dun obxecto depende da súa velocidade segundo a fórmula (m_0 masa en repouso):

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

A relación entre a velocidade, a variable independente, e a masa é, desde o punto de vista matemático, unha función, que ven descrita pola anterior fórmula, pois a cada valor de v correspóndelle un único valor de m .

O dominio son os números reais menores que $c=3 \cdot 10^8$ m/s (velocidade da luz no baleiro) pois, ó substituír na fórmula valores maiores, resulta unha expresión que non pode calcularse nos números reais:

$$v = c \rightarrow m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c}\right)^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - 1^2}} = \frac{m_0}{0} \notin \mathbb{R}$$

$$v = 2c \rightarrow m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{2c}{c}\right)^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - 2^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{-3}} \notin \mathbb{R}$$

Unha consecuencia física da función anterior é que un corpo con masa non pode desprazarse á velocidade da luz.

Descrición dunha función

Podemos describir unha función de moitos xeitos, en especial mediante:

Táboas, nas que aparecen algúns dos valores que relaciona a función.

As táboas son doadas de manexar pero só aparecen algúns dos valores e ás veces é difícil decatarse de cal é a relación entre as magnitudes.

Exemplo: O consumo de electricidade dunha familia en varios meses e o importe correspondente a cada un aparece na táboa:

Desde un punto de vista matemático, estamos diante dunha relación entre dous conxuntos de números reais de xeito que a cada valor do primeiro (o consumo) asóciase un e só un do segundo (o importe correspondente).

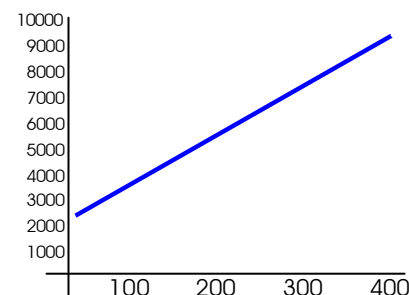
Consumo en kilovatios/hora	Importe en pesetas
156	4874
349	8348
231	6224
70	3326

Gráficas, doadas de manexar e de interpretar pero pouco exactas cando se precisa atopar valores concretos da función. Utilízase sempre o eixe X para os valores do conxunto inicial (variable independente) e o Y para os da final (variable dependente).

Os puntos da gráfica son da forma $(x, f(x))$ pois a segunda coordenada é o valor que a función lle asocia a primeira. A gráfica, e as veces tamén a función, noméanse coa expresión $y=f(x)$.

Exemplo: A gráfica do importe fronte o consumo dos recibos eléctricos anteriores é a da figura.

É doado ver que relación hai entre consumo e importe, pero non é posible apreciar con exactitude os valores concretos. Podemos ver que incluso cun consumo 0 temos que pagar, pero resulta difícil saber exactamente canto.



Fórmulas: é o xeito máis preciso de representar unha función e, a partir dela, é doado construír táboas e gráficas.

En moitas ocasións, cando se quere describir unha relación entre magnitudes reais, non existe ningunha fórmula axeitada.

As funcións que veñen descritas por unha soa fórmula reciben o nome de **funcións elementais**.

Exemplo: Podemos buscar a fórmula da función que describe o importe dos recibos da electricidade segundo o consumo.

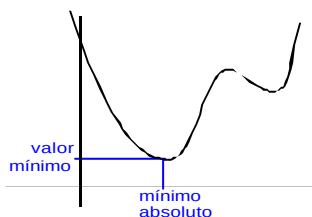
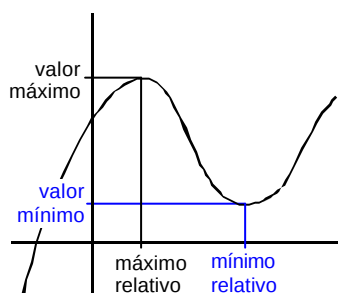
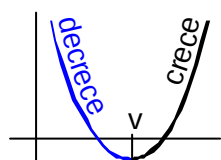
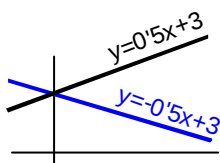
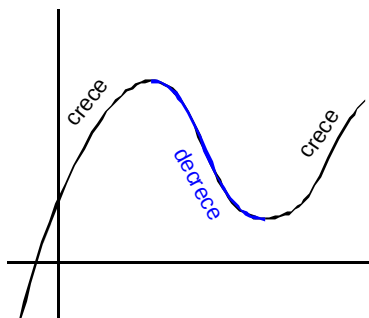
Dado que a gráfica é unha recta, a función ten que ser polinómica de grao 1: $f(x)=ax+b$

Para atopar os valores de a e b substituímos na fórmula xeral dous dos valores da táboa:

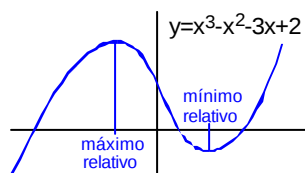
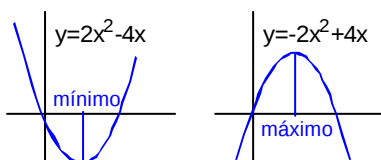
$$\left. \begin{array}{l} f(156) = a \cdot 156 + b = 4874 \\ f(349) = a \cdot 349 + b = 8348 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 156a + b = 4874 \\ 349a + b = 8348 \end{array} \rightarrow \begin{cases} a = 18 \\ b = 2066 \end{cases}$$

A fórmula da función é: $f(x)=18x+2066$

A fórmula permítenos calcular con exactitude os diferentes valores da función. Así, o importe ó consumir 0 kw/hora, é 2066 pts, que corresponden ás taxas mínimas pola conexión e o servizo eléctrico.



Esta función non ten maximo absoluto



Características: Crecemento

Unha función é **crecente** se ó aumentar o valor da variable independente, x , tamén aumenta o valor da función ou, cando menos, non decrece: $f(x)$ crecente $\Leftrightarrow (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$

Diremos que é **estrictamente crecente** cando ó aumentar x tamén aumente o valor da función:

$$f(x) \text{ estrictamente crecente} \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

De xeito semellante, unha función é **decrecente** se, ó aumentar o valor da x , non aumenta o valor da función e **estrictamente decrecente** cando diminúe o valor da función:

$$f(x) \text{ decrecente} \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$$

$$f(x) \text{ estrictamente decrecente} \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$$

Exemplo: As funcións polinómicas de grao 1 son crecentes cando o coeficiente de grao 1 é positivo e son decrecentes cando é negativo.

Exemplo: As funcións polinómicas de grao 2 cambian de crecemento antes e despois do valor de x correspondente ó vértice.

Características: Extremos

Extremos relativos: Un valor da variable independente, x , é un **máximo relativo** se a función é maior que nos puntos que o rodean.

Se a función é menor que nos puntos que o rodean é un **mínimo relativo**.

Nos extremos relativos prodúcese un cambio no crecemento da función: Nos máximos pasa de crecente a decrecente e nos mínimos de decrecente a crecente.

Extremos absolutos: Son os valores da x nos que a función toma o valor máis alto (máximo) ou máis baixo (mínimo).

Exemplo: As funcións polinómicas de grao 2 teñen un extremo relativo. Un máximo cando o coeficiente do termo de grao 2 é negativo e un mínimo se ese coeficiente é positivo. Ademais, ese extremo relativo tamén é absoluto.

Exemplo: As funcións polinómicas de grao 3 poden ter dous extremos relativos, un máximo e un mínimo, pero non poden ter extremos absolutos.

Características: Curvatura

Unha función é **cóncava hacia arriba**, ou convexa, nun punto cando a gráfica está por encima da tanxente nese punto.

É **cóncava hacia abaixo**, ou simplemente cóncava, cando a gráfica está por debaixo da tanxente no punto.

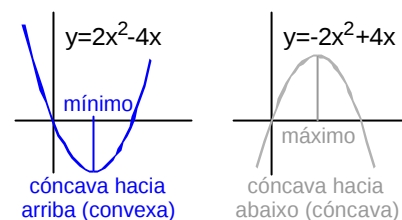
Nos puntos onde cambia a curvatura a tanxente corta a gráfica. Eses puntos reciben o nome de **puntos de inflexión**.

Fíxate que unha función é cóncava hacia arriba cando crece cada vez máis rápido ou cando decrece cada vez máis amodo e cóncava hacia abaixo cando crece cada vez máis amodo ou cando decrece cada vez máis rápido.

Nos máximos relativos a función é cóncava hacia abaixo e nos mínimos relativos é cóncava hacia arriba.



Exemplo: As funcións polinómicas de grao 1 teñen curvatura 0 pero as de grao 2 son cóncavas hacia arriba se o coeficiente do termo de grao 2 é positivo ou cóncavas hacia abaixo se é negativo.



Características: Asíntotas

Cando a gráfica dunha función se aproxima a unha recta, diremos que esa recta é unha asíntota da función e que a función ten unha rama asíntótica.

Existen varios tipos de asíntotas:

Asíntotas verticais: A ecuación dunha recta vertical é da forma $x=a$ (a un número). Para que a gráfica se aproxime a unha recta dese tipo, os valores da función cando o valor de x se aproxima ó a teñen que ser cada vez maiores (ou menores se son negativos).

Se a función é elemental (definida por unha fórmula simple) o valor a non pertence o dominio da función.

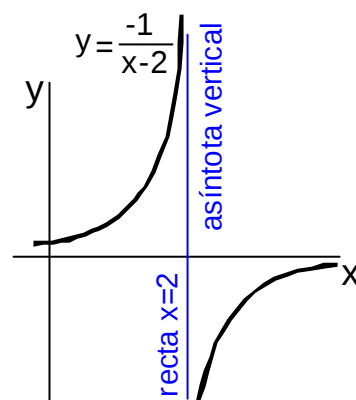
Exemplo: A recta $x=2$ é unha asíntota vertical da función $f(x) = \frac{-1}{x-2}$

Vexamos que sucede ó darlle a x valores que se aproximen a 2 pola esquerda (máis pequenos) e pola dereita (maiores).

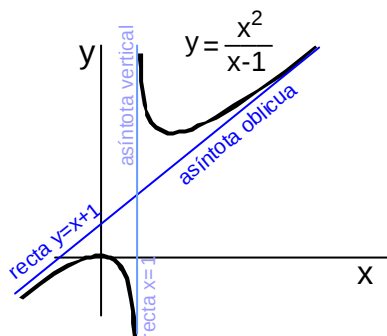
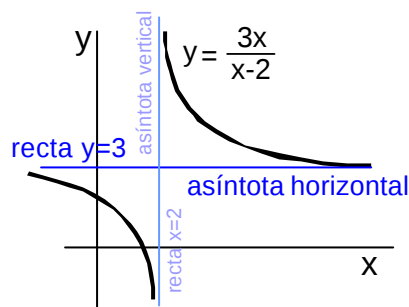
x	$x \rightarrow 2^-$			$2^+ \rightarrow x$		
	1'5	1'9	1'99	2'001	2'01	2'2
f(x)	2	10	100	-1000	-10	-5

Ó achegarse a 2 o valor de x , a función toma valores cada vez maiores, negativos pola dereita e positivos pola esquerda.

Fíxate que o 2 non é do dominio da función.



Asíntotas horizontais: A gráfica aproxímase a unha recta horizontal, $y=b$ (b un número). Para que eso suceda, os valores da función aproxímanse a b cando o valor de x se fai moi grande ou moi pequeno.



Exemplo: A recta $y=3$ é unha asíntota horizontal da función $f(x) = \frac{3x}{x-2}$

Ó darlle valores moi grandes positivos e negativos a x , os valores da función acércanse a 3:

	$x \rightarrow +\infty$				$x \rightarrow -\infty$		
x	5	20	100		-10	-50	-100
$f(x)$	5	3'33	3'06		2.5	2'88	2'94

A función tamén unha asíntota vertical na recta $x=2$

Asíntotas oblicuas: Rectas da forma $y=ax+b$. A gráfica aproxímase a unha recta oblicua.

As asíntotas xogan un papel determinante das funcións racionais (cocientes de polinomios) e tamén nas exponenciais e logarítmicas.

Características: Continuidade.

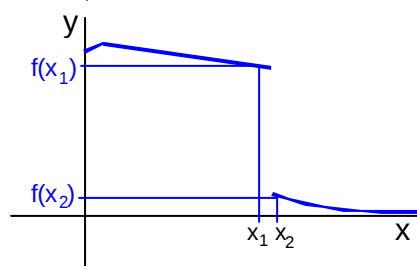
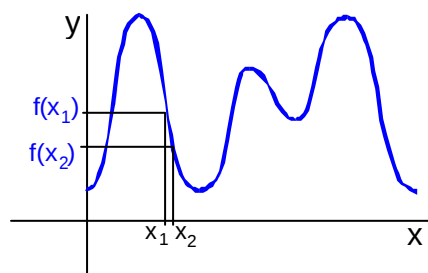
A maioría dos fenómenos físicos do noso entorno amosan unha gran regularidade no seu comportamento: O nivel do mar varía co tempo pero faino dun xeito regular e previsible.

Esa previsibilidade é a que nos permite achegarnos á beira sen perigo de que de súpeto aumente o nivel e, como pouco, nos deixe empapados.

En termos de funcións, podemos traducir a regularidade no comportamento en que a valores moi próximos de x correspóndenlle valores moi próximos da función.

Ese tipo de regularidade nunha función recibe o nome de continuidade.

Se unha función é continua e o seu dominio é un intervalo, entón a súa gráfica pode facerse dun só trazo.



Exemplo: A función que describe o nivel do mar no porto de Carril un certo día do ano ten por gráfica a da figura.

É unha función continua pois a valores próximos de x correspóndenlle valores próximos da función e se acercamos os valores de x tamén se acercan os valores da función.

Exemplo: O densidade da auga segundo a temperatura presenta unha descontinuidade a 100°C debida ó cambio de estado.

Os densidades correspondentes a temperaturas próximas (99.9°C e 100.1°C) son moi diferentes (0.9 e 0.007) e ó acercase as temperaturas, as densidades manteñen esa diferenza.

Límite dunha función nun punto

Para estudar a existencia dunha asíntota vertical en $x=a$ debemos darlle a x valores que se acerquen a a e comprobar que os valores da función son cada vez maiores.

Por outra parte, para comprobar se unha función é continua en $x=a$ debemos comprobar que, o darlle valores a x que se acerquen a ese valor, os valores da función acérzanse a $f(a)$.

Nas dúas situacións é necesario dar valores a x que se acerquen a un valor dado e observar que sucede cos valores da función. Ese proceso é o fundamento dunha nova operación: O cálculo de límites.

Chamarémoslle límite dunha función $f(x)$ cando x tende a un valor x_0 ó número, se existe, ó que se acerca o valor da función cando x se acerca a x_0 . Representarémolo cos símbolos: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

O límite dunha función nun punto é unha operación que consiste en estudar o comportamento dos valores da función cando lle damos a x valores que se aproximen ó punto.

Exemplo: Calcula o límite de $f(x) = 2x^2 - 4$ cando x tende a 3

x	3'1	2'9	3'001	2'99	3'00005	...
$f(x)$	15'22	12'82	14'012	13'88	14'0006	...

Vemos que os valores da función achéganse a 14. Diremos que o límite de $f(x)$ cando x tende a 3 é 14:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 4) = 14$$

É máis doado de interpretar estudando por separado os valores que se aproximan a 3 pola dereita (maiores que 3) e pola esquerda (menores que 3). Son os límites laterais:

$x \rightarrow 3^-$				
x	3'1	3'001	3'00005	...
$f(x)$	15'22	14'012	14'0006	...

O límite pola dereita de $f(x)$ cando x tende a 3 é 14:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (2x^2 - 4) = 14$$

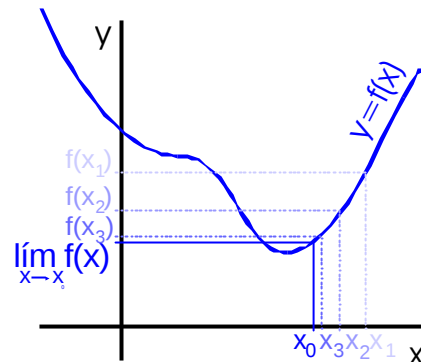
$x \rightarrow 3^+$				
x	2'9	2'99	2'9999	...
$f(x)$	12'82	13'88	13'9988	...

O límite pola esquerda de $f(x)$ cando x tende a 3 é 14:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (2x^2 - 4) = 14$$

Os límites laterais non sempre coinciden e, nese caso, diremos que non hai límite da función nese punto.

Por exemplo, o límites laterais da función que describe a densidade da auga cando a temperatura tende a 100°C son diferentes (a menos de 100° a auga está en estado líquido e a súa densidade é lixeiramente menor de 1 g/cm³ pero a máis de 100° a auga é gasosa e a súa densidade é menor de 0'0006 g/cm³).



O límite é unha das operacións máis potentes das matemáticas.

En moitas ocasións non é posible calcular algo directamente pero si é posible obter aproximacións cada vez mellores: O valor buscado é o límite desas aproximacións.

Calculo alxébrico de límites

A pesar de que, teoricamente, para calcular o límite dunha función nun punto deberíamos substituír na función infinitos valores que se aproximasen a ese punto, na práctica é suficiente cuns cantos valores para ter unha idea de cal é o valor aproximado dese límite. Aínda así resulta un procedemento bastante laborioso.

Para calcular exactamente o valor dun límite utilizaremos as propiedades alxébricas dos mesmos:

- O límite dunha suma é a suma dos límites.
- O límite dun produto é o produto dos límites.
- O límite dun cociente, cando o denominador non tende a 0, é o cociente dos límites. Cando o denominador tende a 0 debemos recorrer a técnicas especiais.
- O límite dunha potencia é o límite da base elevado ó mesmo expoñente.

Vemos que o límite de $f(x) = 2x^2 - 4$ cando x tende a 3 coincide con $f(3)$, o resultado de substituír o 3 na fórmula da función.

Eso mesmo acontece con tódalas funcións elementais:

O límite dunha función elemental nun punto do seu dominio coincide co valor da función nese punto.

Aplicando esas propiedades resulta doado calcular a maioría dos límites.

Exemplo: Calcula o límite de $f(x) = 2x^2 - 4$ cando x tende a 3

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 4) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2) - \lim_{x \rightarrow 3} (4) = \lim_{x \rightarrow 3} (2) \cdot \lim_{x \rightarrow 3} (x^2) - \lim_{x \rightarrow 3} (4) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2) \cdot \left[\lim_{x \rightarrow 3} (x) \right]^2 - \lim_{x \rightarrow 3} (4) = 2 \cdot 3^2 - 4 = 14$$

$$\text{Tendo o proceso controlado: } \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 4) = 2 \cdot 3^2 - 4 = 14$$

Exemplo: Calcula o límite de $f(x) = \frac{4x - 4}{x^2 - 1}$ cando x tende a 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 4}{x^2 - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (4x - 4)}{\left[\lim_{x \rightarrow 1} (x) \right]^2 - \lim_{x \rightarrow 1} (1)} = \frac{4 \cdot 1 - 4}{1^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

Obtemos unha operación que non se pode realizar (non é posible dividir por 0) e que pode tomar calquera valor. Para calcular o límite é necesario simplificar previamente a fórmula da función:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x - 1)}{(x - 1) \cdot (x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (4)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x) + \lim_{x \rightarrow 1} (1)} = \frac{4}{1 + 1} = 2$$

Tendo o proceso controlado:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x - 1)}{(x - 1) \cdot (x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{x + 1} = \frac{4}{1 + 1} = 2$$

Exemplo: Calcula o límite de $f(x) = \frac{4x - 4}{x^2 - 1}$ cando x tende a -1

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x - 4}{x^2 - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (4x - 4)}{\left[\lim_{x \rightarrow -1} (x) \right]^2 - \lim_{x \rightarrow -1} (1)} = \frac{4 \cdot (-1) - 4}{(-1)^2 - 1} = \frac{-8}{0}$$

$$\text{O límite de } f(x) = \frac{4x - 4}{x^2 - 1}$$

cando x tende a 1 é 2:

x	0'99	1'001	...
f(x)	2'01	1'999	...

$$\text{O límite de } f(x) = \frac{4x - 4}{x^2 - 1}$$

cando x tende a -1 non existe. O valor da función crece sen parar pola dereita:

x	-0'99	-0'999	...
f(x)	400	4000	...

Pola esquerda o comportamento é semellante, pero con valores negativos:

x	-1'01	-1'001	...
f(x)	-400	-4000	...

Obtemos unha expresión que non ten senso pero, a diferenza da anterior, non hai ningún valor que poda ser resultado desa expresión.

Neste caso NON EXISTE o límite de $f(x)$ cando x tende a -1 .

A función ten unha asíntota vertical en $x=-1$, o que se traduce en que, ó darlle valores que se aproximen a -1 , toma valores cada vez máis grandes sen acadar ningún límite. Cando suceda isto cunha función diremos que tende a infinito ($\pm\infty$): Non hai límite, os valores crecen sen limitación.

Límites indeterminados e infinitos

Ó calcular algúns límites, tal como sucede nos exemplos anteriores, atopámonos con expresións que non teñen sentido.

Distinguiremos dous casos:

Expresións infinitas: Como sucede no exemplo anterior, ó calcular algúns límites, os valores da función non se aproximan a ningún valor en concreto senón que obtemos valores cada vez maiores (ou menores se son negativos) sen acadar ningún tope. Nestes casos a función non ten límite nese punto pero, para caracterizar ese comportamento, diremos que tende a infinito.

Expresarémolo: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$

Son expresións de tipo infinito:

$$\frac{a}{0} \quad (a \neq 0) \quad (\pm\infty) + a \quad (\pm\infty) \cdot a \quad \infty + \infty \quad a^{(\pm\infty)} \quad (a > 1)$$

Expresións indeterminadas: Cando obtemos operacións que non se poden realizar porque teñen moitos resultados posibles. Son expresións indeterminadas:

$$\frac{0}{0} \quad \pm\infty \cdot 0 \quad \infty - \infty \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad 1^\infty$$

Estes límites poden tomar calquera valor. Para calculalos debemos empregar técnicas especiais segundo o caso de que se trate.

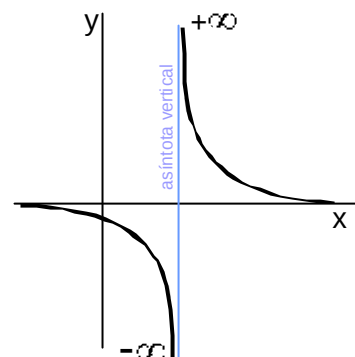
Exemplos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x-4}{x^2-1} = \frac{0}{0}, \text{ e vimos que era } 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-2x+1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = 2$$



Función

Relación entre conxuntos numéricos de xeito que a cada valor do conxunto inicial correspóndelle un e só un do conxunto final.

Dominio: Conxunto de valores que pode tomar a variable independente, x .

Imaxe ou percorrido: Conxunto de valores que pode tomar a función, $f(x)$.

Funcións reais de variable real: dominio e por percorrido están nos números reais.

Descrición dunha función

Táboas: Constan dalgúns dos valores que relaciona a función. Son doadas de manexar pero ás veces é difícil decatarse de cal é a relación entre as magnitudes.

Gráficas: Doada de manexar e de interpretar pero pouco exacta cando se precisa atopar valores concretos da función. Utilízase sempre o eixe X para os valores do conxunto inicial (variable independente) e o Y para os da final (variable dependente).

Os puntos da gráfica son da forma $(x, f(x))$ pois a súa segunda coordenada é o valor que a función lle asocia á primeira.

Fórmulas: É o xeito máis preciso de representar unha función. A partir da fórmula é doado construír táboas e gráficas.

As funcións que veñen descritas por unha soa fórmula reciben o nome de **funcións elementais**.

Características: Crecemento

Crecente: Ó aumentar o valor da x , aumenta ou mantense igual o valor da función.

Estrictamente crecente: Ó aumentar x tamén aumenta o valor da función.

Decrecente: Ó aumentar a x , decrece ou mantense igual o valor da función.

Estrictamente decrecente: cando diminúe o valor da función.

Características: Extremos

Máximo relativo: se a función é maior nel que nos puntos que o rodean.

Mínimo relativo: Se a función é menor nel que nos puntos que o rodean é un.

Nos extremos relativos prodúcese un cambio no crecemento da función: Nos máximos pasa de crecente a decrecente e nos mínimos de decrecente a crecente.

Máximo absoluto: Ó valor de x no que a función toma o valor máis grande.

Mínimo absoluto: Valor da x nos que a función toma o valor máis baixo.

Os extremos absolutos dunha función continua definida nun intervalo pechado son os extremos relativos ou os valores correspondentes os extremos do intervalo.

Características: Curvatura

Cóncava hacia arriba ou cóncava: Cando as tanxentes están por abaixo da gráfica.

Cóncava hacia abaixo ou convexa: Cando a tanxente queda por encima da gráfica.

Puntos de inflexión: Puntos onde cambia a curvatura. A tanxente corta a gráfica.

Fixate que unha función é cóncava hacia arriba cando crece cada vez máis rápido ou cando decrece cada vez máis lentamente.

Nos máximos relativos a función é cóncava hacia abaixo e nos mínimos relativos é cóncava hacia arriba.

Características: Asíntotas

Cando a gráfica dunha función se aproxima a unha recta, diremos que esa recta é unha asíntota da función e que a función ten unha rama asíntótica.

Asíntotas verticais: A recta é vertical. A ecuación da asíntota é do tipo $x=x_0$ (a un número). A recta $x=x_0$ é unha asíntota vertical se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$

Se a función é elemental, x_0 non pode pertencer ó dominio da función.

Asíntotas horizontais: Recta horizontal, $y=b$. A función aproxímanse a b cando x se fai moi grande ou moi pequeno: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$

Asíntotas oblicuas: Rectas da forma $y=ax+b$. Cando o valor de x se fai moi grande ou moi pequeno, a función aproxímanse ó valor da y .

Características: Continuidade.

Continuidade nun punto: Unha función é continua en x_0 cando a valores de x próximos a x_0 correspóndenlle valores da función próximos a $f(x_0)$.

Continuidade nun intervalo: Unha función é continua nun intervalo cando é continua en tódolos puntos do intervalo. Se unha función é continua nun intervalo, a súa gráfica pode facerse dun só trazo.

Límite dunha función nun punto

Límite de $f(x)$ cando x tende a x_0 : o número ó que se acerca o valor da función é cando x se acerca a x_0 , simbolízase $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Límite pola dereita: Número ó que se acerca o valor da función cando x se acerca a x_0 con valores maiores que x_0 .

Límite pola esquerda: Número ó que se acerca o valor da función cando x se acerca a x_0 con valores menores que x_0 .

Os límites laterais non sempre coinciden e, nese caso, diremos que non hai límite da función nese punto.

O límite dunha función elemental nun punto do seu dominio existe sempre e coincide co valor da función nese punto.

Calculo alxébrico de límites

Para calcular exactamente o valor dun límite utilizaremos as propiedades alxébricas dos mesmos:

- Límite dunha suma, suma dos límites.
- Límite dun produto, produto dos límites.
- Límite dun cociente (denominador non tende a 0), cociente dos límites.
- Límite dunha potencia, límite da base elevado ó expoñente.

Expresións infinitas: $\frac{a}{0}$ ($a \neq 0$) $(\pm\infty) + a$ $(\pm\infty) \cdot a$ $\infty + \infty$ $a^{(\pm\infty)}$ ($a > 1$)

Son expresións que corresponden a límites que non existen porque o valor da función aumenta sen parar. Para caracterizar ese comportamento, diremos que tende a infinito. Expresarémoslo:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$

Expresións indeterminadas: $\frac{0}{0}$ $\pm\infty \cdot 0$ $\infty - \infty$ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ 1^∞

Son operacións que non se poden realizar porque teñen moitos resultados posibles. Para calcular eses límites debemos empregar técnicas especiais segundo o caso de que se trate.

Continuo e discreto

O elemento clave do concepto de función de variable real é a **continuidade** dos números reais: A variable x toma valores nun conxunto continuo de xeito que, entre dous valores dados por moi preto que estean, sempre hai entre eles infinitos valores.

Esa idea de continuidade permítenos, por exemplo, calcular límites aproximando *infinitamente*.

Sen embargo, cos últimos avances da Física, cada vez está máis claro que o noso universo non é continuo no sentido anterior: Entre dous valores non hai infinitos ou, o que é o mesmo, non é posible dividir infinitamente unha magnitude.

A magnitude da que se ten medido fraccións máis pequenas é o tempo, pero os científicos coidan que non é posible medir tempos máis pequenos que o tempo de Plank ($1.67 \cdot 10^{-45}$ segundos). O universo é discreto, vai a saltos.

Sucesións

Para describir os fenómenos nos que a variable independente toma valores a saltos é preferible utilizar funcións con dominio nos números naturais que chamaremos **sucesións**.

Por razóns históricas, as sucesións teñen unha linguaxe e unha notación especiais:

	Funcións	Sucesións
Dominio	Números reais	números naturais
Imaxe	Números reais	números reais
Variable independente	x	n
Variable dependente	$f(x)$	X_n (chámase termo xeral)
Tipos de fórmulas	Explícitas: A variable dependente obtense mediante operacións coa variable independente ($f(x)=2x+3$)	Explícitas: A variable dependente obtense mediante operacións coa variable independente ($X_n=2n+3$)
		Recorrentes: Dase un valor inicial e o xeito de obter un termo a partir do anterior (a sucesión anterior é $X_0=3$, $X_n=X_{n-1}+2$)
Gráficas elementais	Liñas	Puntos

Modelos dinámicos

Moitos sistemas físicos poden describirse a partir do coñecemento dun *estado inicial* dese sistema e das *leis que describen como pasa dun estado a outro*.

Na maioría das ocasións utilizamos modelos continuos para os que dispoñemos de ferramentas potentísimas. Cando a evolución do modelo ocorre en saltos discretos obtemos unha sucesión.

Un sistema descrito mediante un modelo dinámico é un sistema completamente **determinista**: Coñecendo exactamente as condicións iniciais, podemos precisar exactamente cal vai se-lo seu estado en calquera intre do futuro.

Un exemplo paradigmático é o Sistema Solar: Coñecemos a posición e a velocidade dos astros nun intre dado e tamén as leis que gobernan o seu movemento, o que nos permite predicir con case total exactitude a súa posición en calquera intre do futuro.

Pero a realidade non é tan simple: Non podemos determinar con total exactitude as condicións iniciais e nalgúns casos, pequenas variacións nas condicións iniciais poden conducir a resultados finais totalmente dispares.

É o **caos determinístico**, un dos conceptos máis revolucionarios dos últimos anos.

Un exemplo axudará a aclaralo: Supoñamos que temos un billar sen rozamento, unha diferenza do orden de 10^{-20} no ángulo co que se golpea a bola fai que o cabo de uns minutos a traxectoria da bola sexa totalmente diferente.

Un modelo discreto: A evolución dunha poboación

Queremos construír un modelo matemático que nos permita describir como evoluciona unha certa poboación, para o que faremos unha serie de supostos teóricos e logo discutiremos sobre a súa posible aplicación a situacións reais.

O estudio de poboacións efectúase en intervalos fixos de tempo, anualmente por exemplo, polo que utilizaremos a linguaxe de sucesións.

A variable dependente (X_n , a poboación) poderemos expresala en función da variable independente (n , os anos) ou, por recorrencia, a partir do termo anterior (X_{n-1}).

Modelo 1: A poboación aumenta unha cantidade fixa cada unidade de tempo.

Exemplo: Poboación inicial: 500 individuos Aumento anual: 50 individuos

O termo xeral da sucesión será: $X_n = 500 + 50n$ en forma explícita ou tamén $X_n = X_{n-1} + 50$ en forma recorrente.

Cuestións: Calcula as poboacións nos próximos 10 anos. ¿É un modelo realista? ¿Como inflúen os erros nas condicións iniciais? De estar utilizando un modelo continuo ¿que tipo de función sería?

Modelo 2: O aumento da poboación é proporcional ó número de individuos do ano anterior.

Exemplo: Poboación inicial: 100 individuos Aumento anual: 10% da poboación.

$$\text{Termo xeral: } \begin{cases} X_n = X_{n-1} + \frac{10X_{n-1}}{100} \rightarrow X_n = 1.1X_{n-1} \\ X_n = 100 \cdot 1.1^n \end{cases}$$

Neste modelo a razón entre o crecemento e a poboación, é constante:

$$\alpha = \frac{X_n - X_{n-1}}{X_{n-1}} = \frac{\frac{10X_{n-1}}{100}}{X_{n-1}} = 0.1$$

Cuestións: Calcula as poboacións nos próximos 10 anos. ¿É un modelo realista? ¿Como inflúen os erros nas condicións iniciais? De estar utilizando un modelo continuo ¿que tipo de función sería?

Modelo 3: Introducimos un factor que fai que a taxa de crecemento diminúa cando o número de individuos sexa excesivo. Supoñamos que hai unha poboación máxima N e facémo-la razón entre o crecemento e a poboación, proporcional á diferenza entre a poboación actual e a poboación máxima. Así o crecemento será menor ó achegarse a poboación a N e incluso negativo cando a poboación sexa maior:

$$\alpha = \frac{X_n - X_{n-1}}{X_{n-1}} = k(N - X_{n-1})$$

Termo xeral: $\frac{X_n - X_{n-1}}{X_{n-1}} = k \cdot (N - X_{n-1}) \rightarrow X_n - X_{n-1} = k \cdot N \cdot X_{n-1} - k(X_{n-1})^2 \rightarrow X_n = (kN + 1) \cdot X_{n-1} - kX_{n-1}^2$

(Este tipo de modelos é o utilizado polo Club de Roma cando se definiu o crecemento 0 como a opción máis desexable para o desenvolvemento da economía e da poboación mundiais. Chámase **función loxística**).

Cuestións: Estudia as poboacións nos próximos 10 anos para as condicións iniciais que aparecen na táboa.

N	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000
K	0'0001	0'0005	0'0009	0'001	0'0012	0'00125	0'0013	0'00137	0'0014	0'0015
X ₀	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

¿É un modelo realista? ¿Como inflúen os erros nas condicións iniciais?

Exercicios e actividades

- 1 Na táboa aparece o consumo e o importe de distintos recibos de Fenosa:

Consumo en Kw/h	200	250	270	360
Importe en pts.	6500	7500	7900	9700

- Representa graficamente eses valores.
- Atopa a fórmula da función que describe o importe segundo o consumo.
- ¿Canto se terá que pagar se o seu consumo é de 400 Kw/h?
- Fisicamente ¿qué representan os coeficientes da fórmula da función?

- 2 Os importes de diferentes recibos telefónicos segundo os pasos consumidos foron:

Pasos	150	200	250	275	300	350
Importe en pts.	3780	4040	4250	4375	4560	4750

- Representa eses valores con toda a exactitude que podas.
- Debido a unha variación nas tarifas, tres dos recibos o corresponden a unha tarifa e tres a outra. ¿Que recibos corresponden a cada unha?
- ¿Cal é o custo do paso antes e despois da suba?

- 3 Nunha proba dun foguete mediuse a altura que acadaba en diferentes intres, obténdose os seguintes datos:

Tempo (min)	1	2	2'5	3	4'1	5'5
Altura (km)	3	5	5'625	6	5'945	4'125

- Representa eses valores con toda a exactitude que podas.
- Atopa a fórmula función que describe a altura do foguete segundo o tempo.
- Calcula a altura máxima a que voou o foguete e en que intre se acadou.
- ¿Canto durou o voo do foguete?

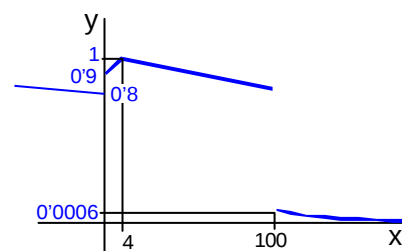
- 4 Un alumno de 1º de bacharelato viaxou a Londres para practicar o seu Inglés. Todo ía ben ata un día no que se atopou mal e mirou se tiña febre, o termómetro marcaba 98'6. Case morre do susto, pero o seu anfitrión díxolle que esa era a temperatura normal. Outro día comentáronlle que un Inglaterra a auga ferve a 212 graos conxélase a 32 graos, e eso xa foi o colmo.

Por fin decatouse de que os ingleses miden a temperatura en graos Fahrenheit e non en graos centígrados.

- Representa os valores anteriores en papel milimetrado.
- Atopa unha fórmula para pasar de graos centígrados a graos Fahrenheit.
- Atopa unha fórmula para pasar de graos Fahrenheit a graos centígrados.
- ¿Que é Fahrenheit 451?

- 5 A densidade da auga varia coa temperatura segundo a función que ten por gráfica a da figura:

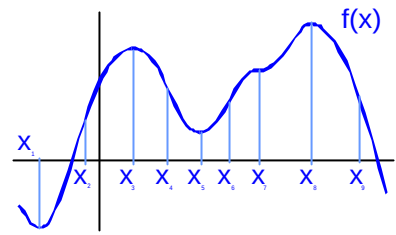
- ¿En que puntos é descontinua e a que cres que é debido esa descontinuidade?
- ¿Segundo a gráfica, xeo a -20°C flota en auga a 50°C ?
- Inventa unha fórmula que corresponda aproximadamente a esa gráfica?



- 6 Na función que ten por gráfica a da figura seguinte, indica:

- Os extremos relativos.

- b) Intervalos de crecemento e decrecemento.
- c) Puntos de inflexión.
- d) Intervalos nos que é cóncava ou convexa.



- 7** A teoría da relatividade di que a masa dun obxecto depende da súa velocidade segundo a fórmula:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

- a) Estudia cal é o dominio desa función.
- b) ¿Qué sucede coa masa dun obxecto en movemento cando a súa velocidade achégase á velocidade da luz? ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)
- c) Segundo esta teoría, ¿pode un obxecto con masa acadar a velocidade da luz? Xustifica a resposta.

- 8** Calcula os seguintes límites de funcións:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2}{x^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2 - 4}$

- d) ¿Que relación teñen os valores deses límites cos valores das funcións.

- 9** Estudia a continuidade da función seguinte e debuxa a súa gráfica:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 4 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

- 10** Estudia a continuidade das funcións seguintes:

a) $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$ c) $h(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

- 11** ¿Cal é o dominio e a imaxe das funcións seguintes?

a) $f(x) = 2x - 3$ b) $g(x) = x^2 + 1$ c) $h(x) = \sqrt{x}$

- 12** Explica cal é o dominio das seguintes funcións reais de variable real:

a) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+4x}$ b) $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ c) $h(x) = \sqrt{4-x}$
d) $j(x) = \frac{x^2+5x}{x^3+6x^2+9x}$ e) $i(x) = \tan(2x)$ f) $m(x) = \frac{\sqrt{3x-6}}{x^2-2x+1}$

- 13** Calcula os seguintes límites de funcións:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-6x^4}{2-3x^4}$ b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+3x}{9-x^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-2}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x^3-x^2}$

- 14** Calcula os seguintes límites de funcións:

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4}{x+3}$ b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{x^2+2x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-x^2-4x+4}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 1}{x^2 + x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right]$

15 Atopa a ecuación das asíntotas da función $f(x) = \frac{1}{x}$

16 Calcula os seguintes límites:

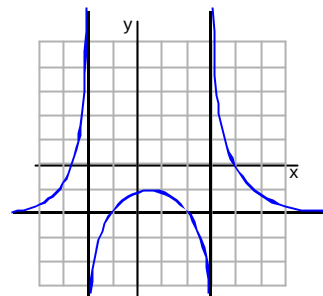
a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 3x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x + 4}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x}{x^3 + 2x^2}$

17 Di cales son as ecuacións das asíntotas verticais e da asíntota horizontal da función que ten por gráfica a que aparece na figura.



18 Fai a gráfica da función $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ estudiando dominio e asíntotas (se as ten).

19 Fai a gráfica da función $f(x) = \frac{3x}{x + 2}$ estudiando dominio e asíntotas (se as ten).

20 Estudia se a función seguinte é continua en $x=3$ e debuxa a súa gráfica:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 4 & \text{se } x < 3 \\ 1 - x^2 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Problema: No interese simple só produce intereses o capital inicial, mentres que no interese composto producen intereses o capital inicial e os intereses acumulados.

Nas táboas aparece como evolúcióna o capital total (capital máis intereses) ó inverter 100.000 pts a un interese simple do 20% anual e ó 10% de interese composto anual:

Anos	0	1	2	3	4
Interese simple	100000	120000	140000	160000	180000
Interese composto	100000	110000	121000	133100	146410

- Atopa as fórmulas das funcións que describen os capitais totais en cada un dos casos.
- ¿Canto tardará en duplicarse o capital en cada caso?
- ¿Canto tempo deberá transcorrer ata que os capitais totais sexan iguais?

Problema: Unha noria dun parque de atraccións describe 3 revolucións completas cada minuto. A noria ten un radio de 30 m e o seu eixe está a 35 metros de altura sobre o chan. As barquiñas nas que van os pasaxeiros colgan 2 m dun eixe situado no borde da roda da noria (supoñemos que no intre inicial a barquiña estaba no punto máis baixo).

- Fai un debuxo que represente a altura dunha barquiña segundo o tempo.
- Atopa a fórmula da función que describe a altura da barquiña segundo o tempo.
- ¿En que intre acadará a máxima altura e é esa altura?