

Unidade 6: Cálculo diferencial

1. Variación dunha función
2. Variación media: Taxa de variación.
 - 2.1. Concepto e interpretación física
3. Variación instantánea: Derivada nun punto.
 - 3.1. Concepto e interpretación física
 - 3.2. Interpretación gráfica.
4. Función derivada
 - 4.1. Concepto e cálculo.
 - 4.2. Aplicacións: Estudio do crecemento

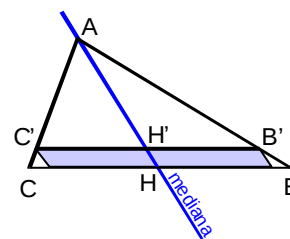
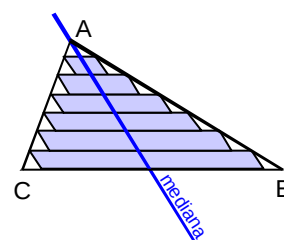
Introducción

O centro de gravidade dun triángulo (baricentro)

Era un feito coñecido desde antigo é que o centro de gravidade dun triángulo atópase no punto de corte das medianas pero ¿cómo demostralo? Simón Stevin, un matemático dos Países Baixos do século XVI, fixo o seguinte razoamento:

- Recubrimos o triángulo con paralelogramos con dous lados paralelos a base do triángulo e os outros dous paralelos á mediana.
- A mediana divide en dúas partes iguais a cada un dos paralelogramos. Demostrámolo para o $CC'B'B$ (basta demostrar que a mediana divide o lado $C'B'$ en dúas metades): Por semellanza de triángulos

$$\left. \begin{array}{l} AHB \approx AH'B' \Rightarrow \frac{\overline{AH}}{\overline{AH'}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{B'H'}} \\ AHC \approx AH'C' \Rightarrow \frac{\overline{AH}}{\overline{AH'}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{C'H'}} \end{array} \right\} \frac{\overline{BH}}{\overline{B'H'}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{C'H'}} \xrightarrow{\overline{CH}=\overline{BH}} \overline{C'H'} = \overline{B'H'}$$



- A figura formada polos paralelogramos é simétrica en relación á mediana do triángulo e, tal como establecera Arquímedes, o centro de gravidade dunha figura simétrica en relación a un eixe atópase sobre ese eixe. Polo tanto, o centro de gravidade dos paralelogramos está na mediana.
- Aumentando o número de paralelogramos ata o infinito, a altura de cada paralelogramo será case 0, será infinitesimal, e os paralelogramos cubrirán todo o triángulo. A mediana seguirá sendo un eixe de simetría deses paralelogramos e, polo tanto, do triángulo.
- Repetindo o razoamento para as outras medianas obtemos que o baricentro, punto de corte das medianas, é o centro de gravidade.

O Cálculo infinitesimal

O método anterior, baseado na utilización de obxectos *infinitamente pequenos*, é a esencia do **Cálculo Infinitesimal**. Xa os matemáticos gregos, en especial Eudoxo (408-355 a.p.), utilizaron métodos infinitesimais pero foron Newton e Leibnitz, un século despois de Stevin, os que dotaron ó Cálculo Infinitesimal da base lóxica necesaria para convertelo na máis potente ferramenta da Matemática.

Podemos dividir o Cálculo Infinitesimal en dúas polas: o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral que trataremos na unidade 8.

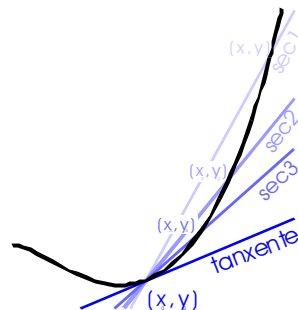
Cálculo diferencial

Xurde da resolución de dous problemas clásicos, o trazado de tanxentes a curvas e o estudo da variación dunha función. O método fundamental do Cálculo Diferencial é partir dunha aproximación e ir mellorandoa ata chegar a escala infinitesimal.

Exemplo: Queremos trazar unha tanxente a unha curva no punto (x_0, y_0) pero para determinar unha recta necesitamos dous puntos e só temos un.

Podemos elixir outro punto (x_1, y_1) e trazar a secante que pase por (x_0, y_0) e por ese outro punto. Non é a tanxente buscada pero, se o segundo punto está próximo a (x_0, y_0) , a secante aproxima á tanxente.

Se aproximamos infinitamente o segundo punto a (x_0, y_0) , a secante converterase na tanxente buscada (intuitivamente, podemos considerar á tanxente como unha secante entre dous puntos infinitamente próximos).



Cálculo Integral

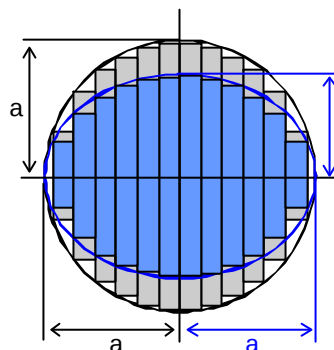
É o enfoque inverso do Cálculo Diferencial, parte do infinitamente pequeno para acadar o macroscópico. Por exemplo, para calcular unha área, divídese en infinitos anaquiños infinitesimais para logo sumalos e obter a área buscada.

Exemplo: Kepler ideou o seguinte método, baseado nos procedementos de Stevin, para calcular da área da elipse de semieixes a e b .

Non dispoñemos dunha fórmula, pero podemos encher a elipse con rectángulos e obter unha aproximación desa área.

Aumentando o número de rectángulos ata o infinito, a base de cada rectángulo queda reducida case a un punto e o rectángulo a unha liña. A área total dos rectángulos infinitesimais coincide coa da elipse.

Facemos o mesmo coa circunferencia radio a , os rectángulos infinitesimais da elipse e da circunferencia terán a mesma base pero a altura dos da elipse obtense multiplicando por b/a , a razón entre os semieixes, a altura dos correspondentes da circunferencia. (é como se obtivésemos a elipse aplastando en vertical a circunferencia, pasando o semieixe de medir a a b).



A área do círculo é a suma da área dos rectángulos infinitesimais correspondentes á circunferencia:

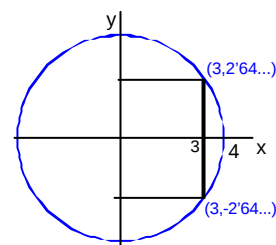
$$\text{Área círculo} = r_1 + r_2 + r_3 + \dots = \pi \cdot a^2$$

Multiplicando por $\frac{b}{a}$ a área de cada un deses rectángulos obteremos a área do correspondente rectángulo da elipse e, polo tanto, a área da elipse será a suma:

$$A = \frac{b}{a}r_1 + \frac{b}{a}r_2 + \frac{b}{a}r_3 + \dots = \frac{b}{a}(r_1 + r_2 + r_3 + \dots) = \frac{b}{a}(\pi \cdot a^2) = \pi \cdot a \cdot b$$

Actividade: Fíxate que ó ser cada rectángulo infinitesimal coma unha liña, podemos calcular a súa altura a partir das coordenadas dos puntos da curva que limitan a liña.

Comproba que a altura dos rectángulos infinitesimais da elipse de centro na orixe e semieixes 4 e 3 é $\frac{3}{4}$ da altura do rectángulo correspondente da circunferencia de centro na orixe e radio 4.



$$x^2 + y^2 = 16 \rightarrow y = \pm\sqrt{16 - x^2}$$

$$x = 3 \rightarrow y = \pm\sqrt{16 - 3^2} = \pm 2.56457\dots$$

Cálculo Diferencial

Variación dunha función

Cando se estudia un fenómeno físico buscamos describir o que xa aconteceu coa intención de predicir, alomenos con aproximacións, o que vai acontecer. Queremos ser capaces de predicir cal vai ser o comportamento futuro dese fenómeno.

Para poder facer prediccións é imprescindible saber se o proceso é *continuo*, se pequenas variacións nas condicións producen variacións pequenas no estado do proceso, e tamén necesitamos medir como vai variando o proceso.

Exemplo: A seguinte táboa describe o nivel dun río en diferentes intres durante unha enchente. Sabemos que o río desbordase ó chegar ós 6 metros ¿É previsible que se desborde nas próximas 2 horas?

t Tempo (en horas)	0	2	3	3'5	4
N(t) Nivel (en metros)	2	4	4'7	4'9	5'1

Solución: Sabemos que o valor en 4 é 5'1 e que na media hora anterior, entre 3'5 e 4, o valor aumentou 0'2 m, de 4'9 a 5'1, o que supón un ritmo de

aumento de: $\frac{0'2}{0'5} = 0'4 \text{ m/hora}$

En 2 horas *podemos esperar* un aumento de 0'8 m e que acade un nivel de $5'1 + 0'8 = 5'9$ m. co cal, vemos que se sitúa moi preto de 6 m, o que nos indica que debemos toma-las medidas de precaución convenientes.

Fíxate que para calcular o ritmo de variación por unidade de tempo fixemos as seguintes operacións:

$$\frac{N(4) - N(3'5)}{4 - 3'5} = \frac{5'1 - 4'9}{4 - 3'5} = \frac{0'2}{0'5} = 0'4 \text{ m/hora}$$

Por outra banda, en moitas ocasións, a variación da función é unha magnitude que ten sentido por si mesma e que debemos estudar para entender o fenómeno que describe a función.

Exemplo: O espacio percorrido por un móbil ven dado pola función:

$$s(t) = 5t^2 \quad t \text{ en segundos e } s(t) \text{ en metros}$$

¿Que tipo de movemento leva o móbil? ¿Qué velocidade leva ós 5 segundos?

Solución: Para descubrir de que tipo de movemento se trata, debemos estudar se a velocidade do móbil é constante (movemento uniforme) ou non (movemento variado).

Utilízanse dous tipos de velocidades:

Velocidade media: É o espacio percorrido dividido polo tempo.

A velocidade media do móbil do problema entre, por exemplo, $t=1$ e $t=4$ é o espacio percorrido nese tempo, $s(4)-s(1)$ dividido polo tempo transcorrido, $4-1$:

$$VM_{[1,4]} = \frac{5 \cdot 4^2 - 5 \cdot 1^2}{4 - 1} = 25 \text{ m/s}$$

Analogamente, a velocidade media entre $t=4$ e $t=4.5$ será:

$$VM_{[4,4.5]} = \frac{5 \cdot 4.5^2 - 5 \cdot 4^2}{4.5 - 4} = 42.5 \text{ m/s}$$

Xa sabemos que o movemento é variado. Para determinar á súa vez se esa variación de velocidade se produce con ritmo constante (uniformemente variado), necesitamos a velocidade instantánea.

Velocidade instantánea: Velocidade que leva un móbil nun intre dado.

A velocidade instantánea non pode calcularse directamente, pero pode aproximarse mediante velocidades medias en intervalos cada vez máis pequenos. En $t=1$:

$$VM_{[1,2]} = \frac{5 \cdot 2^2 - 5 \cdot 1^2}{2 - 1} = 15 \text{ m/s}$$

$$VM_{[1,1.5]} = \frac{5 \cdot 1.5^2 - 5 \cdot 1^2}{1.5 - 1} = 12.5 \text{ m/s}$$

$$VM_{[1,1.1]} = \frac{5 \cdot 1.1^2 - 5 \cdot 1^2}{1.1 - 1} = 10.5 \text{ m/s}$$

$$VM_{[1,1.01]} = \frac{5 \cdot 1.01^2 - 5 \cdot 1^2}{1.01 - 1} = 10.05 \text{ m/s}$$

A velocidade instantánea será o límite desas velocidades medias:

$$v(1) = \lim_{x \rightarrow 1} VM_{[1,x]} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 \cdot x^2 - 5 \cdot 1^2}{x - 1} = 10 \text{ m/s}$$

De xeito semellante podemos calcular as velocidades instantáneas en $t=2$ (20 m/s), $t=3$ (30 m/s) ...

A velocidade instantánea varia uniformemente, cada segundo aumenta 10 m/s, é un movemento uniformemente variado, o que nos permite predicir que ós 5 segundos terá unha velocidade de 50 m/s.

Taxa de variación media

É unha medida da variación media dunha función nun intervalo. Indica canto varía a función, de media, por cada unidade que varie a variable independente.

Calcúlase dividindo a variación da función no intervalo pola variación da x (tamén se lle chama cociente incremental):

A taxa de variación da función $f(x)$ no intervalo $[x_1, x_2]$ é:

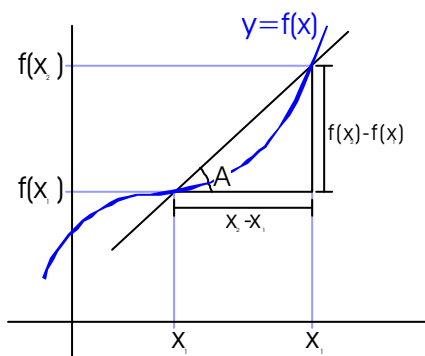
$$TVM_{[x_1, x_2]} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

As unidades en que se expresa a taxa de variación son as unidades de $f(x)$ divididas polas unidades de x .

Exemplo: A lonxitude dunha barra metálica segundo a temperatura vendada pola función $l(t) = 0.1 \cdot t + 120$, onde t é a temperatura en $^{\circ}\text{C}$ e $l(t)$ a medida da barra en cm.

¿Calcular a variación media da lonxitude da barra entre $t=10^{\circ}\text{C}$ e $t=40^{\circ}\text{C}$? ¿Que representa fisicamente esa variación?

Solución: Calculamos a taxa de variación media de $l(t)$ no intervalo $[10, 40]$:



A taxa de variación é a tanxente do ángulo A e, polo tanto, a pendente da recta secante á gráfica nos puntos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

$$\text{TVM}_{[10,40]} = \frac{l(40) - l(10)}{40 - 10} = \frac{124 - 121}{40 - 10} = 0.1 \text{ cm}/^\circ\text{C}$$

Esa taxa de variación describe o ritmo de variación medio da lonxitude da barra entre 10°C e 40°C é dicir, a dilatación media da barra por cada °C que varíe a temperatura (cada °C que aumenta a temperatura, a barra estírase 0.1 cm, por termo medio).

Taxa de variación instantánea ou derivada

O mesmo que sucede coa velocidade instantánea dun móbil, que non se pode calcular directamente cos datos obtidos a partir da ecuación do movemento, tampouco podemos calcular directamente a taxa de variación instantánea dunha función $f(x)$ nun punto x_0 .

O que si podemos é aproximar esa variación mediante a variación media nun intervalo con ese punto nun extremo:

$$\text{TVI}_{(x_0)} \approx \text{TVM}_{[x_0, x]} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Facendo que x se aproxime a x_0 , a taxa de variación media irase aproximando a taxa de variación instantánea.

Definimos a taxa de variación instantánea como o límite das taxas de variación medias cando x tende a x_0 :

$$\text{TVI}_{(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} (\text{TVM}_{[x_0, x]}) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Á taxa de variación instantánea tamén se lle chama derivada da función no punto; escríbese $f'(x_0)$ (derivada de f en x_0).

Exemplo: Calcula a velocidade instantánea dun corpo en caída libre 2 segundos despois de empezar a caer.

A ecuación do movemento dun obxecto en caída libre, desprezando o rozamento, é: $s(t) = 4.9 \cdot t^2$ t en segundos, $s(t)$ en metros.

Solución: A velocidade instantánea é a taxa de variación instantánea da función que representa o espazo segundo o tempo:

$$\text{TVI}_{(2)} = s'(2) = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{s(t) - s(2)}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{4.9t^2 - 4.9 \cdot 2^2}{t - 2} = \frac{0}{0}$$

Ese límite é indeterminado da forma 0/0, para calculalo é necesario simplificar a fracción:

$$s'(2) = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{4.9 \cdot (t^2 - 4)}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{4.9 \cdot (t - 2) \cdot (t + 2)}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} [4.9 \cdot (t + 2)] = 19.6 \text{ m/s}$$

Facendo o cambio $h = x - x_0$ obtemos unha nova expresión para a derivada que en ocasións é máis doada de manexar:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

No exemplo anterior: Utilizando a segunda expresión da derivada o proceso é similar (en lugar de facer unha descomposición dun polinomio debemos elevar ó cadrado un binomio):

$$\begin{aligned} s'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(2+h) - s(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4'9 \cdot (2+h)^2 - 4'9 \cdot 2^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4'9 \cdot (4 + 4h + h^2) - 4'9 \cdot 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4'9 \cdot 4h + 4'9 \cdot h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4'9 \cdot h \cdot (4 + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [4'9 \cdot (4 + h)] = 4'9 \cdot 4 = 196 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Pero os límites non teñen por que existir sempre, por iso diremos que unha función é derivable nun punto cando ten derivada nese punto. Se ten derivada en tódolos puntos dun intervalo diremos que é derivable nese intervalo.

Función derivada

En ocasións é necesario calcular a derivada dunha función en varios puntos, o que pode resultar moi laborioso pois supón calcular outros tantos límites.

Exemplo: A ecuación do movemento dun móbil é: $s(t)=2t^2$. Queremos estudar se o movemento dese obxecto é uniformemente variado.

Solución: Temos que calcular a velocidade instantánea do móbil (a derivada) en varios intres e comprobar se vai variando de xeito uniforme:

$$\begin{aligned} s'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(0+h)^2 - 2 \cdot 0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2h = 0 \\ s'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1+h)^2 - 2 \cdot 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 1^2 + 4h + 2h^2 - 2 \cdot 1^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h + 2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (4 + 2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + 2h) = 4 \\ s'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 - 2 \cdot 2^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (8 + 2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (8 + 2h) = 8 \end{aligned}$$

A velocidade varia de xeito uniforme polo que o movemento é uniformemente variado.

Fixándonos neses valores resulta doado decatarse de que se obteñen multiplicando o punto por 4. Hai unha fórmula que nos permite calcular a derivada de $s(t)$ nun punto t calquera: $s'(t)=4t$

Un xeito de simplificar ese traballo é atopar a fórmula que a cada punto lle asigna a derivada da función nese punto.

Esa fórmula corresponde a unha función que recibe o nome de función derivada de $f(x)$: $f'(x)$

Exemplo: No exemplo anterior, podemos calcular directamente a fórmula da función derivada:

$$s'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(t+h)^2 - 2t^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2t^2 + 4th + 2h^2 - 2t^2}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4th + 2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (4t + 2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4t + 2h) = 4t$$

Moitas funcións poden considerarse como combinacións doutras máis sinxelas ($f(x)=3x^5-x^2+5$ sería suma de $3x^5$, $-x^2$ e 5 e a súa vez $3x^5$ sería o produto de 3 e x^5).

O que pretendemos é chegar a coñecer a función derivada dunha función calquera a partir das derivadas das funcións simples que a conforman.

DERIVADAS ELEMENTAIS		
función	derivada	regra
a (constante)	0	A derivada dunha constante é 0
x	1	A derivada da función identidade é a función constante 1
x^r	$r \cdot x^{r-1}$	Para derivar x elevado a r multiplícase por r a redúcese o expoñente nunha unidade.

REGRAS DE DERIVACIÓN		
función	derivada	regra
a·u	a·u'	A derivada dunha constante por unha función é a constante pola derivada da función
u+v	u'+v'	A derivada dunha suma é a suma das derivadas
u·v	u'·v+u·v'	A derivada dun produto: Derivada do primeiro factor polo segundo sen derivar máis o primeiro sen derivar pola derivada do segundo
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	A derivada dun cociente: Derivada do numerador polo denominador sen derivar menos o numerador sen derivar pola derivada do denominador dividido todo polo denominador ó cadrado

Exemplo: Demostra que a función derivada de $f(x)=x^3$ é $f'(x)=3x^2$

Solución: Temos unha definición para a derivada nun punto. Aplicando esa definición a un punto xenérico obteremos unha fórmula para a derivada en calquera punto, a fórmula da función derivada.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (3a^2 + 3ah + h^2)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (3a^2 + 3ah + h^2) = 3a^2 \rightarrow f'(x) = 3x^2$$

Exercicio: Demostra que a derivada dunha función constante é 0.

Exercicio: Demostra que a derivada da función identidade ($f(x)=x$) é 1.

Derivada segunda

Ó derivar unha función $f(x)$ obtemos unha nova función, a función derivada $f'(x)$. Esta nova función pode a súa vez derivarse e a función obtida recibe o nome de derivada segunda de $f(x)$: $(f'(x))'=f''(x)$.

Exemplo: O espazo percorrido por un móbil ven dado pola función $s(t)=9-t^2$, t o tempo en segundos e $s(t)$ o espazo en m. ¿É un movemento uniformemente variado?

Solución: Un movemento é uniformemente variado cando a súa aceleración é constante. Empecemos por calcular a velocidade, que sabemos é a derivada do espazo (variación do espazo en relación ó tempo): $v(t)=s'(t)=-2t$.

A aceleración é a variación da velocidade en relación ó tempo, será pois a derivada da velocidade e tamén a derivada segunda do espazo:

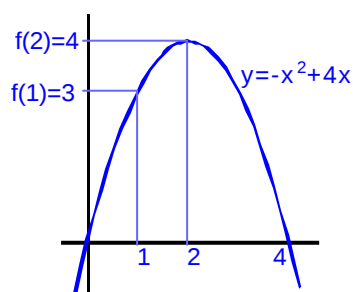
$$a(t)=v'(t)=s''(t)=-2.$$

A aceleración é constante, o movemento é uniformemente variado.

Interpretación gráfica da derivada

A derivada dunha función nun punto (taxa de variación instantánea) é unha medida de como varía a función nese punto.

É de esperar, polo tanto, que a derivada nun punto reflicte algunha característica da gráfica da función nese punto.



Exemplo: Dada a función $f(x) = -x^2 + 4x$

Debuxa a súa gráfica, calcula as derivadas en $x=1$, $x=2$ e $x=4$ e relaciona os valores obtidos coa gráfica da función neses puntos.

Solución: Por ser de grao 2, a gráfica é unha parábola. Representámola despois de calcular o vértice e dar algúns valores.

Calculamos a función derivada: $f'(x) = -2x + 4$

$$f'(1) = -2 \cdot 1 + 4 = 2$$

$$f'(2) = -2 \cdot 2 + 4 = 0$$

$$f'(4) = -2 \cdot 4 + 4 = -4$$

Relacionándoos coa gráfica vemos:

- En $x=1$ a función é crecente e a derivada é positiva. É coherente, pois a derivada indica a variación.
- En $x=4$ a función decrece e ten máis inclinación que en $x=1$. A derivada é negativa e en valor absoluto é maior que en $x=1$, o que tamén resulta coherente.
- En $x=2$ a función ten un máximo e pasa de crecer a decrecer. A derivada é 0. Entre + e - só témo -lo 0.

Comprobamos que a derivada nun punto mide a inclinación da gráfica da función nese punto.

Para comprobar se efectivamente a derivada nun punto mide a inclinación da gráfica da función nese punto, estudiamos se existe algunha relación entre a derivada e a

recta tanxente a gráfica nese punto (a inclinación da tanxente é a inclinación da gráfica).

A recta tanxente a gráfica dunha función $f(x)$ no punto $(x_0, f(x_0))$ non pode calcularse directamente pois para determinar unha recta necesitamos dous puntos, pero só temos un.

Eliximos un valor x_1 próximo a x_0 e aproximamos a tanxente en pola secante que pasa polos puntos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ e que ten de ecuación:

$$sec_1 \equiv y - f(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

Fixémonos na pendente desa recta:

$$m_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

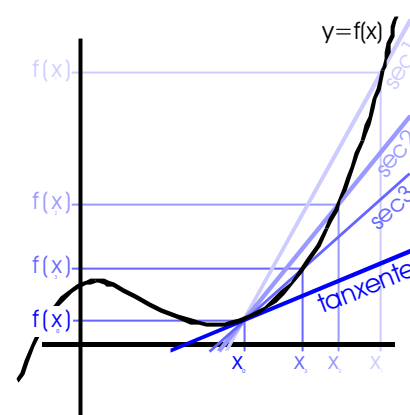
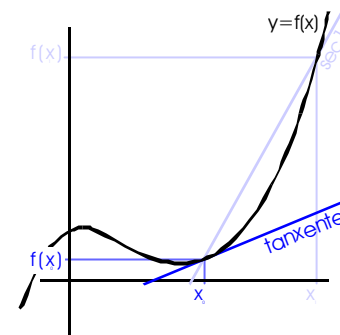
Para melloralala só temos que elixir puntos cada vez máis próximos ó punto de tanxencia.

A pendente da tanxente será o límite das pendentes das secantes cando facemos que x se aproxime *infinitamente* a x_0 :

$$m_{\tan x} = \lim_{x \rightarrow x_0} (m_{\sec}) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

A pendente da recta tanxente á gráfica dunha función é igual á derivada da función nese punto.

A ecuación da **recta tanxente** a unha función $f(x)$ no punto $(x_0, f(x_0))$ vén dada por: $y - f(x_0) = f'(x_0) (x - x_0)$



Derivadas e crecemento

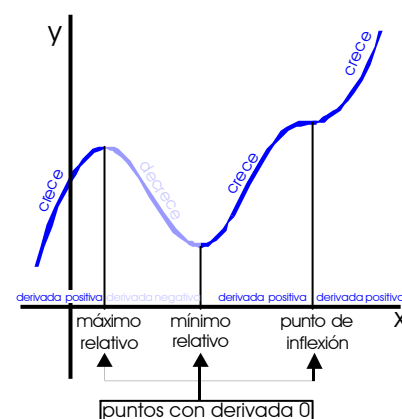
Se a derivada dunha función nun punto é positiva indica que os valores da función van en aumento, logo a función é crecente nese punto.

Pola contra, se a derivada é negativa a función é decrecente.

Se a derivada é 0 significa que a inclinación da gráfica é 0 (gráfica horizontal) o que significa que o punto:

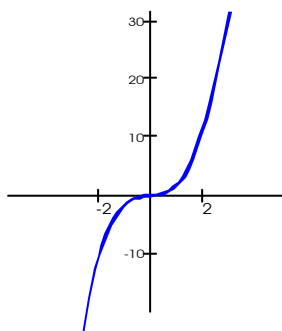
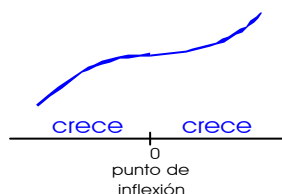
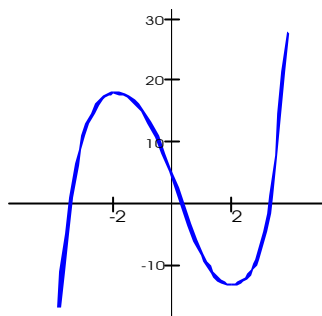
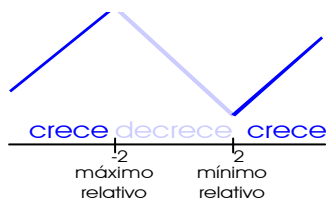
- É un máximo relativo da función.
- É un mínimo relativo.
- É unha caste especial de puntos de inflexión nos que a gráfica é “horizontal”.

Estudiando o signo da derivada sabemos cando crece e decrece a función e podemos facernos unha primeira idea da forma da súa gráfica.



Exemplo: Representa graficamente a función:

$$f(x) = x^3 - 12x + 3$$



Solución: Para estudiar el signo de la derivada calculamos los puntos donde la derivada es 0 (son los valores en los que puede cambiar el signo).

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Los puntos donde la derivada es 0 delimitan tres intervalos en $\mathbb{R}$. Elegimos un valor en cada uno y lo sustituimos en la función derivada para estudiar el signo:

1. $(-\infty, -2)$: $f'(-3)=15$, por lo tanto la función es creciente en este intervalo.
2. $(-2, 2)$: $f'(0)=-12$, la función es decreciente en este intervalo.
3. $(2, +\infty)$: $f'(3)=15$, por lo tanto la función es creciente en este intervalo.

El estudio del signo de la derivada además de darnos una idea de la forma de la gráfica de la función, permítenos saber que en $x=-2$ hay un máximo relativo (la función cambia de creciente a decreciente) y en $x=2$ un mínimo relativo (pasa de decrecer a crecer).

Para obtener la gráfica de la función sólo es necesario dar algunos valores, en especial en los extremos relativos:

x	-2	2	0	-3	-4
f(x)	19	-13	3	12	-6

Exemplo: Representa gráficamente la función:

$$f(x) = x^3$$

Solución: Para estudiar el signo de la derivada calculamos los puntos donde la derivada es 0 (son los valores en los que puede cambiar el signo).

$$f'(x) = 3x^2$$

$$3x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

El punto donde la derivada es 0 delimita dos intervalos en $\mathbb{R}$. Elegimos un valor en cada uno para estudiar el signo de la derivada:

1. $(-\infty, 0)$: $f'(-1)=3$, la función es creciente en este intervalo.
2. $(0, +\infty)$: $f'(1)=3$, la función crece también en este otro intervalo.

Como no se produce un cambio en el crecimiento en $x=0$, tenemos que corresponder a un punto de inflexión con tangente horizontal.

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	-8	-1	0	1	8

Derivada segunda e curvatura.

El signo de la derivada primera indica cuando crece o decrece una función y su valor la inclinación de la gráfica.

De modo semejante, la derivada segunda proporciona información sobre la función original.

- Derivada segunda positiva: la derivada primera tiene que ser creciente, tiene que aumentar, y por lo tanto la inclinación de la función original tiene que ser cada vez "más positiva". La función original tiene que ser cóncava hacia arriba.
- Derivada segunda negativa: la derivada primera es decreciente. La inclinación de la función original tiene que ser cada vez "más negativa". La función original tiene que ser cóncava hacia abajo.

- Derivada segunda 0: a función orixinal pode ter un extremo ou un punto de inflexión nese punto.

Exemplo: Representa graficamente a función: $f(x) = 6x - x^3$

Solución: Estudiamos o crecemento a partir da derivada:

$$f'(x) = 6 - 3x^2 \rightarrow 6 - 3x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{6}{3} = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

1. $(-\infty, -\sqrt{2})$: $f'(-2) = -6$, a función decrece no intervalo.
2. $(-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$: $f'(0) = 6$, a función crece neste intervalo.
3. $(+\sqrt{2}, +\infty)$: $f'(3) = -21$, a función decrece neste intervalo.

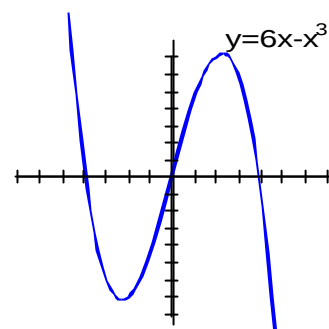
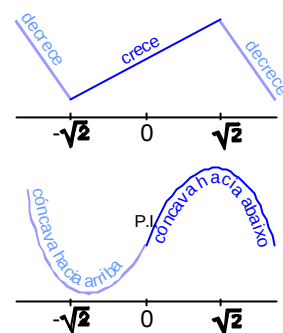
De xeito similar, podemos estudar a curvatura ca derivada segunda:

$$f''(x) = -6x \rightarrow -6x = 0 \rightarrow x = 0$$

4. $(-\infty, 0)$: $f''(-2) = 12$, función cóncava hacia arriba neste intervalo.
5. $(0, +\infty)$: $f''(1) = -6$, función cóncava hacia abaixo no intervalo.

Para facer a gráfica só resta dar algúns valores:

x	-2	-1'52 $(-\sqrt{2})$	0	1'52 $(\sqrt{2})$	3
f(x)	-4	-5'66	0	5'66	-9



Derivadas e extremos

En moitas ocasións é necesario atopar un punto onde unha función acada o valor máis alto ou o máis baixo.

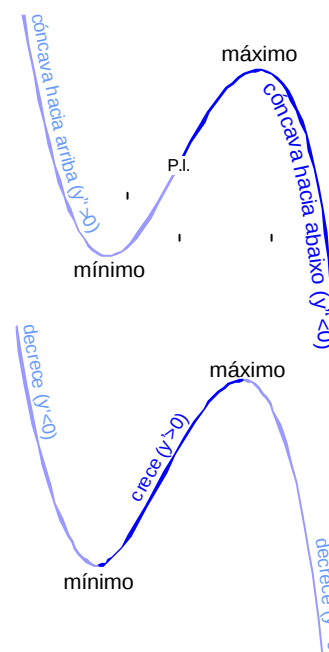
As derivadas proporcionáanos un método axeitado para poder facelo:

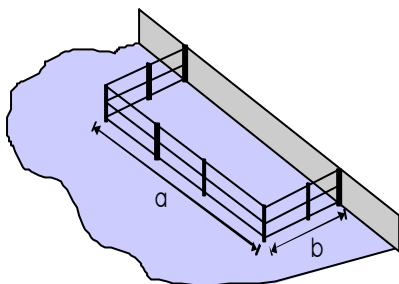
- 1) **Calculamos os puntos onde a derivada é 0.** Son os posibles extremos.
- 2) **Estudiamos se algún é o extremo que desexamos.** Os puntos onde a derivada vale 0 son máximos, mínimos ou puntos de inflexión. Temos varios xeitos de diferenciais:
 - a) Estudiamos a curvatura da función neses puntos mediante o signo da derivada segunda. Nos máximos a función é cóncava hacia abaixo (derivada segunda negativa ou 0) e nos mínimos a función é cóncava hacia arriba (derivada segunda positiva ou 0).
 - b) Estudiamos o crecemento da función nas proximidades de cada punto. Nos máximos a función cambia de crecente a decrecente (a derivada pasa de positiva a negativa) e nos mínimos xustamente ó revés.

O método a), baseado na derivada segundo, é máis doado de aplicar pero, se a derivada segunda é 0, non permite discriminar de que tipo de punto se trata (pode ser un maximo, un mínimo ou un punto de inflexión).

Exemplo: Dispoñemos de 200 m de aramio para cercar unha parte dunha leira. Queremos facer unha cerca de tres fíos e que por un lado linde cunha parede, ¿que dimensións deberá ter para que a área pechada sexa máxima?

Solución: A función que queremos optimizar é a área: $S = a \cdot b$





É unha función con dúas variables a que non sabemos calcularlle os extremos pero podemos transformala nunha dunha soa variable se temos en conta que dispoñemos de 200 m para construír a cerca: $200 = 3 \cdot (a + 2b)$

Despexamos unha variable: $a = \frac{200}{3} - 2b$

Substituíndo na fórmula da área: $S = \left(\frac{200}{3} - 2b \right) \cdot b = \frac{200b}{3} - 2b^2$

Buscamos os extremos:

$$S' = \frac{200}{3} - 4b$$

$$\frac{200}{3} - 4b = 0 \rightarrow b = \frac{200}{12} = 16\bar{6} \text{ m} \rightarrow a = \frac{200}{3} - 2 \cdot 16\bar{6} = 33\bar{3} \text{ m}$$

Comprobamos se é o máximo que buscamos:

$S'' = -4 \rightarrow$ A función é sempre cóncava hacia abaixo, ten que ser un máximo.

Exemplo: Queremos facer un depósito cilíndrico de chapa metálica, sen tapa, de 3 m^3 de capacidade. ¿Cales deben ser as súas dimensións para que a cantidade de chapa sexa mínima?

Solución: A función a optimizar é a que describe a área total do depósito:

$$A_{\text{total}} = A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} = \pi r^2 + 2\pi r h$$

É unha función con dúas variables, r e h, utilizando que o volume debe ser de 3 m^3 podemos transformala noutra dunha variable:

$$V = \pi r^2 h = 3 \Rightarrow h = \frac{3}{\pi r^2}$$

$$A_{\text{total}} = \pi r^2 + 2\pi r \frac{3}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{6}{r}$$

Os extremos serán:

$$A' = 2\pi r - \frac{6}{r^2}$$

$$2\pi r - \frac{6}{r^2} = 0 \rightarrow 2\pi r^3 - 6 = 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{6}{2\pi}} = 0'985 \text{ m}$$

Comprobamos se ese punto é o extremo buscado:

- $r = 0'5 \rightarrow A' = 2\pi \cdot 0'5 - \frac{6}{0'5^2} = -20'9 < 0$ decrece antes de $r = 0'985$
- $r = 1 \rightarrow A' = 2\pi \cdot 1 - \frac{6}{1^2} = 0'28 > 0$ crece despois de $r = 0'985$

No punto $r = 0'985$ hai un mínimo pois pasa de decrecer a crecer e, polo tanto, as dimensións do depósito deben ser $0'985$ de radio e $0'985$ de altura.

Aproximación pola tanxente

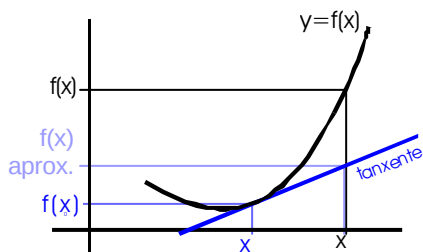
A derivada dunha función nun punto é un límite:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

O que significa que se x está próximo a x_0 , a derivada será aproximadamente igual ó cociente:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



Obtemos que $f(x)$, cando x está próximo a x_0 , é aproximadamente igual ó valor da tanxente nese punto.

Podemos calcular valores descoñecidos dunha función, aproximándoa pola recta tanxente nun punto próximo.

Exemplo: Calcula o valor da función $f(x)=x^3-5x$ en $x=3$ aproximando a función pola tanxente en $x=2$. Comproba como varia o grao de aproximación ó achegar x a 2.

Solución: Calculamos a ecuación da recta en $x=2$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 5 \rightarrow f'(2) = 7 \\ f(2) = 2^3 - 5 \cdot 2 = -2 \end{array} \right\} y = 7(x - 2) + (-2) \rightarrow y = 7x - 16$$

$$f(3) \approx 7 \cdot 3 - 16 = 5$$

O valor real é: $f(3)=3^3-5 \cdot 3=12$. O erro é pois de $12-5=7$

Vexamos como varia ó achegarnos ó punto de tanxencia:

$$f(2'5) \approx 7 \cdot 2'5 - 16 = 1'5 \quad \text{Erro} = 3'125 - 1'5 = 1'625$$

$$f(2'1) \approx 7 \cdot 2'1 - 16 = -1'3 \quad \text{Erro} = -1'239 - (-1'3) = 0'061$$

$$f(2'01) \approx 7 \cdot 2'01 - 16 = -1'93 \quad \text{Erro} = -1'93 - (-1'9294) = 0'0006$$

Taxa de variación media

Mide a variación media dunha función nun intervalo:

$$\text{TVM}_{[x_1, x_2]} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Expresase nas unidades de $f(x)$ divididas polas unidades de x .

Taxa de variación instantánea-Derivada nun punto

Mide a variación dunha función nun punto.

Calcúlase como un límite de taxas de variacións medias en intervalos cada vez máis pequenos:

$$\text{TVI}_{(x_0)} = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\text{TVM}_{[x_0, x]}) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Facendo o cambio $h = x - x_0$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Función derivada $f'(x)$

A función derivada $f'(x)$ dunha función $f(x)$ é outra función que a cada valor de x faille corresponder a derivada de $f(x)$ nese punto.

DERIVADAS ELEMENTAIS		
función	derivada	regra
a (constante)	0	A derivada dunha constante é 0
x	1	A derivada da función identidade é a función constante 1
x^r	$r \cdot x^{r-1}$	Multiplícase polo expoñente e redúcese o expoñente nunha unidade.

REGRAS DE DERIVACIÓN		
función	derivada	regra
$a \cdot u$	$a \cdot u'$	A derivada dunha constante por unha función é a constante pola derivada da función
$u + v$	$u' + v'$	A derivada dunha suma é a suma das derivadas
$u \cdot v$	$u' \cdot v + u \cdot v'$	Derivada do primeiro factor polo segundo sen derivar máis o primeiro sen derivar pola derivada do segundo
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	Derivada do numerador polo denominador sen derivar menos o numerador sen derivar pola derivada do denominador dividido todo polo denominador ó cadrado

Derivada segunda

Derivada da derivada dunha función $f(x)$: $(f'(x))' = f''(x)$.

Interpretación gráfica da derivada

A pendente da recta tanxente á gráfica dunha función nun punto x_0 é igual á derivada da función nese punto: $m_{\text{tanx}} = f'(x_0)$

Ecuación da **recta tanxente** a unha función $f(x)$ en x_0 :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Derivadas e crecemento

- Se a derivada é positiva a función é crecente.
- Derivada negativa entón a función é decrecente.
- Se a derivada nun punto é 0 entón ese punto é:
 - ♦ Un máximo relativo da función.
 - ♦ Un mínimo relativo.
 - ♦ Un punto de inflexión no que a gráfica é “horizontal”.

Estudiando o signo da derivada sabemos como crece a función e podemos facernos unha primeira idea da forma da súa gráfica.

Derivada segunda e curvatura.

A derivada segunda proporciona información sobre a curvatura da función orixinal.

- Derivada segunda positiva, a función orixinal é cóncava hacia arriba.
- Derivada segunda negativa, a función orixinal é cóncava hacia abaixo.
- Derivada segunda 0 nun punto, a función orixinal pode ter un extremo ou un punto de inflexión nese punto.

Derivadas e extremos

Un procedemento para atopar un extremo dunha función é:

- 1) **Calculamos os puntos onde a derivada é 0.** Son os posibles extremos.
- 2) **Estudiamos cal é o extremo que desexamos.** Podemos facelo de varios xeitos:
 - a) O signo da derivada segunda:
 - Derivada segunda negativa, máximo.
 - Derivada segunda positiva, mínimo.
 - Derivada segunda 0, pode ser máximo, mínimo ou punto de inflexión.
 - b) Estudiando o crecemento da función (signo da derivada) nas proximidades de cada punto :
 - A derivada pasa de positiva a negativa, máximos.
 - A derivada pasa de negativa a positiva, mínimo.

Ampliación

Notación de Leibnitz

Newton e Leibnitz traballando de xeito independente, elaboraron a fundamentación do Cálculo Infinitesimal pero foi a notación de Leibnitz pola súa simplicidade e claridade a que se adoptou de xeito universal e continúa utilizándose na actualidade:

Leibnitz chamoulle dx á *variación máis pequena posible* de x , é dicir: $dx = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)$

Á función noméase $y=f(x)$ e a súa variación dy : $dy = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0))$

Dese xeito a derivada en x_0 será: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow dy = f'(x)dx$

Debes ter en conta que, aínda que o pareza, a expresión dy/dx non é un cociente senón un límite dun cociente, pero en ocasións é útil manexalo como tal pois permite automatizar toda unha serie de cálculos manexando dx e dy como se se tratase de variables calquera.

Exemplo: Vexamos como pode calcularse a función derivada de $y = (1 - x^2)^5$

Solución: Facemos $t=1-x^2$, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \xrightarrow[\frac{\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}}{\frac{dt}{dx} \cdot \frac{dx}{dx}} = -2x]{\frac{dy}{dt} = \frac{d(t^5)}{dt} = 5t^4} \frac{dy}{dx} = 5(1-x^2)^4 \cdot (-2x)$$

O proceso anterior coñécese como **regra da cadea**, pero non é unha demostración senón un xeito de automatizar un proceso mais complexo (algo así como “cambear” de membro un termo dunha ecuación).

Derivadas numéricas

Definimos a derivada dunha función nun punto como un xeito de medir a variación instantánea da función nese punto. Dado que esa variación non pode calcularse directamente, aproximámola mediante taxas de variación medias en intervalos cada vez menores, de onde resulta a expresión:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

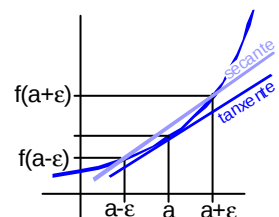
Ese límite, se a función é continua, é indeterminado polo que o seu cálculo pode resultar bastante complexo $\left(f(x) = f(a) \text{ cando } x \rightarrow a \Rightarrow f'(a) = \frac{0}{0} \right)$.

Podemos evitar calculalo renunciando ó valor exacto e utilizando unha aproximación nun intervalo suficientemente pequeno, a taxa de variación media.

Na maioría dos casos, a aproximación é mellor utilizando a TVM nun intervalo centrado no punto (procedemento utilizado polas calculadoras gráficas):

$$Df(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \approx \frac{f(a+\epsilon) - f(a-\epsilon)}{(a+\epsilon) - (a-\epsilon)} = \frac{f(a+\epsilon) - f(a-\epsilon)}{2\epsilon}$$

Función	Derivada en x=2	TVM _[1'99,2'01] (e=0'01)
$f(x)=x^2+5x-1$	9	9
$f(x)=x^3$	12	12'0001
$f(x)=\text{sen}(x)$	$\cos(2)=0'416146\dots$	-0'4161399
$f(x)=e^x$	$e^2=7'389056\dots$	7'389179



A derivada coincide coa pendente da tanxente e a taxa de variación media coa pendente da secante que, como pode verse, son moi semellantes.

Exercicios e actividades

1 Dadas as seguintes funcións:

$$y = 2x^3 + 1$$

$$y = (2x^3 + 1)^2$$

$$y = (2x^3 + 1)^3$$

$$y = (2x^3 + 1)^{-1}$$

a) Calcula a súa función derivada.

b) Inventar unha fórmula para calcular a función derivada da potencia dunha función.

2 Atopa as funcións derivadas das seguintes funcións:

a) $y = 2x^4 - x + 3$ b) $y = (2x^4 - x) \cdot (3x^5 + 3)$ c) $y = 2 \cdot (x - 3)$ d) $y = x \cdot (1 - x^2)$

e) $y = \frac{1}{x}$ f) $y = \frac{-3}{x^3}$ g) $y = \frac{x^4 - 3}{5 - x^2}$ h) $y = \left(\frac{x - 3}{1 - x^2} \right)^2$

3 Atopa a función derivada da función $f(x) = \sqrt{x}$

4 Atopa a función derivada da función $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

5 A produción de mazás dunha maceira ó longo de 30 anos ven dada pola función seguinte: $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 10x$ onde x é o tempo en anos e $f(x)$ a cantidade de mazás en quilos.

a) Calcula a taxa de variación de $f(x)$ no intervalo desde $x=3$ a $x=9$. ¿Que significado físico ten esa taxa de variación?

b) Calcula a función derivada de $f(x)$ e $f'(9)$, $f'(15)$ e $f'(21)$. ¿Que significado físico teñen esas derivadas?

c) Fai a gráfica de $f(x)$ e intenta explicar que relación teñen as derivadas anteriores coa gráfica de $f(x)$ nos puntos $x=9$, $x=15$ e $x=21$.

6 O espacio percorrido por un móbil ven dado pola función:

$$s(t) = 5t^2 + 10t + 3, \quad t \text{ en segundos e } s(t) \text{ en m}$$

a) Calcula a velocidade inicial do móbil.

b) Estudia que tipo de movemento leva o móbil.

7 Faise un estudio de como inflúe a temperatura no desenvolvemento dunha cepa de bacterias e descubriuse que a cantidade de bacterias presentes na mostra ven dada pola función: $b(t) = -0.02t^3 + t^2$, $b(t)$ en miligramos (mg) e t en °C.

a) Calcula a TVM_[0,10] da función $b(t)$ e explica en que unidades se mide.

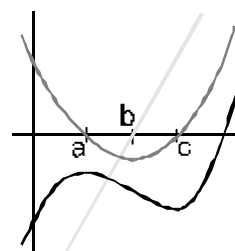
b) Atopa a función derivada de $b(t)$, di en que unidades está e que representa.

c) ¿A que temperatura é máxima a cantidade de bacterias e cal é esa cantidade?

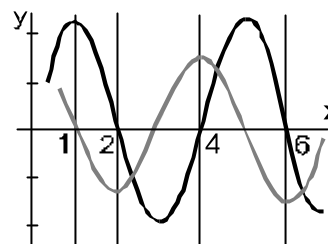
d) ¿Varia uniformemente a cantidade de bacterias? Xustifica a resposta.

e) ¿A que temperatura se debe quenta-la mostra para elimina-las bacterias?

- 8 Dada a función $f(x) = \sqrt{2x}$ pídese:
- Calcula $f(0)$ e $f(2)$.
 - Calcula $TVM_{[0,2]}$.
 - Fai a gráfica de $f(x)$.
- 9 Atopa a ecuación da recta tanxente a $f(x)=2x^2+4x$ no punto $(1,6)$.
- 10 Estudia a tanxente á gráfica de $f(x)=2-x^2$ ten pendente -6 en algún punto.
- 11 Dada a parábola de eixe horizontal e ecuación $y^2=2x$
- Atopa as ecuacións das rectas tanxentes nos puntos de abscisas $x=4$.
 - ¿Hai algún punto onde a tanxente á parábola teña pendente $\frac{1}{3}$.
- 12 Atopa a ecuación tanxente á circunferencia centrada na orixe e radio 5 no punto $(3,4)$.
- 13 Estudia o crecemento, extremos, curvatura e puntos de inflexión das seguintes funcións:
- $f(x) = x^3 - 3x$
 - $g(x) = x^3 + 3x$
 - $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
- 14 Dada a función $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 3$
- Calcula a fórmula da súa función derivada $f'(x)$.
 - Calcula os extremos relativos e puntos de inflexión de $f(x)$.
 - Fai a súa gráfica.
- 15 Dada a función: $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$
- Estudia se ten extremos.
 - Atopa a ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ en $x=0$.
 - Atopa a ecuación das asíntotas da función.
 - Estudia a curvatura de $f(x)$ e debuxa a gráfica.
- 16 O gráfico que se acompaña representa unha función, a súa derivada e a súa derivada segunda. Explica o comportamento da función nos puntos que teñen por abscisas as indicadas con letras na gráfica.
- 17 O número de individuos dunha poboación animal ven dado en función do tempo t por: $P(t) = 10000 - \frac{k}{t+1}$ onde k é unha constante.
- Sabendo que inicialmente (tempo=0) hai 1000 individuos, calcular k .
 - ¿A poboación aumenta ou diminúe co paso do tempo? Xustifíquese a resposta.
 - Representa-la función $P(t)$ para valores de $t>0$.



- 18 ¿Que representa a derivada dunha función nun punto? Na figura adxunta representáanse as gráficas dunha función e maila súa derivada. Explicar razoadamente cal é a función e cal é a derivada. ¿Qué tipo de puntos son, na función, os de que se indican?



- 19 Calcular a , b e c para que a función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ teña un máximo en $x=-4$, un mínimo en $x=0$ e tome o valor 1 en $x=1$.

- 20 Estudiamos a velocidade dun móbil segundo o tempo e temos a seguinte táboa:

Tempo (s)	1	1.5	3	4	6
Vel (m/s)	10	12	18	22	30

- Representa eses valores e atopa a fórmula da función velocidade segundo o tempo.
- Calcula a derivada desa función. ¿Que representa fisicamente esa derivada?
- ¿Qué tipo de movemento leva o obxecto?
- Atopa a fórmula do espacio percorrido por ese móbil segundo o tempo, sabendo que o espacio inicial é 0.

- 21 Na táboa aparecen as cantidades de bacterias dun cultivo, en gramos, en diferentes días.

- Calcula: $TVM_{[0,4]}$ e $TVM_{[4,8]}$
- ¿En que unidades se expresan esas taxas de variación e que miden? Comparando os valores das TVM anteriores ¿Que podemos dicir da cantidade de bacterias?

Días	0	2	4	6	8
Bacterias	25	50	100	200	400

- 22 A intensidade de luz ultravioleta procedente do Sol que se recibe nunha certa praia en diferentes semanas foi:

- ¿A función que describe a intensidade segundo a semana é polinómica de grao 2? En caso afirmativo, atopa a súa fórmula.
- ¿En que momentos a intensidade é superior a 20.75?
- ¿Cal supoñemos que será a maior intensidade e cando se alcanzará?

Semana	0	1	2	3	4
Intensidade UV	2	11	18	23	26

- 23 Durante dez anos estúdase a poboación de baleas azuis, obténdose os seguintes resultados:

- ¿A función que describe o número de baleas é polinómica de grao 2?
- Calcula a $TVM_{[4,8]}$ e explica que mide.
- Intenta predicir en que intre quedará reducido a 1000 exemplares o número de baleas.

x anos	0	2	4	7	8
b(x) baleas (miles)	4	3.6	3.24	2.77	2.62

- 24 Dada a función: $f(x) = 2 + \frac{x}{x+1}$

- Fai a gráfica de $f(x)$ estudiando crecemento, extremos, curvatura e asíntotas.
- ¿Hai algún punto da gráfica onde a pendente da recta tanxente sexa de $1/4$?

- 25** Dispoñemos de 10 m^2 de chapa para facer un depósito cilíndrico, con tapa. ¿Cales deben ser as súas dimensións se queremos que o volume sexa máximo?
- 26** Queremos construír un prisma de base cadrada cun volume de 8 m^3 ¿Cales deben ser as súas dimensións para que o gasto en materiais sexa mínimo?
- 27** Atopa as dimensións dun rectángulo inscrito nunha circunferencia de radio 1 m de xeito que a súa área sexa máxima.
- 28** Córtase unha corda de 200 m. en dúas partes para construír un cadrado e un rectángulo de base dobre cá altura. Obte-la suma das áreas en función da altura do rectángulo. Calcular razoadamente a altura do rectángulo para que a suma das áreas sexa mínima.
- 29** Demostra que o cadrado é o paralelogramo que ten a área maior a igual perímetro.
- 30** Demostra que, coa mesma área, o prisma de base cadrada co volume máximo é o cubo.

Problema: O principio de inducción establece que se unha propiedade relativa ós números naturais é válida para un certo valor inicial n_0 e demostramos que, supoñendo que sexa válida para un número n , tamén é válida para $n+1$ entón esa propiedade é válida para tódolos números naturais maiores ca n_0 .

Utilizando o principio de inducción, demostra que a derivada de $y=x^n$ é $y'=nx^{n-1}$ calquera que sexa n pertencente ós números naturais.

Problema: Atopa a ecuación das rectas tanxentes á circunferencia de centro na orixe e radio 1 desde o punto (4,0).

Problema: a) Inventa un método para estudar se unha función ten asíntotas oblicuas.

b) Estudia se ten asíntotas oblicuas a función e debuxa a súa gráfica: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

Problema: As coordenadas da posición dun foguete segundo o tempo veñen dadas por:

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = 2t \\ y(t) = -t^2 + 8t \end{array} \right\} \text{ t en s, x(t) e y(t) en km.}$$

- ¿Canto durou o voo do foguete?
- Debuxa a traxectoria do foguete e atopa as coordenadas do punto máis alto.
- Ós 2 segundos o foguete solta unha sonda que segue movéndose afectada só pola inercia e a gravidade, atopa as fórmulas que dan a posición da sonda segundo o tempo.