

Unidade 7: Funcións elementais

1. Funcións polinómicas.
2. Funcións racionais.
3. Funcións exponenciais e logarítmicas.
4. Funcións trigonométricas.
5. Funcións a trozos.
6. Outros tipos de funcións: paramétricas.

Introducción

Funcións

O concepto de función como relación entre magnitudes é moi antigo: os matemáticos gregos sabían que a lonxitude dunha circunferencia obtense multiplicando o seu diámetro pola constante π , Galileo descubriu que o espazo que percorre un corpo o caer é igual ó cadrado do tempo multiplicado por 5, etc.

Sen embargo, o xeito de expresar esa relación, a notación, cambiou moito co paso do tempo: na antiga Grecia preferían facer relación a conceptos xeométricos (a función de Galileo expresaríana dicindo que a lonxitude percorrida polo móbil é cinco veces a área dun cadrado de lado igual ó tempo) e só coas aportacións de Descartes empezouse a utilizar fórmulas tal como hoxe as entendemos.

A invención das fórmulas e do cálculo simbólico foi un longo proceso que fixo posible as actuais Matemáticas e, o mesmo tempo, algo que por ser totalmente cotiá non se valora como merece.

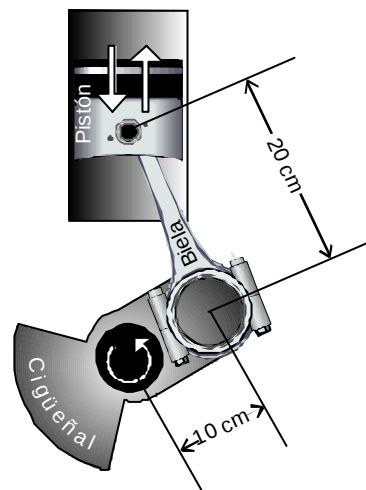
Actividade: Aplicando a Lei dos Gases Perfectos, atopa a fórmula que describe o volume que ocupa 1 mol de H_2 a temperatura normal segundo a presión.

Actividade: Unha cepa bacteriana reproducése por bipartición de xeito que, cada día, duplícase o número de individuos. Atopa a fórmula da función que describe o número de individuos segundo o tempo dun cultivo formado por 150000 bacterias desa cepa.

Actividade: As substancias radiactivas desintéganse (transformanse noutras e en enerxía ó emitir radiacións) de xeito que, cada certo tempo chamado período de semidesintegración, a cantidade de substancia redúcese a metade.

Dispoñemos dunha mostra de 4 g dunha substancia con período de semidesintegración de 1 ano, atopa a fórmula da función que describe a cantidade desa substancia que hai na mostra segundo o tempo.

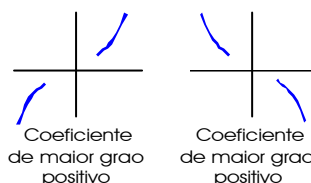
Actividade: Un motor de explosión ten un cigüeñal cun radio de 10 cm e unha biela de 20 cm de lonxitude. Atopa a fórmula da función que describe a altura do pistón segundo o radio de xiro do cigüeñal.



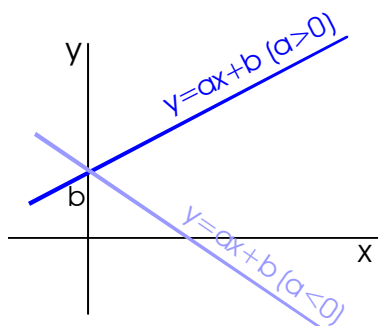
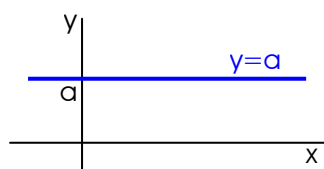
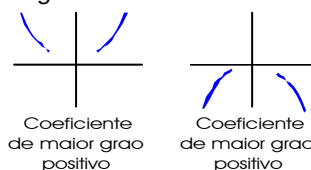
Funcións elementais

Paridade: O tipo de gráfica depende de si o expoñente de de maior grao é par ou impar:

1. **Impar:** As puntas da gráfica tenden a $\pm\infty$ pero con signos diferentes.



2. **Par:** As puntas tendenden a $\pm\infty$ per, neste caso, as dúas puntas co mesmo signo.



Funcións elementais

Diremos que unha función é elemental cando ven descrita por unha fórmula simple.

As funcións elementais son continuas e derivables as veces que se queira en tódolos puntos do seu dominio. Faremos un estudio das máis significativas.

Funcións polinómicas

Son funcións que teñen por fórmula un polinomio, é dicir, que as únicas operacións que lle afectan a variable independente son produtos, potencias de expoñente natural e sumas.

O dominio das funcións polinómicas é todo $\mathbb{R}$ e non teñen asíntotas de ningún tipo.

Desempeñan un papel fundamental porque podemos aproximar calquera función, coa exactitude que desexemos, utilizando funcións polinómicas.

Para representar graficamente as funcións polinómicas é fundamental estudar crecemento, extremos relativos e tamén a paridade do expoñente do termo de maior grao.

Funcións de grao 0, $f(x)=a$: O valor da función non varia ó variar x , polo que reciben o nome de funcións constantes.

A gráfica é unha recta horizontal que corta ó eixe Y no punto $(0,a)$.

Funcións de grao 1, $f(x)=ax+b$: Son as funcións que describen unha maior cantidade de fenómenos físicos.

A súa gráfica é unha recta crecente, cando $a>0$, ou decrecente se $a<0$.

O coeficiente a determina a inclinación da gráfica e o b a ordenada na orixe.

En ocasións, cando coñecemos dous valores dunha función e queremos calcular un terceiro, aproximamos a función cunha función de grao 1. Este procedemento coñécese como interpolación lineal (cando o valor descoñecido está entre os coñecidos) ou extrapolación lineal (se o valor a calcular está antes ou despois dos coñecidos).

Exemplo: Sabendo que $\tan(30)=0'5774$ e que $\tan(45)=1$ calcular, aproximadamente, $\tan(42)$ (interpolación) e $\tan(50)$ (extrapolación).

Solución: Aproximamos a función tanxente pola recta (función de grao 1) que pasa polos puntos (30, 0'5774) e (45, 1).

$$f(x) - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \rightarrow f(x) - 1 = \frac{0'5774 - 1}{30 - 45}(x - 45)$$

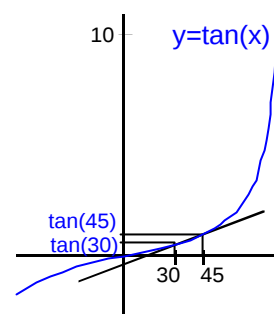
$$f(x) = 0'02817x - 0'2678$$

Os valores que obtemos son:

$$\tan(42) \approx 0'02817 \cdot 42 - 0'2678 = 0'9153$$

$$\tan(50) \approx 0'02817 \cdot 50 - 0'2678 = 1'1407$$

Os valores reais eran $\tan(42) = 0'9004$ e $\tan(50) = 1'1918$



Funcións de grao 2, $f(x)=ax^2+bx+c$: É unha función par. A súa gráfica é unha parábola e, polo tanto, simétrica en relación a un eixe vertical que pase polo vértice. Os valores da función coinciden a ámbolos dous lados do vértice.

Se $a > 0$ é cóncava cara arriba e ten un mínimo absoluto na abscisa correspondente ó vértice.

Se $a < 0$ é cóncava cara abaixo e a función ten un máximo absoluto na abscisa correspondente ó vértice.

Exemplo: Atopa o máximo da función $f(x) = -2x^2 + 6x - 1$

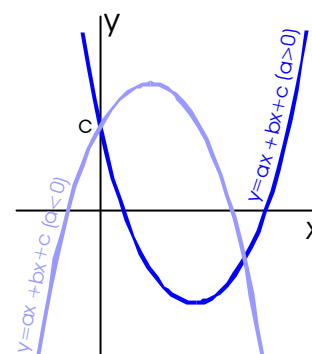
Solución: Sabemos que nos extremos relativos, en particular nos máximos, a derivada é 0, polo tanto:

$$f'(x) = -4x + 6 \rightarrow -4x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-6}{-4} = 1'5$$

Temos que comprobar se efectivamente é un máximo e, para facelo, estudiamos o crecemento ós dous lados do punto:

$$x = 1'5 \left\{ \begin{array}{l} f'(1) = -4 \cdot 1 + 6 = 2 > 0 \Rightarrow f(x) \text{ crece} \\ f'(2) = -4 \cdot 2 + 6 = -2 < 0 \Rightarrow f(x) \text{ decrece} \end{array} \right\} \text{ máximo}$$

Como a función pasa de crecente a decrecente, ten un máximo relativo en $x = 1'5$ que, por tratarse dunha función de grao 2, tamén é absoluto.



Funcións de grao 3, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$: É unha función impar. A gráfica é pode ter dous extremos relativos (un máximo e un mínimo) ou un punto de inflexión como sucede, por exemplo, coa función $f(x)=x^3$.

Estas funcións coñécense tamén como “cúbicas”.

Exemplo: Fai as gráficas das funcións $f(x) = -x^3$ e $g(x) = x^3 - 12x + 2$.

Solución: Estudiamos o crecemento e os extremos e logo construímos unha táboa de valores de cada unha das funcións.

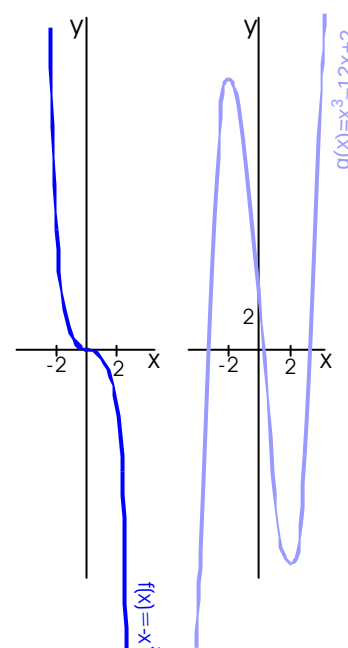
$$f'(x) = -3x^2 \rightarrow -3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x = 0 \left\{ \begin{array}{l} f'(-1) = -3(-1)^2 = -3 < 0 \Rightarrow f(x) \text{ decrece} \\ f'(3) = -3 \cdot 3^2 = -27 < 0 \Rightarrow f(x) \text{ decrece} \end{array} \right\} \text{ Inflexión}$$

En $x=0$ hai un punto de inflexión con tanxente horizontal.

$$g'(x) = 3x^2 - 12 \rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$x = -2 \left\{ \begin{array}{l} g'(-3) = 3(-3)^2 - 12 = 15 > 0 \Rightarrow f(x) \text{ crece} \\ g'(0) = 3 \cdot 0^2 - 12 = -12 < 0 \Rightarrow f(x) \text{ decrece} \end{array} \right\} \text{ Máximo}$$



x	-3	-1	1	2
f(x)	-27	-1	1	8

x	-3	-2	0	2	3
g(x)	11	18	2	-14	-7

$$x = 2 \left\{ \begin{array}{l} g'(0) = -12 < 0 \Rightarrow f(x) \text{ decrece} \\ g'(3) = 3 \cdot 3^2 - 12 = 15 > 0 \Rightarrow f(x) \text{ crece} \end{array} \right\} \text{ M\u00ednimo}$$

$g(x)$ ten un m\u00e1ximo relativo en $x=-2$ e un m\u00ednimo relativo en $x=2$.

Grao maior de 3, $f(x)=a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$: A s\u00fa funci\u00f3n derivada \u00e9 un polinomio de grao $n-1$ que pode ter $n-1$ ra\u00edces. Polo tanto a funci\u00f3n pode ter hasta $n-1$ extremos relativos.

Para debuxar a s\u00fa gr\u00e1fica \u00e9 fundamental ter en conta a paridade da funci\u00f3n.

Funci\u00f3ns racionais

Son as funci\u00f3ns que te\u00f1en por f\u00f3rmula un cociente de polinomios.

Caracter\u00edzanse porque poden existir n\u00fameros reais que non pertencen ao seu dominio (as ra\u00edces do denominador) e, polo tanto, poden ter as\u00edntotas verticais.

En parte, a s\u00fa gr\u00e1fica ser\u00e1 semellante \u00e1 do polinomio de grao a diferencia entre o grao do numerador e do denominador ag\u00fas pola existencia de as\u00edntotas verticais e extremos.

Grao do numerador \u00e9 menor co do denominador, \u00f3 eixe X \u00e9 unha as\u00edntota horizontal.

Graos iguais, aproximarase a unha recta horizontal (hai unha as\u00edntota horizontal).

Grao do numerador unha unidade maior co denominador, a gr\u00e1fica aproximarase a unha recta con pendente distinta de 0 (as\u00edntota oblicua).

Grao do numerador 2 mais co denominador, aproximarase a unha par\u00e1bola (non ten as\u00edntota oblicua nin horizontal).

Exemplo: Dada a funci\u00f3n: $f(x) = \frac{2x+2}{x^2-1}$

Estudia cal \u00e9 o seu dominio, comproba se ten as\u00edntotas e debuxa a s\u00fa gr\u00e1fica.

Soluci\u00f3n: En principio non poden pertencer \u00f3 dominio da funci\u00f3n as ra\u00edces do denominador, xa que non podemos dividir entre 0.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

O dominio son t\u00f3dolos n\u00fameros reais ag\u00fas o 1 e o -1.

Para que unha recta $x=a$ sexa unha as\u00edntota vertical \u00e9 necesario que $x=a$ non pertenza \u00f3 dominio da funci\u00f3n e que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$

$$x = -1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+2}{x^2-1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x-1} = -1$$

A recta $x=-1$ non \u00e9 unha as\u00edntota vertical da funci\u00f3n.

$$x = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+2}{x^2-1} = \frac{2}{0} = \pm \infty$$

A recta $x=1$ \u00e9 unha as\u00edntota vertical.

Sabemos que a recta $y=0$ (eixe das X) \u00e9 unha as\u00edntota horizontal.

Antes de darlle valores, estudiamos o crecemento e os extremos relativos. Dado que en 1 e en -1 non existe función, debemos engadir eses valores ós posibles extremos para estudar o crecemento.

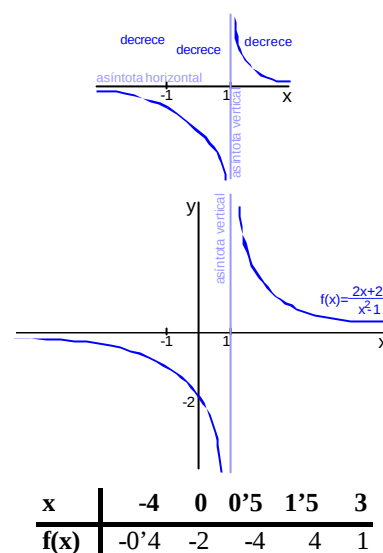
$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 1) - (2x + 2) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 4x - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

Os posibles extremos son os puntos que anulan a derivada:

$$-2x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-2)} = -1$$

O único posible extremo é $x = -1$, que non pertence ó dominio. A función non ten extremos relativos. Estudiamos o crecemento:

- $(-\infty, -1)$: $f'(-2) = -0'2 < 0$, $f(x)$ decrece.
- $(-1, 1)$: $f'(0) = -2 < 0$, decrece.
- $(1, +\infty)$: $f'(2) = -2 < 0$, decrece.



Exemplo: Dada a función: $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$

Estudia cal é o seu dominio, comproba se ten asíntotas e debuxa a súa gráfica.

Solución: Non poden pertencer ó dominio da función as raíces do denominador.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$$

O dominio son tódolos números reais agás o 2.

Estudiamos se ten asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{x-2} = \frac{8}{0} = \pm\infty$$

A recta $x=2$ é unha asíntota vertical.

Estudiamos o crecemento e os extremos relativos e damos valores:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x-2) - x^3 \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2}{(x-2)^2}$$

$$2x^3 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

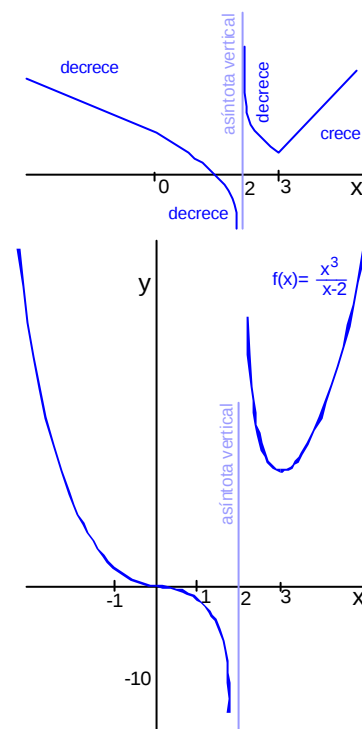
Os posibles extremos son $x=0$ e $x=3$. Estudiamos o crecemento:

- $(-\infty, 0]$: $f'(-2) < 0$, $f(x)$ decrece.
- $[0, 2)$: $f'(1) < 0$, decrece.
- $(2, 3]$: $f'(2.5) < 0$, decrece.
- $[3, +\infty)$: $f'(4) > 0$, crece.

En $x=0$ hai un punto de inflexión con tanxente horizontal e en $x=3$ hai un mínimo relativo.

A hora de facer a gráfica ten en conta que a diferenza de graos é 2, polo que a gráfica semellará unha parábola.

x	f(x)
-4	10'7
-1	0'3
0	0
1	-1
2'5	31'2
3	27
4	32



Exercicios: Debuxa as gráficas das seguintes funcións, estudando o dominio, asíntotas, crecemento e extremos.

a) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

b) $g(x) = \frac{x^2}{x+2}$

Funcións periódicas

Na natureza é frecuente que un fenómeno se repita ciclicamente: As subidas e baixadas do nivel do mar, a duración do

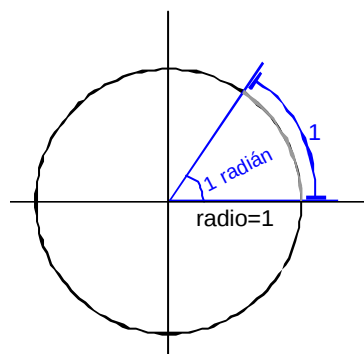
día ó longo dun ano, o movemento das estrelas no ceo, a posición dunha partícula que vibra.

Para a descrición dalgúns destes fenómenos utilízanse as funcións periódicas que, do mesmo xeito que os ciclos da natureza, repiten os seus valores de xeito periódico.

Funcións periódicas son, por exemplo, o seno, o coseno e a tanxente utilizando o ángulo como variable independente.

Esas funcións reciben o nome de funcións trigonométricas.

Se ben podemos seguir utilizando os graos como unidade de medida para a variable independente (o ángulo) resulta moito máis operativo medir os ángulos nunha nova unidade que chamaremos radián.



Radiáns

Para medir ángulos trazamos unha circunferencia de centro no vértice do ángulo.

Esa circunferencia divídese en 360 partes, cada unha é 1 grao, que a súa vez se divide en 60 partes, minutos, que a súa vez se divide en outras 60 partes, segundos.

É un sistema que se basa no sistema de numeración sexagesimal da babilonia de fai 3000 anos.

Outro xeito de medir ángulos é, en lugar de dividir a circunferencia en partes, medir o arco que abarca ese ángulo.

Un ángulo de **1 radián** é o que abarca un arco de igual lonxitude co radio.

A medida dun ángulo, en radiáns, será a lonxitude do arco que abarca dividido polo radio. É máis doado se a circunferencia é de radio 1 (trigonométrica) pois, nese caso, non é necesario dividir.

Deste xeito, medir ángulos equivale a medir lonxitudes.

Podemos transformar facilmente graos en radiáns e viceversa con só ter en conta que o arco que abarca un ángulo de 360° é unha circunferencia e a súa lonxitude é 2π . Polo tanto 180° equivalen a π radiáns, a proporción deberá ser a mesma en calquera ángulo:

$$\frac{\text{radiáns}}{\text{graos}} = \frac{\pi}{180}$$

Exemplo: Calculemos a derivada da función seno en $x=0$ (0 é o único ángulo co mesmo valor en graos e en radiáns) utilizando as dúas unidades de medida, graos e radiáns.

Solución: Obtemos un límite que no presente curso non podemos calcular alxebricamente, pero si podemos intentar obter o seu valor mediante aproximacións (asegúrate de por a calculadora no modo correspondente a cada unha das unidades: DEG para graos e RAD para radiáns):

$$\text{sen}'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) - \text{sen}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$$

Graos	Radiáns
0	0
30	$\frac{\pi}{6} = 0'52$
45	$\frac{\pi}{4} = 0'78$
90	$\frac{\pi}{2} = 1'57$
180	$\pi = 3'14$
270	$\frac{3\pi}{2} = 4'71$

En graos		En radiáns	
5°	0'0174311	0'04	0'999733
1°	0'0174524	0'009	0'999986
0'01	0'0174532	0'00009	0'999999
$\text{sen}'(0) = \frac{\pi \cdot \cos(0)}{180}$		$\text{sen}'(0) = \cos(0) = 1$	

Funcións seno e coseno

O seno e o coseno son as funcións periódicas máis simples. Utilízanse para a descrición de todo tipo de fenómenos periódicos, en especial os que en Física reciben o nome de movementos harmónicos.

Podemos estudar o crecemento e os extremos da función seno (e da coseno) utilizando a circunferencia trigonométrica:

$[0, \pi/2]$: A función seno crece.

$[\pi/2, \pi]$: Decrece.

$[\pi, 3\pi/2]$: Segue decrecendo (valores cada vez máis negativos).

$[3\pi/2, 2\pi]$: Crece.

En $\pi/2$ hai un máximo e en $3\pi/2$ un mínimo.

As gráficas do seno e do coseno son semellantes (teñen a mesma forma), en efecto:

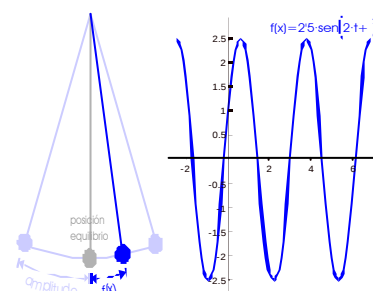
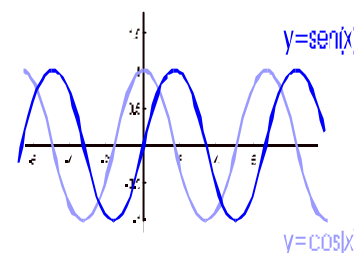
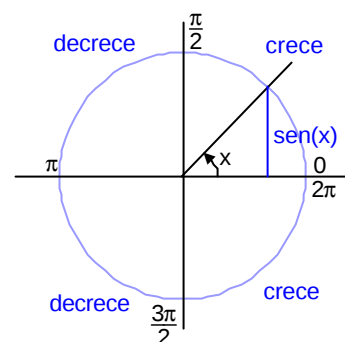
- Sabemos que o seno dun ángulo é igual ó coseno do seu complementario e viceversa: $\text{sen}(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
- Ademais, o coseno dun ángulo é igual o coseno do seu oposto: $\cos(x) = \cos(-x)$.

$$\text{Obtemos que } \text{sen}(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

- Esa relación tradúcese en que as gráficas da función seno e da función coseno teñen a mesma forma pero unha está desfasada en relación á outra: Cambiar x por $x - \frac{\pi}{2}$ equivale a trasladar a orixe ó punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Exemplo: Os movementos harmónicos simples, como os dun péndulo ou a vibración producida polo son nunha molécula de aire, para os que se utilizan as chamadas funcións de onda: $f(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + f_0)$

- $f(t)$ describe a separación do móbil da posición de equilibrio.
- A é a separación máxima respecto ó punto de equilibrio.
- ω é o número de ciclos que se producen nun período de 2π .
- f_0 é a fase inicial, determina o punto onde está o móbil ó empezar o movemento.



Propiedades do seno e do coseno

Fórmula fundamental da Trigonometría: $\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$

Ángulos complementarios: O seno dun ángulo é igual ó coseno do complementario e viceversa: $\sin(A) = \cos(90-A)$ e $\cos(A) = \sin(90-A)$.

Ángulos opostos: O Coseno dun ángulo é igual o coseno do seu oposto e o seno dun ángulo é igual o do seu oposto cambiado de signo: $\cos(A) = \cos(-A)$ e $\sin(A) = -\sin(-A)$

O seno e o coseno non son funcións lineais (o seno dunha suma non é a suma dos senos dos sumandos) pero existen fórmulas que nos permiten calcular o seno e o coseno da suma e da diferenza de dous ángulos a partir do seno e do coseno deses ángulos:

Coseno dunha diferenza:

$$\cos(A - B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)$$

Demostración: Consideremos os vectores que van da orixe ós puntos da circunferencia trigonométrica determinados polos ángulos A e B: $\vec{v} = (\cos(A), \sin(A))$ e $\vec{w} = (\cos(B), \sin(B))$

O ángulo que forman eses vectores é A-B. Utilizando a fórmula para calcular o coseno do ángulo de dous vectores e tendo en conta que eses vectores teñen módulo 1, resulta:

$$\cos(A - B) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \vec{v} \cdot \vec{w} = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)$$

Coseno dunha suma:

$$\cos(A + B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$$

Demostración: Substituíndo B por -B na fórmula anterior e tendo en conta que $\cos(-B) = \cos(B)$ e $\sin(-B) = -\sin(B)$ e resulta:

$$\begin{aligned}\cos(A - B) &= \cos[A - (-B)] = \cos(A)\cos(-B) + \sin(A)\sin(-B) = \\ &= \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)\end{aligned}$$

Seno dunha suma:

$$\sin(A + B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$$

Demostración: Utilizando que $\sin(A) = \cos(90-A)$, obtemos:

$$\begin{aligned}\sin(A + B) &= \cos[90 - (A + B)] = \cos[(90 - A) - B] = \\ &= \cos(90 - A)\cos(B) + \sin(90 - A)\sin(B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)\end{aligned}$$

Seno dunha diferenza:

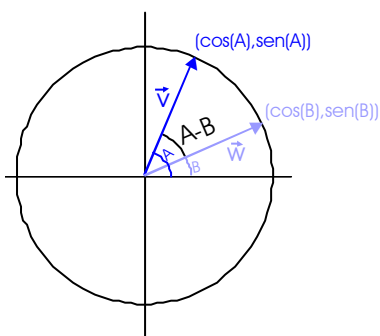
$$\sin(A - B) = \sin(A)\cos(B) - \cos(A)\sin(B)$$

Demostración: Substituíndo B por -B na fórmula anterior:

$$\begin{aligned}\sin(A - B) &= \sin[A + (-B)] = \sin(A)\cos(-B) + \cos(A)\sin(-B) = \\ &= \sin(A)\cos(B) - \cos(A)\sin(B)\end{aligned}$$

Función tanxente

A diferenza do seno e do coseno, o dominio da función tanxente non é todo R.



Non hai tanxente cando o coseno é 0:

$$-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$$

Neses puntos a función tanxente ten unha asíntota vertical, por exemplo en $\pi/2$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan(x)) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

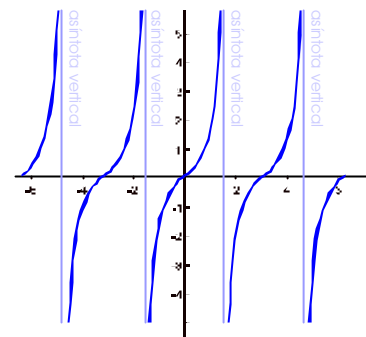
Propiedades:

Tanxente dunha suma:

$$\tan(A + B) = \frac{\tan(A) + \tan(B)}{1 - \tan(A)\tan(B)}$$

Tanxente dunha diferenza:

$$\tan(A - B) = \frac{\tan(A) - \tan(B)}{1 + \tan(A)\tan(B)}$$



Funcións exponenciais

En moitos fenómenos reais atopámonos con funcións que aumentan ou diminúen proporcionalmente ós seus valores. Por exemplo a poboación, a desintegración radiactiva, o interese composto, a inflación, etcétera.

Problema: Chámase período de semidesintegración dunha substancia radiactiva ó tempo que tarda en reducirse a metade unha certa cantidade desa substancia. O período de semidesintegración é unha característica de cada substancia radiactiva así, por exemplo, o período de semidesintegración do C_{14} é de 5570 anos.

Medindo o contido de C_{14} que conserve un fósil podemos saber a súa antigüidade, pois mentres o organismo estaba vivo, recuperaba o C_{14} que se perdía por desintegración pero ó morrer o C_{14} xa non se renova e vai devecendo pouco a pouco.

Un fósil contiña, cando se formou, 3 g de C_{14}

- Atopa a función que describe o contido de C_{14} do fósil.
- Se na actualidade contén 0'04 g de C_{14} ¿Cal é a súa idade?

Solución: a) Sabemos que cada 5570 anos a cantidade de C_{14} redúcese a metade. Podemos construír unha táboa con algúns valores desa función. Consideramos cada unidade de tempo como un período de semidesintegración.

Ese tipo de funcións coa variable independente no expoñente reciben o nome de funcións exponenciais.

b) A idade será o tempo que tarda a función que describe a cantidade de C_{14} en acadar o valor 0'04:

$$3\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0'04 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0'0133$$

Como non coñecemos a operación inversa a “elevar a x”, non podemos despxear a x nesa ecuación. Si podemos buscar unha solución aproximada coa axuda dunha calculadora:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0'063 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 0'0039 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0'015 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 0'007 \rightarrow x \approx 6$$

Tempo en períodos	C_{14}
0	3
1	$3 \cdot \frac{1}{2} = 1'5$
2	$1'5 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$
x	$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Tempo en anos	C_{14}
0	3
5570	$3 \cdot \frac{1}{2} = 1'5$
11140	$1'5 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$
x	$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5570}}$

O fósil ten unha antigüidade aproximada de $6 \cdot 5570 = 33420$ anos.

Se consideras anos como unidade de tempo, a función será soamente un pouco máis complicada.

Sempre que a variación da función sexa proporcional o seu valor, como sucede no problema anterior, tratarase dunha función exponencial: $f(x) = k \cdot a^{bx}$. ($a > 0$)

Características:

- O dominio dunha función exponencial é todo $\mathbb{R}$.
- Son crecentes (se $a^b > 1$) ou decrecentes (se $a^b < 1$).
- Non teñen extremos.
- O eixe X é unha asíntota horizontal.
- Se dividimos valores dunha función exponencial correspondentes a valores de x cunha separación constante s, o resultado tamén é constante:

$$f(x) \text{ exponencial} \Rightarrow \frac{f(x+s)}{f(x)} = \text{cte}, \text{ calquera que sexa } x$$

Demostración:

$$\frac{f(x+s)}{f(x)} = \frac{k \cdot a^{b(x+s)}}{k \cdot a^{bx}} = \frac{a^{b(x+s)}}{a^{bx}} = a^{bx+bs-bx} = a^{bs} = \text{cte}$$

Esta propiedade permite determinar se unha serie de valores dunha función corresponden a unha función exponencial.

Exemplo: O número estimado de pitas do monte en Galicia en diferentes anos foi:

anos	0 (1990)	1	2	3	4
pitas	1024	768	576	432	324

Estudia se o número de pitas do monte ven dado por unha función exponencial e, en caso afirmativo, atopa a súa fórmula.

Solución: Dividimos os valores da función correspondentes a valores de x tomados de 5 en 5.

$$\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{768}{1024} = 0'75 \quad \frac{f(2)}{f(1)} = \frac{576}{768} = 0'75 \quad \frac{f(3)}{f(2)} = \frac{432}{576} = 0'75 \quad \frac{f(4)}{f(3)} = \frac{324}{432} = 0'75$$

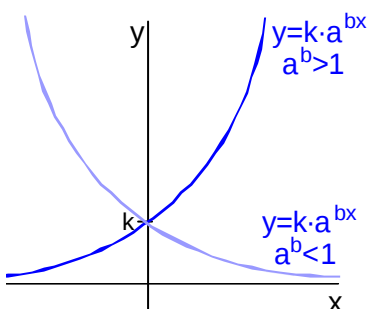
función é exponencial, a súa fórmula é: $f(x) = 1024 \cdot 0'75^x$

Se tomásemos os datos de, por exemplo, 2 en 2, teriamos:

$$\frac{f(2)}{f(0)} = \frac{576}{1024} = 0'5625 \quad \frac{f(4)}{f(2)} = \frac{324}{576} = 0'5625 \quad \frac{f(3)}{f(1)} = \frac{432}{768} = 0'5625$$

A fórmula sería: $f(x) = 1024 \cdot 0'5625^{\frac{x}{2}}$ onde $0'5625^{\frac{1}{2}} = 0'75$

- Podemos escribir a fórmula dunha función exponencial con calquera base maior de 0 pero a base máis *natural* é un número irracional $e = 2'71828182845...$ (cando o expoñente é complicado, as potencias dese número poden calcularse aproximando os seus valores mediante sucesións sinxelas). Ademais, a función exponencial de base o número e ten a derivada máis sinxela das funcións exponenciais, a propia función $(e^x)' = e^x$ (é a única función que coincide coa súa función derivada).



Chamamos exponenciais estándar as que teñen base o número e : $f(x)=k \cdot e^{ax}$.

Exemplo: No exemplo anterior, a fórmula da función en forma estándar sería:

$$f(x) = 1024 \cdot 0'5625^{\frac{x}{2}} = 1024 \cdot e^{-0'2877x}$$

Funcións logarítmicas

Son as funcións inversas das exponenciais e defínense a partir delas: $\log_a(M) = m \Leftrightarrow a^m = M \quad (a > 0) \leftarrow$ o logaritmo é o expoñente

Historicamente foron utilizadas para realizar facilmente operacións complicadas (potencias, raíces, produtos e cocientes) pero, despois da xeneralización do uso da calculadora, solo se utilizan para a resolución de ecuacións exponenciais e para describir algúns fenómenos físicos (crecemento dos seres vivos por exemplo).

Utilízanse logaritmos en base o número e (logaritmos neperianos ou naturais), $\ln$, e logaritmos en base 10, $\log$.

Características:

- O dominio das funcións logarítmicas son os números estritamente positivos (maiores ca 0), e teñen unha asíntota vertical en $x=0$.
- Son estritamente crecentes se a base é maior que 1, ou decrecentes se é menor.
- A súa gráfica é simétrica en relación a recta $y=x$ da correspondente á exponencial da mesma base.

Propiedades: Ó ser a función inversa da exponencial, o logaritmo herda moitas das propiedades das potencias:

Logaritmo de 1, en calquera base, 0: $\log_a(1) = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$

Logaritmo dun produto, é a suma dos logaritmos dos factores:

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a(M) + \log_a(N)$$

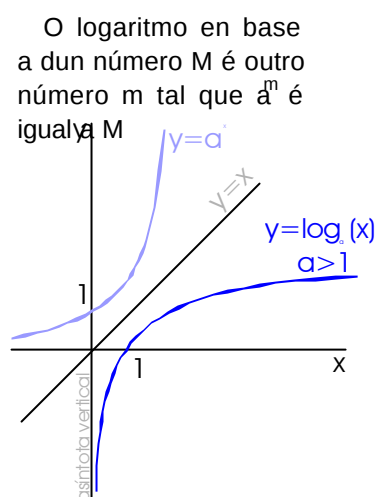
$$\text{Demostración: } \left. \begin{array}{l} m = \log_a(M) \Leftrightarrow a^m = M \\ n = \log_a(N) \Leftrightarrow a^n = N \end{array} \right\} M \cdot N = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Dado que o logaritmo en base a dun número é o expoñente ó que debemos elevar a para obter ese número, resulta:

$$\log_a(M \cdot N) = m + n$$

Logaritmo dun cociente, é o logaritmo do numerador menos o logaritmo do denominador.

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a(M) - \log_a(N)$$



Demostración:
$$\left. \begin{array}{l} m = \log_a(M) \Leftrightarrow a^m = M \\ n = \log_a(N) \Leftrightarrow a^n = N \end{array} \right\} \frac{M}{N} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Polo tanto: $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = m - n = \log_a(M) - \log_a(N)$

Logaritmo dunha potencia, é o expoñente polo logaritmo da base.

$$\log_a(M^r) = r \cdot \log_a(M)$$

Demostración: $m = \log_a(M) \Leftrightarrow a^m = M \rightarrow M^r = (a^m)^r = a^{mr} \Leftrightarrow a^{mr} = M^r$

Polo tanto: $\log_a(M^r) = r \cdot m = r \cdot \log_a(M)$

Exemplo: Determinar a idade do fósil do problema anterior. Atopar a fórmula estándar da función que describe o contido de C_{14} segundo o tempo.

Solución: Empregaremos logaritmos neperianos (base e). Debemos resolver a

ecuación: $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.0133$

$$\ln\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right] = \ln(0.0133) \xrightarrow{\text{propiedade 3}} x \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(0.0133)$$

$$x \cdot [\ln(1) - \ln(2)] = \ln(0.0133) \rightarrow x = \frac{\ln(0.0133)}{-\ln(2)} = 6.2324 \text{ períodos}$$

Polo tanto, a idade do fósil será: $6.2324 \cdot 5570 = 34714$ anos

Para atopar a fórmula estándar poñemos $\frac{1}{2}$ en forma de potencia de e:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0.6931 \Leftrightarrow e^{-0.6931} = \frac{1}{2} \rightarrow f(x) = 3 \cdot (e^{-0.6931})^x = 3 \cdot e^{-0.6931x} \quad \text{onde } x \text{ o}$$

tempo está en períodos de semidesintegración e $f(x)$ en gramos.

Derivadas das funcións elementais

DERIVADAS ELEMENTAIS		
función	derivada	regra
$\sin(x)$	$\cos(x)$	A derivada do seno de x é o coseno de x
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	A derivada do coseno de x é menos seno de x
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	Derivada da tanxente é o inverso do coseno ó cadrado ou tamén 1 máis a tanxente ó cadrado
e^x	e^x	A derivada da exponencial en base e é ela mesma
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$	Derivada da exponencial en base a é ela mesma multiplicada polo logaritmo neperiano da base
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	A derivada do logaritmo neperiano de x é 1 partido por x

En moitas ocasións, en lugar de x aparece unha función u , neses casos as derivadas son:

DERIVADAS ELEMENTAIS	
función	derivada
$\sin(u)$	$\cos(u) \cdot u'$
$\cos(u)$	$-\sin(u) \cdot u'$
$\tan(u)$	$\frac{u'}{\cos^2(u)} = [1 + \tan^2(u)] \cdot u'$
e^u	$e^u \cdot u'$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$

Funcións paramétricas

Ó representar graficamente unha función obtemos unha curva do tipo $y=f(x)$ (a segunda coordenada dos puntos da curva obtense substituíndo a primeira na fórmula da función).

Exemplo: Lanzamos un obxecto cun ángulo de 60° en relación á horizontal e cunha velocidade inicial de 20 m/s. Supoñendo que o obxecto só se ve afectado pola gravidade, atopa a función que describe altura segundo o tempo e debuxar a gráfica desa función. ¿Cal é a súa traxectoria?

Solución: No relativo á altura, trátase dun movemento uniformemente decelerado pero debemos calcular a compoñente vertical da velocidade inicial:

$$v_y = 20 \cdot \sin(60) = 17'3 \text{ m/s}$$

A altura segundo o tempo virá dada pola función:

$$h(t) = 17'3t - \frac{1}{2}9'8 \cdot t^2 = 17'3t - 4'9t^2$$

A gráfica desa función é unha parábola concava hacia abaixo cun máximo en

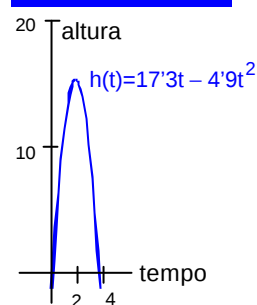
$$t = \frac{17'3}{9'8} = 1'77 \text{ s}$$

A pesar do que poda parecer, esa gráfica non describe a traxectoria seguida polo obxecto senón só como variou a altura segundo o tempo. Para obter a traxectoria necesitamos outra función que describa a 1ª coordenada do obxecto segundo o tempo. Dado que a gravidade non ten compoñente horizontal, a compoñente horizontal do movemento é uniforme con velocidade:

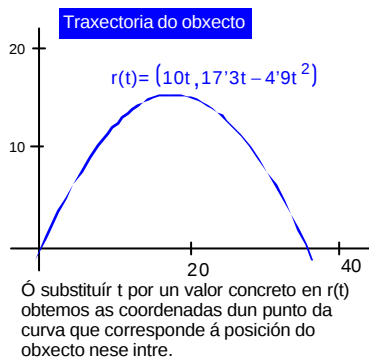
$$v_x = 20 \cdot \cos(60) = 10 \text{ m/s}$$

A posición segundo o tempo (traxectoria) ven dada polas funcións:

Gráfica altura/tempo



Fíxate que no eixe X está representado o tempo e non a posición.



$$\left. \begin{aligned} x(t) &= 10t \\ y(t) &= 17.3t - 4.9t^2 \end{aligned} \right\} \text{Posición segundo o tempo.}$$

En moitas ocasións, como na traxectoria do obxecto anterior, resultan necesario describir as coordenadas dos puntos dunha curva mediante dúas funcións dunha mesma variable (as ecuacións paramétricas dunha recta son un caso particular).

Podemos considerar un novo tipo de función que, a cada valor da variable, faille corresponder as coordenadas dun punto do plano:

$$r(t) = (x(t), y(t))$$

Ese tipo de funcións reciben o nome de **paramétricas**.

Podemos definir a derivada dunha función paramétrica de xeito semellante á dunha función real:

$$r'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x(t+h), y(t+h)) - (x(t), y(t))}{h}$$

Lembra que podemos interpretar as coordenadas dun punto como as compoñentes do vector que vai da orixe a ese punto, polo que obtemos:

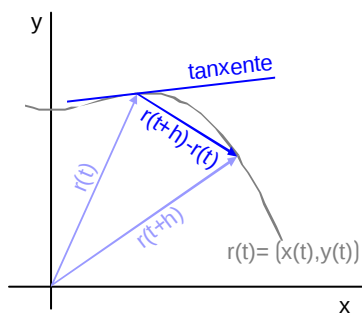
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right) = (x'(t), y'(t))$$

A derivada dunha función paramétrica é un vector:

Dirección: tanxente á gráfica da función no punto.

Módulo: medida da variación do punto ó longo da curva en relación á variación de t nese punto.

Se a función paramétrica describe a posición dun móbil segundo o tempo, a súa derivada nun punto é o vector velocidade nese punto.



Cando h tende a 0, a dirección do vector $r(t+h) - r(t)$ tende a dirección da tanxente.

Exercicio: Atopa a función paramétrica que describe a posición dun satélite en órbita circular a unha distancia de 900 km da superficie da Terra e que completa unha órbita cada 12 horas (podes supoñer que para $t=0$ atopabase no eixe X).

Calcula fórmula do vector velocidade nun intre calquera da órbita dese satélite e demostra que o seu módulo é constante ó longo de toda a traxectoria.

Funcións elementais

Unha función é elemental cando ven descrita por unha fórmula simple.
Son continuas e derivables en tódolos puntos do seu dominio.

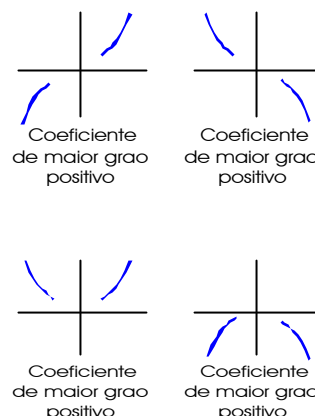
Funcións polinómicas

- Teñen por fórmula un polinomio.
- O dominio é todo $\mathbb{R}$
- Non teñen asíntotas de ningún tipo.

Gráfica: Depende do grao.

Impar: As puntas da gráfica tenden a $\pm\infty$ pero con signos diferentes.

Par: As puntas tenden a $\pm\infty$ pero, neste caso, as dúas puntas co mesmo signo.



Grao 0, $y=a$ (constantes): A gráfica é unha recta horizontal que corta ó eixe Y no punto $(0,a)$.

Grao 1, $y=ax+b$: Gráfica unha recta crecente, $a>0$, ou decrecente, $a<0$.

O coeficiente a determina a inclinación da gráfica e o b a ordenada na orixe.

Interpolación e extrapolación: Aproximar unha función cunha función de grao 1.

Grao 2, $f(x)=ax^2+bx+c$: A gráfica é unha parábola cóncava hacia arriba, $a>0$, ou é cóncava hacia abaixo se $a<0$.

Grao 3, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$: A gráfica é unha cúbica que pode ter dous extremos relativos (un máximo e un mínimo) ou un punto de inflexión.

Grao maior de 3, $f(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$: Pode ter ata hasta $n-1$ extremos relativos.

Funcións racionais

- Son as funcións que teñen por fórmula un cociente de polinomios.
- As raíces do denominador non pertencen ó dominio.
- Poden ter asíntotas.

Gráficas:

- Grao do numerador menor co do denominador: O eixe X é unha asíntota horizontal.
- Graos iguais, ten unha asíntota horizontal.
- Grao numerador unha unidade maior co denominador: Ten unha asíntota oblicua.

Funcións periódicas

- Funcións que repiten os seus valores de xeito periódico: Seno, coseno, tanxente.
- Radiáns: Unidade para medir ángulos. A medida dun ángulo é a lonxitude do arco que abarca ese ángulo na circunferencia trigonométrica.

Paso de graos a radiáns: $R = \frac{\pi}{180} G$

$G = \frac{180}{\pi} R$

Funcións seno e coseno

- Dominio todo $\mathbb{R}$.
- Os seus valores están comprendidos entre -1 e 1 .
- Teñen período 2π .
- Agás para 1 e -1 , sempre hai dous ángulos entre 0 e 2π cun seno ou un coseno dados.
- Cada unha ten extremos relativos nos puntos onde a outra vale 0 .

Gráficas: Coa mesma forma pero desprazadas.

Propiedades:

Fórmula fundamental da Trigonometría:

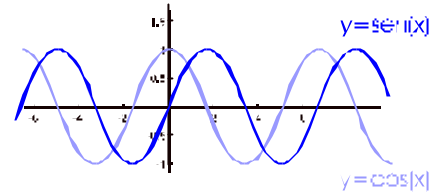
$$\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$$

Coseno dunha diferenza: $\cos(A - B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)$

Coseno dunha suma: $\cos(A + B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$.

Seno dunha suma: $\sin(A + B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$

Seno dunha diferenza: $\sin(A - B) = \sin(A)\cos(B) - \cos(A)\sin(B)$



Función tanxente

- Dominio, tódolos reais agás os que teñen coseno 0:

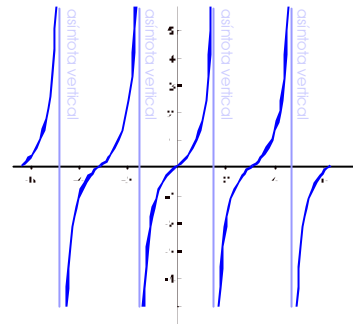
$$-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$$

- Neses puntos a ten unha asíntota vertical.

Propiedades:

Tanxente dunha suma: $\tan(A + B) = \frac{\tan(A) + \tan(B)}{1 - \tan(A)\tan(B)}$

Tanxente dunha diferenza: $\tan(A - B) = \frac{\tan(A) - \tan(B)}{1 + \tan(A)\tan(B)}$

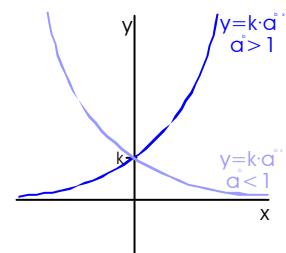


Funcións exponenciais

- Fórmula: $f(x) = k \cdot a^{bx}$ con $a > 0$.
- O dominio dunha función exponencial é todo $\mathbb{R}$.
- Son crecentes (se $a > 1$) ou decrecentes (se $a < 1$).
- Non teñen extremos.
- O eixe X é unha asíntota horizontal.
- Dividindo valores correspondentes a valores de x cunha separación constante s , o resultado tamén é constante:

$$f(x) \text{ exponencial} \Rightarrow \frac{f(x+s)}{f(x)} = \text{cte}, \text{ calquera que sexa } x$$

- Podemos escribir a fórmula dunha función exponencial con calquera base. Chamamos exponenciais estándar as que teñen base o número irracional e : $f(x) = k \cdot e^{ax}$ ($e = 2.71828182845\dots$).



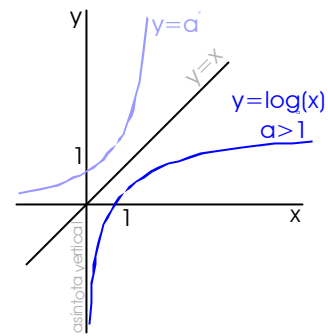
Funcións logarítmicas

- Son as funcións inversas das exponenciais:

$$\log_a(M) = m \Leftrightarrow a^m = M \quad (a > 0)$$

O logaritmo en base a dun número M é outro número m tal que a^m é igual a M .

- Utilízanse logaritmos en base o número e (logaritmos neperianos ou naturais), $\ln$, e logaritmos en base 10, $\log$.
- Dominio: Os números estritamente positivos (maiores ca 0),
- Teñen unha asíntota vertical en $x=0$.
- Son estritamente crecentes se a base é maior que 1, ou decrecentes se é menor.
- A gráfica é simétrica a da exponencial da mesma base en relación a recta $y=x$.



Logaritmo de 1, en calquera base, 0: $\log_a(1) = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$

Logaritmo dun produto, suma dos logaritmos dos factores:

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a(M) + \log_a(N)$$

Logaritmo dun cociente, logaritmo do numerador menos o do denominador.

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a(M) - \log_a(N)$$

Logaritmo dunha potencia, expoñente polo logaritmo da base.

$$\log_a(M^r) = r \cdot \log_a(M)$$

DERIVADAS ELEMENTAIS			
función	derivada	función	derivada
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(u)$	$\cos(u) \cdot u'$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(u)$	$-\sin(u) \cdot u'$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(u)$	$\frac{u'}{\cos^2(u)}$
e^x	e^x	e^u	$e^u \cdot u'$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$

Ampliación

Fenómenos periódicos

Chámanse periódicos ós fenómenos que repiten os seus valores cada certo tempo. Ciclos biolóxicos, sons, temperaturas medias, mareas, horas de luz diarias durante un ano, movementos dos astros, glaciacións, etc. son fenómenos periódicos. Os tempo que tardan os seus valores en repetirse (período) poden ir desde as fraccións de segundo ata os millóns de anos

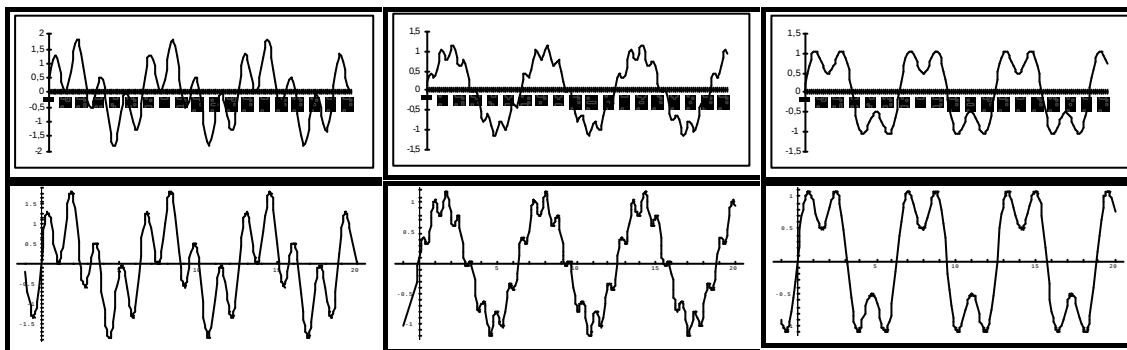
Os fenómenos periódicos sinxelos descríbense utilizando funcións do tipo $f(t)=A \cdot \sin(\omega \cdot t + f_0)$ chamadas funcións de onda.

Actividade: Coa axuda da calculadora gráfica investiga de que xeito inflúen os valores de a, b e c nas gráficas das funcións do tipo: $f(t)=A \cdot \sin(\omega \cdot t + f_0)$ (Podes empezar pola máis sinxelas: $A=1$, $\omega=1$ e $f_0=0$. Logo cambias A, logo ω , logo f_0 e finalmente combinalos).

O son

Os sons son fenómenos periódicos producidos pola vibración dun obxecto (unha lámina metálica, o ar ó saír por un orificio, as cordas vocais, etc). Esa vibración transmítese ás moléculas do ar que experimentan un movemento horizontal adiante e atrás producindo compresións e depresións, algo semellante as ondas producidas nun estanque ó lanzar unha pedra, coa salvedade de que nestas últimas o movemento das moléculas de auga é en vertical.

Podemos visualizar ese movemento das moléculas que producen os sons coa axuda dun micrófono e un osciloscopio: O micrófono transforma o son producido pola voz en corrente eléctrica e o osciloscopio permítenos visualizar as variacións desa corrente.

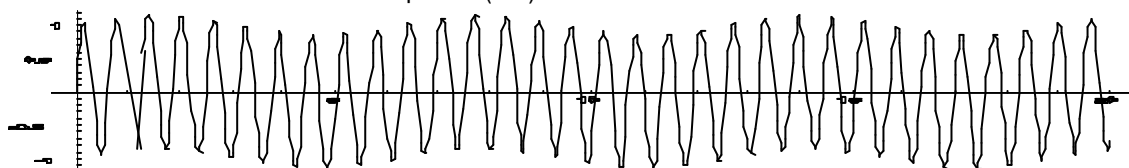


Observamos que a amplitude corresponde coa intensidade e a frecuencia co ton utilizado.

Os sons que corresponden a una onda máis simple son os das vocais, en especial as pechadas: un "iiii..." cerrado vémosto no osciloscopio como una onda sinusoidal simple mentres que a forma dun "aaaaa..." corresponde a unha suma de dúas funcións onda.

Tamén se poden obter sons puros soplando nunha botella con auga, variando a altura da auga conseguimos variar a frecuencia do son.

Una onda curiosa obtense ó asubiar diante do micrófono, pois a súa frecuencia é moito máis alta ca da voz e ademais pode apreciarse claramente a existencia dunha onda portadora similar á da emisión de ondas de radio de Modulación de Amplitude (AM).



Exercícios e actividades

- 1 Debuxa as gráficas das seguintes funcións estudiando o crecemento, extremos, curvatura, puntos de inflexión:

a) $f(x) = -2x + 4$

b) $g(x) = \frac{1}{2}x - 4$

b) $h(x) = -x^2 + 5x + 6$

c) $j(x) = 2x^2 - 8x$

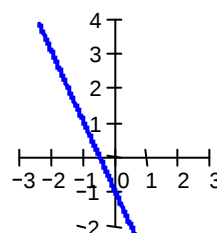
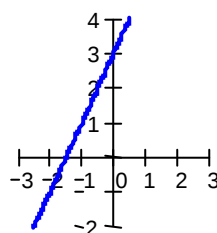
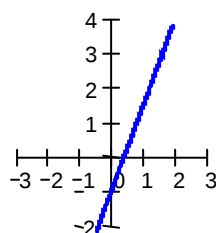
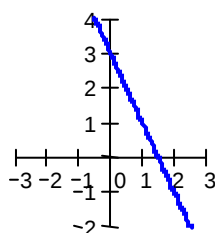
- 2 Sen facer operacións, descubre e explica cal é a gráfica que corresponde a cada fórmula:

a) $f(x) = 2x + 4$

b) $g(x) = 2x - 1$

b) $h(x) = -2x + 4$

c) $j(x) = -2x - 1$



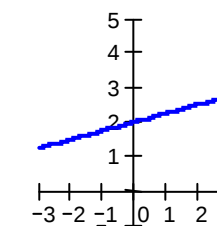
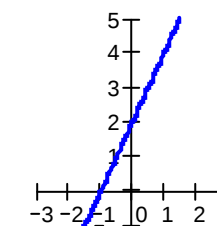
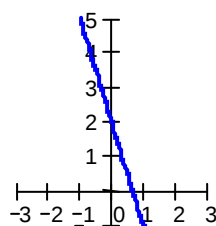
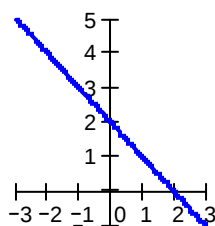
- 3 Sen facer operacións, descubre e explica cal é a gráfica que corresponde a cada fórmula:

a) $f(x) = -x + 2$

b) $g(x) = 0.25x + 2$

b) $h(x) = 2x + 2$

c) $j(x) = -3x + 2$



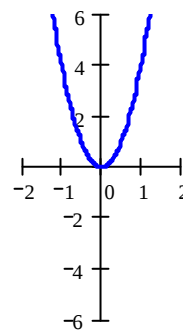
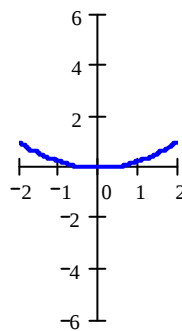
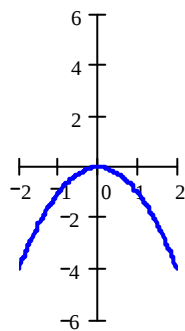
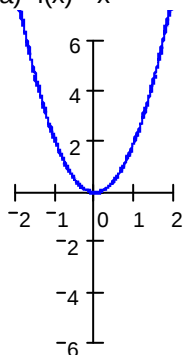
- 4 Sen facer operacións, descubre e explica cal é a gráfica que corresponde a cada fórmula:

a) $f(x) = -x^2$

b) $g(x) = 0.25x^2$

b) $h(x) = 2x^2$

c) $j(x) = 4x^2$



- 5 Debuxa as gráficas das seguintes funcións:

a) $f(x) = 6x - x^3$

b) $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

c) $h(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

- 6 Fai a súa gráfica das seguintes funcións estudiando crecemento, extremos, curvatura e puntos de inflexión.

a) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$

b) $g(x) = x^4 - 3x^3$

c) $h(x) = (x - 2)^4$

- 7 Debuxa a gráfica das seguintes funcións estudiando o crecemento, extremos e asíntotas:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $g(x) = \frac{4x + 3}{x - 2}$

c) $g(x) = \frac{-1}{x - 3}$

- 8 Debuxa a gráfica das seguintes funcións estudiando o crecemento, extremos e asíntotas:

$$a) f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

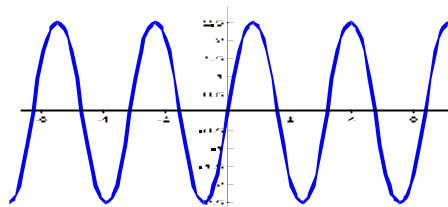
$$b) g(x) = \frac{4x + 3}{x^2 - 1}$$

$$c) g(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$$

- 9** Un satélite ten unha órbita circular a 100 quilómetros de altura sobre a superficie. Se describe unha órbita completa en 3 horas, atopa as funcións que describen as coordenadas da posición do satélite en relación a uns eixes centrados no centro da Terra supoñendo que no intre $t=0$ atópase sobre a parte positiva do eixe X (radio da Terra 6371 km).

- 10** Atopa a fórmula da función correspondente á gráfica da figura sabendo é sinusoidal do tipo $f(x)=a \cdot \sin(bx+c)$.

Esa función tamén pode considerarse do tipo $f(x)=a \cdot \cos(bx+c)$. ¿Cal é a súa fórmula neste caso?



- 11** Ó estudar a luminosidade dunha estrela variable médironse os valores que aparecen na táboa. Supoñendo que a luminosidade da estrela ven dada por unha función do tipo $L(x)=a \sin(bx)+c$ (a , b e c constantes, x o tempo e $L(x)$ a luminosidade), pídese:

Tempo (días)	0	1	2	3
Luminosidade	-3	-4	-5	-4

- Calcula os valores de a , b e c .
- ¿Cal será o máximo de luminosidade e cando volverá a alcanzalo?
- ¿Cal é o período da variación? (tempo que tardan en repetirse os valores).

- 12** O nivel de proxesterona (unha hormona que controla o ciclo menstrual) no sangue dunha muller ven dado pola seguinte función:

$$p(t) = 10 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{14}t + \frac{15\pi}{14}\right) + 11, \quad t \text{ en días e } p(t) \text{ p.p.m. de proxesterona en sangüe}$$

- ¿Cal é o nivel máximo de proxesterona e cando se alcanza?
- ¿Cal é o nivel mínimo e en que días se alcanza?
- ¿Canto dura o ciclo completo?
- Sabendo que a menstruación prodúcese cando o nivel de proxesterona pasa de 8.77 p.p.m. a 1.99 p.p.m. ¿En que días se produce?
- Tendo en conta que a ovulación prodúcese cando a proxesterona chega a 13.2 p.p.m. ¿En que día se produce?
- A muller non acostuma a ser fértil cando o nivel de proxesterona é superior a 18.8 p.p.m. ¿En que días sucede eso?

- 13** En Mont Saint Michel (na Bretaña) o nivel da marea ven dado pola función:

$$N(t)=8'05 \cdot \cos(0'55t+3'14), \quad t \text{ en horas, } N(t) \text{ en metros.}$$

- ¿Cantos metros varia o nivel do mar nese lugar?
- ¿Cal é o período desa función?
- ¿A que horas a marea está chea?

- 14** Unha cepa bacteriana reprodúcese por bipartición cada 50 minutos. Atopa a fórmula da función que describe a cantidade de bacterias dun cultivo de 5000 bacterias segundo o tempo.

- 15** O plutonio Pu_{239} , cun período de semidesintegración de 24360 anos, é unha das substancias máis perigosas que existen (calculase que inhalar un nanogramo 10^{-9} g- pode producir cancro). Nun bidón de residuos dunha central nuclear hai 10 gr de Pu_{239} . Atopa a fórmula

da función que describe a cantidade de plutonio segundo o tempo e calcula canto tardarán en deixar de ser perigosos eses residuos (conter menos de un nanogramo).

- 16** Nos anos 60 a balea azul estivo a piques de ser extinguida pola caza abusiva. Na táboa aparecen o número de exemplares de balea azul rexistrados en diferentes anos.

Anos	0	2	4	6	8
Casos	6250	5000	4000	3200	2560

- a) ¿Podemos considerar exponencial a función que describe a poboación de baleas azuis segundo o tempo? En caso afirmativo atopa a súa fórmula.
- b) Supoñendo que a evolución da poboación de baleas sega do mesmo xeito (cousa que non acontece na realidade), ¿canto tardaría en desaparecer a especie?
- 17** A pesar dos esforzos da OMS, o número de casos de SIDA no mundo segue aumentando, en especial nos países do terceiro mundo. Calcúlase que na actualidade hai uns 20 millóns de seropositivos que aumentan un 3% cada ano.
- a) Constrúe unha táboa co número de seropositivos nos próximos 2 anos e atopa a fórmula da función correspondente.
- b) Calcula a fórmula desa función en forma estándar.
- c) ¿Cantos seropositivos haberá no ano 2010 de seguir a tendencia actual?
- d) ¿Canto se tardará en acadar os 40 millóns de seropositivos de seguir a tendencia actual?

- 18** Un labrego ten maquinaria por valor de 10 millóns de pesetas. Calcula que, cada ano, a maquinaria perde un 10% do seu valor en relación ó ano anterior. Pídese:

- a) Atopa a fórmula da función que describe o valor da maquinaria segundo o tempo.
- b) Calcula a variación media anual desa función nos próximos tres anos.
- c) ¿Canto tardará en reducirse a carta parte o valor da maquinaria?

- 19** Escribe, en función das funcións trigonométricas de A, as expresións:

- a) $\sin(2A)$ b) $\sin(3A)$ c) $\cos(2A)$ d) $\tan(2A)$

- 20** Calcula tódolos ángulos entre 0 e 2π que verifiquen as ecuacións trigonométricas:

- a) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ b) $\tan(x) = 2$ c) $\sin(x) = 2\cos(x)$

- 21** Calcula x nas seguintes ecuacións:

- a) $\cos(2x + \pi) = \frac{1}{2}$ b) $\tan(x) + \cos(2x) = \frac{1}{2}$ c) $\sin(x) + \cos(2x) = 1$

- 22** Sabendo que $\log_3(4) = 1,262$, calcula x nas seguintes:

- a) $x = \log_3(36)$ b) $x = \log_3(2)$ c) $x = \log_3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ d) $x = 3^{\log_3(4)}$

- 23** Resolve as seguintes ecuacións e sistemas:

- a) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 22$, b) $5^x = 390625$ c) $\log(x) + \log(50) = \log(1000)$

- d) $\begin{cases} 2\log(x) - 3\log(y) = 7 \\ \log(x) + \log(y) = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12\sqrt{2} \\ 2^{x+y} = 64 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3^x + 4^y = 25 \\ 3^{3x-2} - 4^{2y-1} = 17 \end{cases}$

24 Sabendo que $\log_2(5)=2'322$, calcula x nas seguintes ecuacións:

a) $x = \log_2(125)$ b) $x = \log_2\left(\frac{\sqrt[3]{25}}{10}\right)$ c) $x = \log_2(40 \cdot \sqrt{8})$ d) $2^{3x-1} = \sqrt[4]{2}$

25 Resolve as seguintes ecuacións: a) 3^{2x-5} b) $\log(x) - \log(22 - x) = 1$

26 Aplicando as propiedades dos logaritmos, di canto valen as seguintes expresións en función dos logaritmos de a e b:

a) $\text{Ln}(a \cdot b^3)$ b) $\text{Ln}\left(\frac{a}{b^2}\right)$ c) $\text{Ln} \sqrt[3]{a \cdot b}$

27 Dadas as seguintes funcións:

$y = \text{sen}(x)$ $y = \text{sen}^2(x)$ $y = \text{sen}^3(x)$ $y = \text{sen}^4(x)$

- a) Atopa a súa función derivada.
b) ¿Cal será a función derivada de $\text{sen}^9(x)$?

28 Demostra que a derivada da función $\tan(x)$ é $1+\tan^2(x)$.

29 Calcula x nas seguintes ecuacións:

a) $2^{3x-1} = \sqrt[4]{2}$ b) $\cos(x) = \frac{5}{2}$ c) $3^{-2-x^2} = \frac{1}{27}$
d) $x = \log_9\left(\frac{1}{3}\right)$ e) $\text{sen}(x) = \frac{1}{2}$ f) x é un máximo da función $f(x)=x^3-12x$
g) $\text{sen}^2(x)-\cos^2(x)=1$ h) $\log_x(125) = 3$ i) $\tan(x)=\text{sen}(x)$

Problema: Sabemos que a gráfica dunha función polinómica de grao dous é unha parábola e que a súa curvatura (cóncava hacia arriba ou hacia abaixo) depende do signo do coeficiente do termo de grao 2. Estudia como pode ser a gráfica dunha función polinómica de grao 3 e de que depende o tipo de gráfica.

Problema: Demostra que as funcións polinómicas de grao 3 sempre ten un punto de inflexión.