

Unidade 9: Números complexos

1. Concepto de número complexo.
2. Operacións con números complexos.
 - 2.1. Suma de números complexos.
 - 2.2. Produto de números complexos.
3. Representación gráfica de números complexos
4. Números complexos en forma polar.
 - 4.1. Paso da forma binómica á polar
 - 4.2. Paso da forma polar a binómica
5. Operacións con números complexos en forma polar
6. Raíces de números complexos.

Introducción

A invención dos números

A invención dos números e os sistemas de numeración foi un proceso que se desenvolveu paralelamente á invención da linguaxe.

Moi probablemente, os primeiros homes empezaron por inventar “nomes” para as cousas e animais que necesitaban ou que temían, tal como sigue acontecendo cos nenos ó empezar a falar.

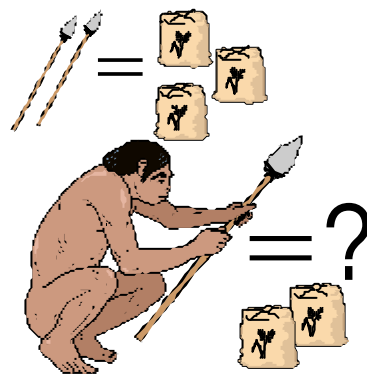
Os conceptos abstractos, coma os números, tiveron que ser froito dun proceso moito máis complexo. Do que acontece coas culturas primitivas que sobreviven na actualidade, podemos deducir que os números empezaron como partículas que se engadían ós substantivos para indicar de cantos se trataba (algo semellante a **bicicleta**, **triángulo**).

Os naturais

Só moito máis adiante os nosos antecesores deberon ser capaces de separar o que tiñan en común tódolos *bi-* (*bicabalos*, *biarbres*, *bileóns*, *bihomes*,) dos obxectos concretos e manexar a idea abstracta de número (o *número dous* neste caso) **inventando** unha palabra para nomealo. Así foron nacemento os números naturais.

Os racionais

Co desenvolvemento da cultura e do comercio, os números naturais xa non podían cubrir tódalas necesidades: Se tres ferrados de millo intercámbianse por dúas lanzas de pedernal, ¿a canto millo equivale unha lanza?, o ancho dunha leira é de tres varas e un carto, etcétera. O ser humano tivo que inventa-las fraccións e aprender a facer operacións con elas.



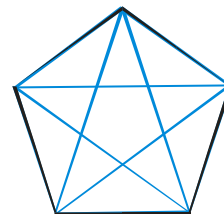
Os irracionais

Na Grecia Clásica dábaselle un enorme valor ós números naturais. Eran sinxelos de manexar e comprender pero, a pesares da súa simplicidade, tódalas cantidades e medidas podía representarse con números naturais ou cocientes de números naturais (ou eso era o que eles pensaron durante algún tempo). Chegaron a construír unha especie de mística ó redor deses números.

As cousas cambiaron cando descubriron que algúns números como o número áureo ou a medida da diagonal dun cadrado de lado 1 non podían poñerse en forma de cocientes de números naturais. Eran os irracionais.

O descubrimento dos irracionais ocasionou unha enorme frustración que desencadeou que o interese “filosófico” dos gregos polas Matemáticas se dirixise á Xeometría, quedando relegada a Aritmética ós asuntos da vida cotiá.

Problema: O manexo das fraccións non sempre foi tan doado coma na actualidade, a primeira dificultade era escribilas. No antigo Exipto utilizaban para os números naturais unha notación semellante á romana e as fraccións escribíanas coma suma de inversos de números naturais (por exemplo, $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$). O manexo das fraccións naquela época era tan complexo que só o coñecían os *escribidores*. Ata nos chegou un dos “libros de texto” que utilizaban: O papiro de Ames. Nel descríbese, entre outros problemas, como escribir $10/12$ como suma de inversos de números naturais, *¿Es quen de facelo? ¿De cantos xeitos diferentes se pode facer?*



A estrela de 5 puntas era o emblema dos pitagóricos e o símbolo da perfección.

A relación entre o seu lado e o do pentágono é o número áureo:

$$\phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1.61803...$$

Ecuacións e solucións.

Durante séculos, unha das principais ocupacións dos matemáticos foi a procura de métodos para resolver ecuacións de tipo polinómico: $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$

No século XVI o matemático Cardano, inspirándose¹ nos traballos do seu contemporáneo Tartaglia, proporcionou un método para resolver ecuacións de grao 3 transformándoas en cuadráticas.

Vexámolo cun exemplo: $x^3 + 6x = 19$

Cardano chama $x=u-v$ (hai infinitas posibilidades para u e v).

$$(u - v)^3 + 6(u - v) = 19 \rightarrow u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 + 6u - 6v = 19$$

Cando $u=v=2$ a nova ecuación simplifícase enormemente: $u^3 - v^3 = 19$

$$\text{E, sendo } u=v=2: \quad v = \frac{2}{u} \rightarrow u^3 - \left(\frac{2}{u}\right)^3 = 19 \rightarrow (u^3)^2 - 19u^3 - 8 = 0$$

Chamando $z=u^3$ obtemos unha nova ecuación: $z^2 - 19z - 8 = 0$ que é de segundo grao. Aplicando a fórmula xa coñecida obtemos as solucións:

$$z = \frac{19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 19.4121 \\ -0.4121 \end{cases} \quad u = \sqrt[3]{z} = \begin{cases} \sqrt[3]{19.4121} \\ \sqrt[3]{-0.4121} \end{cases}$$

¹ Tartaglia comunicoulle a Cardano a idea para a resolución das ecuacións cúbicas e fíxolle prometer que non a revelaría, xuramento que non respectou Cardano, o que deu orixe a un interminable debate de a quen se lle debe atribuír o descubrimento.

De todos xeitos, todo parece indicar que a idea tampouco era orixinal de Tartaglia, senón dun profesor de matemáticas case descoñecido: Scipione del Ferro.

$$v = \sqrt[3]{u^3 - 19} = \begin{cases} \sqrt[3]{19'4121 - 19} = 0'744 \\ \sqrt[3]{-0'4121 - 19} = -2'688 \end{cases} \quad x = u - v = \begin{cases} 2'688 - 0'744 = 1'944 \\ -0'744 - (-2'688) = 1'944 \end{cases}$$

Para as ecuacións como $x^3 - 15x = 4$ facía o cambio: $x = u + v$:

$$x^3 - 15x = 4 \rightarrow (u + v)^3 - 15(u + v) = 4 \rightarrow u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 15u - 15v = 4$$

$$\text{Cando } u = v: u^3 + v^3 = 4 \rightarrow u^3 + \left(\frac{5}{u}\right)^3 = 4 \rightarrow (u^3)^2 - 4u^3 + 125 = 0$$

$$\text{Chamando } z = u^3: z^2 - 4z + 125 = 0 \rightarrow z = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 500}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-484}}{2}$$

¿Qué significaba $\sqrt{-484}$ se sabían que os negativos non teñen raíz cadrada?

E, sen embargo, era evidente que a ecuación tiña solución pois, por simple tanteo, obtense $x = 4$: $4^3 - 15 \cdot 4 = 4$, o que introduce a reflexión de pensar en concederlle algún tipo de validez ás raíces cadradas dos negativos; ¿pero como facelo?

Complexos

Historia e Matemáticas

As Matemáticas agrupan ós números polas súas propiedades, mentres que a evolución histórica da idea de número seguiu un camiño diferente.

Historicamente

A necesidade de contar levou a invención dos números naturais.

Ó medir non sempre se obteñen valores enteiros, polo que foi necesario inventa-las fraccións.

As fraccións non cobren tódalas medidas, en moitas ocasións o valor é un número irracional.

Coa chegada dos árabes, que trouxeron a Occidente os coñecementos da China e da India, aparecen os negativos e o 0.

Matematicamente:

Naturais N (incluíndo o 0): Permiten contar, sumar e multiplicar pero a resta non sempre é posible ou, o que é o mesmo, as ecuacións do tipo $a+x=b$ poden non ter solución:

$$5 + x = 2 \rightarrow x = 2 - 5 = ? \text{ Non ten solución en N}$$

Enteiros Z: Tódolos números teñen oposto para a suma, xa é posible a resta pero non así a división. Algunhas ecuacións do tipo $ax+b=c$ non teñen solución:

$$5 + 4x = 2 \rightarrow 4x = -3 \rightarrow x = \frac{-3}{4} = ? \text{ Sen solución en Z}$$

Racionais Q (fraccións de números enteiros): Pódese dividir sempre, agás entre 0. Os números racionais represéntanse sobre unha recta e calquera intervalo da recta contén números racionais pero non tódolos puntos da recta corresponden a números racionais.

As ecuacións polinómicas de grao 1 sempre teñen solución en Q pero as de grao maior ca 1 poden non tela (Q non é alxebricamente pechado):

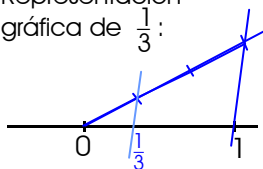
$$2x + 3 = -8 \rightarrow x = -\frac{11}{2} \in Q$$

$$x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} = ? \text{ Non ten solución en Q}$$

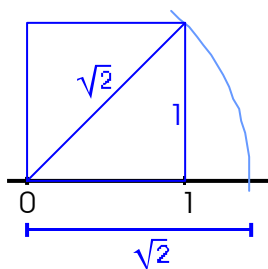
Reais R: Cobren completamente a recta, cada punto da recta corresponde a un número real.

R tampouco é alxebricamente pechado, as ecuacións

Representación gráfica de $\frac{1}{3}$:



$\sqrt{2}$ é un punto da recta pero non é racional:



polinómicas non sempre teñen solución nos números reais:

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \text{ Non ten solución en } \mathbb{R}.$$

Números complexos

Hai moitas ecuacións de segundo grao que non teñen solución dentro dos números reais:

A ecuación $x^2 - 2x + 5 = 0$ non ten solución en $\mathbb{R}$:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

A ecuación non ten solución porque en $\mathbb{R}$ non existe a raíz cadrada dos números negativos.

Para que tódalas ecuacións alxébricas, en especial as de segundo grao teñan solución debemos ampliar o conxunto dos números reais cos correspondentes as solucións desas ecuación.

Vexamos como teñen que ser eses números:

$$\frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{-1}$$

As solucións dunha ecuación de segundo grao son números da forma $a + b\sqrt{-1}$ (a e b reais).

Para que tódalas ecuacións teñan solución temos que considerar a $\sqrt{-1}$ como unha expresión válida que, dado que non ten sentido nos números reais, chamaremos unidade imaxinaria: $i = \sqrt{-1}$.

Con dous números reais a e b construímos un novo tipo de número que chamaremos **complexo**:

$$\begin{array}{ccccc} z & = & a & + & b \cdot i \\ \text{número} & & \text{parte} & & \text{parte} \\ \text{complexo} & & \text{real} & & \text{imaxinaria} \end{array}$$

- Podemos considerar os números reais como números complexos con parte imaxinaria 0.
- Chamaremos **números imaxinarios** os complexos con parte imaxinaria distinta de 0: $2-5i$, $1'7i$, $-3+i$, ...
- Se a parte real é 0, diremos que é un número **imaxinario puro**: $2i$, $-\frac{3}{2}i$, i , ...
- O conxunto de tódolos números complexos simbolizáremolo por $\mathbb{C}$.

Operación con complexos

Para definir as operacións con números complexos non

é necesario inventar novas expresións, basta operar coa unidade imaxinaria i coma se fose calquera outro símbolo.

- **Suma:** $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- **Producto:** $(a + bi) \cdot (c + di) = (a \cdot c) + (a \cdot d)i + (b \cdot c)i + (b \cdot d)i^2$

Se temos en conta que $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ resulta:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i$$

A suma e o produto de números complexos conservan as mesmas propiedades que a suma e o produto de números reais:

1 Suma:

- Asociativa
- Conmutativa.
- Neutro: Segue sendo $0=0+0i$.
- Oposto de $z=a+bi$, é $-z=-a-bi$

2 Producto:

- Asociativa
- Conmutativa
- Neutro do produto: $1=1+0i$
- Inverso: Dado un complexo distinto de 0, existe outro que multiplicado por el da 1.

Calculemos o inverso de $z=a+bi$.

$$z^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

O inverso é $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$ que existe sempre

que a^2+b^2 sexa distinto de 0, o que equivale a que $z=a+bi$ sexa distinto de 0.

3 Suma e produto:

- O produto é distributivo respecto da suma..

Exercicios: Efectúa as seguintes operacións cos complexos

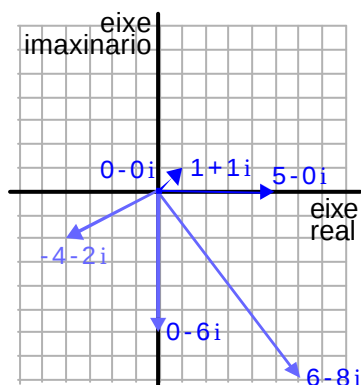
$z_1=-3+4i$ e $z_2=5-2i$:

- | | | |
|--------------|---------------|--------------------|
| a) z_1+z_2 | b) z_1+3z_2 | c) $z_1 \cdot z_2$ |
| d) $(z_1)^3$ | e) $1/z_1$ | f) z_2/z_1 |

Representación gráfica

Podemos representar un número complexo como un vector do plano coa orixe na orixe de coordenadas, o eixe X para a parte real e o eixe Y para a parte imaxinaria.

O extremo do vector correspondente a un número



complexo chámase **afixo**² dese número.

Dese xeito vemos que se os reais enchían a recta, os números complexos enchén plano: cada punto do plano é o afixo dun número complexo e a cada número complexo correspóndelle un punto do plano.

Exercicios: Dados os complexos $z_1 = -3 + 4i$ e $z_2 = 5 - 2i$, pídese:

- Representáoaos graficamente.
- Calcula a súa suma e comproba a suma de complexos corresponde coa suma de vectores.

Complexos en forma polar

Xa vimos que ademais das coordenadas rectangulares dun punto podemos utilizar as coordenadas polares: a medida do segmento que vai do punto a orixe e o ángulo que forma ese segmento coa parte positiva do eixe X.

Así, representando un número complexo sobre o plano e calculando as coordenadas polares dese punto obtemos a expresión polar dese número complexo.

Podemos, polo tanto, utilizar dous métodos para designar un número complexo:

- Forma binómica:** $z = a + bi$
- Forma polar:** $z = r_A$ onde r é a distancia a orixe, á que nomearemos **módulo**, e A é o ángulo en relación ó eixe X, que chamaremos **argumento**.

Podemos atopar fórmulas que nos permitan pasar facilmente dunha a outra expresión

- Paso de forma binómica a polar:** Só temos que fixarnos no triángulo da figura e calcular o módulo (hipotenusa) e o argumento (un dos ángulos agudos):

$$\text{Módulo: } r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

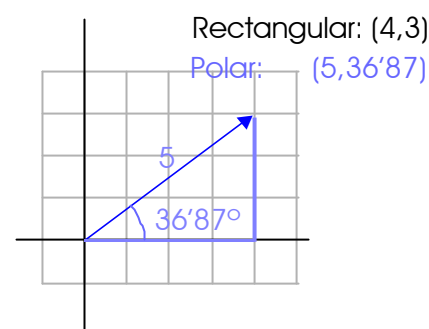
$$\text{Argumento: } \tan(A) = \frac{b}{a} \Leftrightarrow A = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

- Paso de forma polar a binómica:** Coñecendo un ángulo e a hipotenusa é doado calcular os catetos

$$\left. \begin{aligned} a &= r \cdot \cos(A) \\ b &= r \cdot \sin(A) \end{aligned} \right\} z = r \cos(A) + r \sin(A)i$$

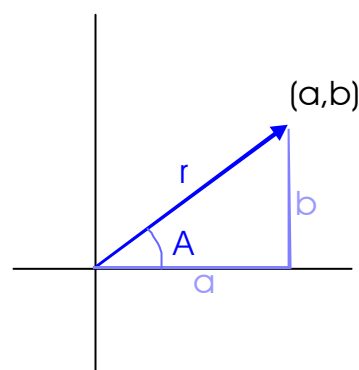
Sacando factor común r obtemos a forma trigonométrica dun número complexo: $z = r[\cos(A) + \sin(A)i]$

Se o ángulo non fose do primeiro cuadrante, as fórmulas son as mesmas e as demostracións similares.



$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\tan(A) = \frac{3}{4} \rightarrow A = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36'87''$$



² afixo=cravo, coma se o sinalásemos no plano cun alfinete.

Exercicio: Demuestra que $z = \cos(A) + \text{sen}(A)i$ ten módulo 1.

Exemplo: Escribe en forma polar os seguintes complexos:

- a) $z = 0 - 6i$ b) $z = 6 - 8i$ c) $z = 0 + 0i$
 d) $z = 5 + 0i$ e) $z = -4 - 2i$ f) $z = 1 + 1i$

Solución:

a) Neste caso non é necesario facer operacións: $z = 6_{270^\circ}$

b) Módulo: $r = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$

Argumento: $A = \arctan\left(\frac{-8}{6}\right) = 306'87^\circ$

Para determinar o argumento debemos ter en conta que hai dous ángulos entre 0° e 360° coa mesma tanxente e que se diferencian en 180° . Eliximos o ángulo correspondente ó cuadrante no que se atopa o número.

c) O complexo $z = 0 + 0i$ é o único que non admite unha expresión en forma polar ó non poder determinar o argumento (recorda $0/0$ indeterminado).

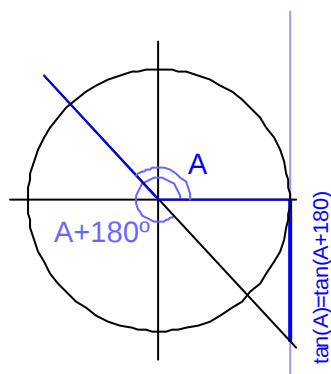
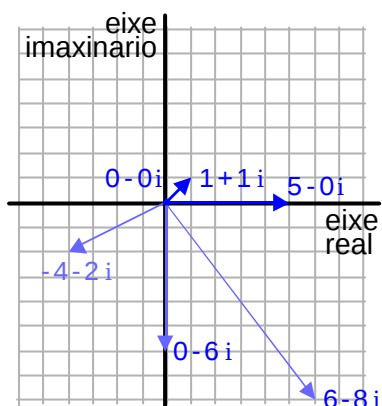
d) $z = 5_{0^\circ}$.

e) Módulo: $r = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$

Argumento: $A = \arctan\left(\frac{-2}{-4}\right) = 206'57^\circ$ (tomamos o ángulo do 3º cuadrante)

f) Módulo: $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Argumento: $A = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ$



Exemplo: Escribe en forma binómica os seguintes complexos

- a) $z = 7_{90^\circ}$ b) $z = 5_{135^\circ}$
 c) $z = 4_{270^\circ}$ d) $z = 10_{30^\circ}$

Solución:

a) $z = 0 + 7i$

b) $z = 5[\cos(135^\circ) + \text{sen}(135^\circ)i] = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$

c) $z = 0 - 4i$

d) $z = 10[\cos(30^\circ) + \text{sen}(30^\circ)i] = 5\sqrt{3} + 5i$

Exemplo: Dados os complexos $z = -3 + 4i$ e $w = 2 + 6i$

- a) Esríbeos en forma polar
 b) Calcula o súa suma e o seu produto
 c) Escribe a suma e o produto en forma polar. ¿Qué relación teñen coa forma polar de z e w ?

Solución:

a)

$$\left. \begin{aligned} r_z &= \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \\ A_z &= \arctan\left(\frac{4}{-3}\right) = 126'87^\circ \end{aligned} \right\} z = 5_{126'87^\circ}$$

$$\left. \begin{aligned} r_w &= \sqrt{2^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{10} \\ A_w &= \arctan\left(\frac{6}{2}\right) = 71'57'' \end{aligned} \right\} w = 2\sqrt{10}_{71'57''}$$

b) $z + w = -1 + 10i$ $z \cdot w = -30 - 10i$

c)

$$\left. \begin{aligned} r_{z+w} &= \sqrt{(-1)^2 + (-10)^2} = \sqrt{101} \\ A_{z+w} &= \arctan\left(\frac{10}{-1}\right) = 95'7'' \end{aligned} \right\} z = \sqrt{101}_{95'7''}$$

Como pode apreciarse, non parece haber ningunha relación clara entre a forma polar da suma e a dos sumandos.

$$\left. \begin{aligned} r_{z \cdot w} &= \sqrt{(-30)^2 + (-10)^2} = 10\sqrt{10} \\ A_{z \cdot w} &= \arctan\left(\frac{-10}{-30}\right) = 198'44'' \end{aligned} \right\} z = 10\sqrt{10}_{198'44''}$$

Vemos que o módulo do produto é o produto dos módulos e o argumento do produto é a suma dos argumentos.

Producto en forma polar

Como se aprecia no exemplo anterior, non hai unha relación clara entre a forma polar da suma de complexos e as formas polares dos sumandos.

Sen embargo, con respecto ó produto, podemos establecer unha relación entre a forma polar dos factores e a do produto:

- O módulo do produto de dous números complexos é o produto dos módulos dos factores.
- O argumento do produto de dous números complexos é a suma dos argumentos dos factores.

Demostración:

Sexan $z=r_A$ e $w=s_B$ dous números complexos en forma polar. Escribímoslos en forma trigonométrica e facemos o produto:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r[\cos(A) + \operatorname{sen}(A)i] \cdot s[\cos(B) + \operatorname{sen}(B)i] = \\ &= (r \cdot s)[(\cos A \cdot \cos B - \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B) + (\operatorname{sen} A \cdot \cos B + \cos A \cdot \operatorname{sen} B)i] \end{aligned}$$

Pero sabemos que:

$$\cos A \cdot \cos B - \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B = \cos(A + B)$$

$$\operatorname{sen} A \cdot \cos B + \cos A \cdot \operatorname{sen} B = \operatorname{sen}(A + B)$$

Polo tanto obtemos que:

$$z \cdot w = (r \cdot s)[\cos(A + B) + \operatorname{sen}(A + B)i]$$

Efectivamente, o módulo do produto é o produto dos módulos e o argumento a suma dos argumentos dos factores.

Consecuencias do anterior son:

- **O inverso dun complexo** $z=r_A$ é o número $z^{-1} = \left(\frac{1}{r}\right)_{360-A}$
- **Cociente de dous complexos** é outro complexo de módulo o cociente dos módulos e argumento a diferenza dos argumentos.

$$\left. \begin{array}{l} z = r_A \\ w = s_B \end{array} \right\} \quad \frac{z}{w} = \left(\frac{r}{s}\right)_{A-B}$$

- **Potencias de expoñente natural:** A potencia enésima dun número complexo $z=r_A$ é o complexo de módulo r^n e argumento nA

$$(r_A)^n = (r^n)_{nA}$$

- **Fórmula de Moivre:** Expresando a relación anterior en forma trigonométrica

$$[\cos(A) + \operatorname{sen}(A)i]^n = \cos(nA) + \operatorname{sen}(nA)i$$

Esta fórmula permite calcular o seno e o coseno de nA a partir do seno e o coseno de A .

Exercicio: Demostra as propiedades anteriores.

Exemplo: Sabendo que:

$$\operatorname{sen}(30) = \frac{1}{2} \quad \cos(30) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Calcula utilizando a fórmula de Moivre o seno e coseno de 60° ?

Solución: Dado que $60 = 2 \cdot 30$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2 = \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + \left[2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}\right]i = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{Polo tanto: } \begin{cases} \operatorname{sen}(60) = \frac{1}{2} \\ \cos(60) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Raíces de números complexos

Nos números reais, se o índice da raíz é impar, cada número ten unha única raíz: $\sqrt[3]{-125} = -5$

Por outra banda, cando o índice é par, pode haber dúas ou ningunha raíz dun número real:

- $\sqrt[4]{-16}$ non ten solución en $\mathbb{R}$

- $\sqrt{6'25} = \pm 2'5$ ten dúas solucións

Nos números complexos a situación é moi diferente.

Definición: Do mesmo xeito que con números reais, definimos **raíz de índice n** dun número complexo $z=r_A$ como outro número complexo que ó elevalo a n da o primeiro:

$$z = r_A \rightarrow \sqrt[n]{z} = w \Leftrightarrow w^n = z$$

O módulo da raíz de índice n dun complexo é a raíz enésima do módulo e o argumento o argumento dividido por n:

$$z = r_A \rightarrow \sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{r}\right) \frac{A}{n}$$

Exercicio: Demuestra a afirmación anterior.

Exemplo: Calculemos a raíz 4ª de $z=16_{120}$

Solución: $\sqrt[4]{16_{120}} = \left(\sqrt[4]{16}\right) \frac{120}{4} = 2_{30}$

Sen embargo, non é esa a única solución:

$$(2_{210})^4 = (2^4)_{210 \cdot 4} = 16_{840} = 16_{120} \Leftrightarrow \sqrt[4]{16_{120}} = 2_{210}$$

O motivo de ter varias raíces débese a que se ben 120° e 840° son argumentos equivalentes (diferéncianse en dúas voltas de circunferencia), os resultados de dividir entre 4 xa non o son.

Un número complexo $z=r_A$ ten sempre tantas raíces diferentes como indica o índice da raíz.

$$\sqrt[n]{r_A} = \left(\sqrt[n]{r}\right) \frac{A}{n}, \left(\sqrt[n]{r}\right) \frac{A+360}{n}, \left(\sqrt[n]{r}\right) \frac{A+360 \cdot 2}{n}, \dots, \left(\sqrt[n]{r}\right) \frac{A+360 \cdot (n-1)}{n}$$

Os afixos desas raíces son os vértices dun polígono regular de n lados e centro na orixe.

Exemplo: Calculemos tódalas raíces 4 de $z=16_{120}$ e debuxemos a súa representación gráfica.

Solución:

$$\sqrt[4]{16_{120}} = \left(\sqrt[4]{16}\right) \frac{120}{4} = 2_{30^\circ}$$

$$120^\circ + 360^\circ \rightarrow \left(\sqrt[4]{16}\right) \frac{120^\circ + 360^\circ}{4} = 2_{120^\circ}$$

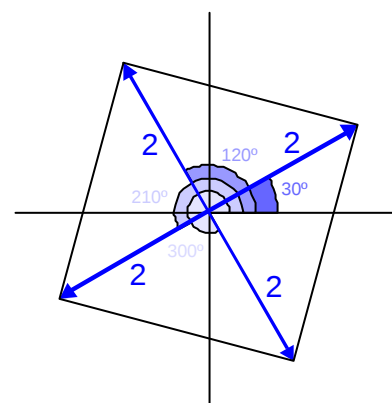
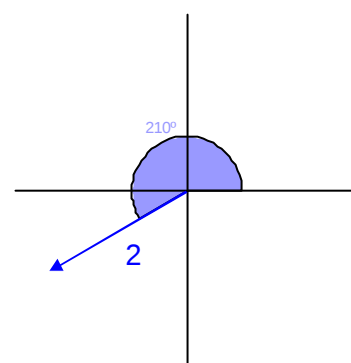
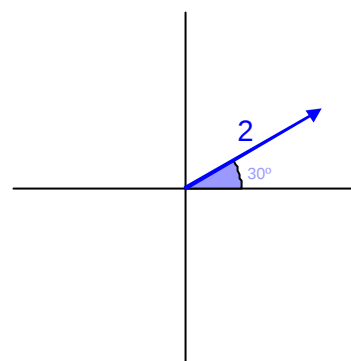
$$120^\circ + 2 \cdot 360^\circ \rightarrow \left(\sqrt[4]{16}\right) \frac{120^\circ + 360^\circ \cdot 2}{4} = 2_{210^\circ}$$

$$120^\circ + 3 \cdot 360^\circ \rightarrow \left(\sqrt[4]{16}\right) \frac{120^\circ + 360^\circ \cdot 3}{4} = 2_{300^\circ}$$

$$120^\circ + 4 \cdot 360^\circ \rightarrow \left(\sqrt[4]{16}\right) \frac{120^\circ + 360^\circ \cdot 4}{4} = 2_{390^\circ}$$

Pero $390^\circ = 360^\circ + 30^\circ$ e, polo tanto, $2_{390^\circ} = 2_{30^\circ}$ e as raíces repítense. Hai 4 raíces 4ªs diferentes.

Exercicio: Calcula tódalas raíces quintas de 243_{60° e represéntaas no plano.

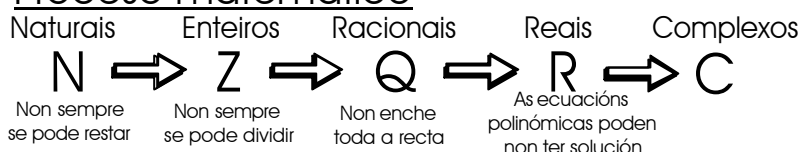


Invención dos números:

Proceso histórico

$$\mathbb{N}^+ \Rightarrow \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \mathbb{R}^+ \Rightarrow \text{Negativos e } 0 \Rightarrow \mathbb{C}$$

Proceso matemático



Números complexos

- Conxunto formado por tódalas expresións da forma $z=a+bi$ (a e b reais e $i = \sqrt{-1}$).
- Os números complexos constan dunha parte real e outra imaxinaria:

$$\begin{array}{ccccc} z & = & a & + & b i \\ \text{número} & & \text{parte} & & \text{parte} \\ \text{complexo} & & \text{real} & & \text{imaxinaria} \end{array}$$

- Chamaremos **números imaxinarios** os complexos con parte imaxinaria distinta de 0.
- Se a parte real é 0, diremos que é un número **imaxinario puro**.
- Podemos representalos sobre o plano** de xeito que a cada punto do plano correspóndelle un número complexo e viceversa.
- O punto asociado a un número recibe o nome de **afixo** dese número.
- Forma binómica:** $z=a+bi$
- Forma polar:** $z=r_A$ onde r é a distancia a orixe, á que nomearemos **módulo**, e A é o ángulo en relación ó eixe X, que chamaremos **argumento**.
- Paso de forma binómica a polar:**

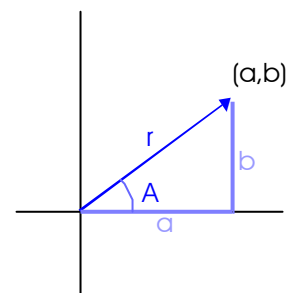
$$\text{Módulo: } r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\text{Argumento: } A = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \Leftrightarrow \tan(A) = \frac{b}{a}$$

- Paso de forma polar a binómica:**

$$\left. \begin{array}{l} a = r \cdot \cos(A) \\ b = r \cdot \sin(A) \end{array} \right\} z = r \cos(A) + r \sin(A)i$$

- Forma trigonométrica:** $z = r[\cos(A) + \sin(A)i]$



Operación con complexos

- Suma:** $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

- **Producto:** $(a + bi) \cdot (c + di) = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i$
- A suma e o produto de números complexos conservan as mesmas propiedades que a suma e o produto de números reais:
 - 1 **Suma:** Asociativa, Conmutativa, Neutro ($0=0+0i$) e oposto (se $z=a+bi$ entón $-z=-a-bi$)
 - 2 **Producto:** Asociativa, Conmutativa, Neutro ($1=1+0i$), Tódolos complexos, agás o cero, teñen inverso. O inverso de $z=a+bi$ é $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$
 - 3 **Suma e produto:** O produto é distributivo respecto da suma..

Operacións en forma polar

- **Producto:** O módulo do produto é o produto dos módulos dos factores. e o argumento a suma dos argumentos dos factores: $r_A \cdot s_B = r \cdot s_{A+B}$
- **O inverso dun complexo:** $(r_A)^{-1} = \left(\frac{1}{r}\right)_{360-A}$
- **Cociente:** $\frac{r_A}{s_B} = \left(\frac{r}{s}\right)_{A-B}$
- **Potencias de expoñente natural:** $(r_A)^n = (r^n)_{nA}$
- **Fórmula de Moivre:** $[\cos(A) + \sin(A)i]^n = \cos(nA) + \sin(nA)i$

Raíces de números complexos

- **Definición:** Chamámoslle **raíz de índice n** dun número complexo $z=r_A$ a outro número complexo que o elevalo a n da o primeiro: $\sqrt[n]{z} = w \Leftrightarrow w^n = z$
- O módulo da raíz de índice n dun complexo é a raíz enésima do módulo e o argumento o argumento dividido por n : $z = r_A \rightarrow \sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{A}{n}}$
- Un número complexo ten sempre tantas raíces diferentes como indica o índice da raíz.

$$\sqrt[n]{r_A} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{A}{n}}, \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{A}{n} + \frac{360}{n}}, \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{A}{n} + \frac{360 \cdot 2}{n}}, \dots, \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{A}{n} + \frac{360 \cdot (n-1)}{n}}$$
- Os afixos desas raíces son os vértices dun polígono regular de n lados e centro na orixe.

Aplicacións técnicas dos complexos.

Os números complexos desempeñan un importante papel en Matemáticas, permitindo resolver moitos problemas que serían imposibles de abordar nos números reais.

Ademais, pese o seu nome de “imaxinarios”, tamén teñen importantes aplicacións técnicas, como por exemplo a descrición de circuitos de corrente alterna.

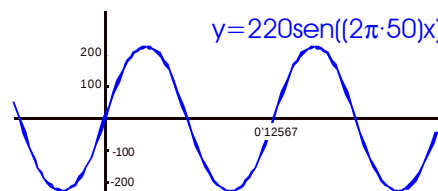
Corrente continua: Para que circule unha corrente por un conductor necesitamos un xerador (unha pila por exemplo) que manteña unha diferenza de potencial entre os extremos do circuito. Se a diferenza de potencial, V , é constante prodúcese unha corrente continua.

Conceptos importantes en corrente continua son:

- **Forza electromotriz, E :** Traballo realizado por unidade de carga para que circule corrente polo circuito.
- **Resistencia, R :** Constante característica de cada conductor que mide a dificultade da corrente para circular por el.
- **Intensidade, I :** Medida da cantidade de carga que atravesa unha sección do conductor por unidade de tempo: $I = \frac{V}{R}$.

Corrente alterna: Cando facemos xirar unha espira nun campo magnético obtemos unha corrente eléctrica alterna. A forza electromotriz desa corrente ven dada por unha función sinusoidal: $E = E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ (E_0 constante que depende da intensidade do campo magnético, da superficie da espira e de ω , velocidade de xiro da espira). A corrente que temos nas nosas casas é alterna ($E_0=220$ V e $\omega=50 \cdot 2\pi$ -50 ciclos por segundo-).

Corrente doméstica:



Utilizando números complexos para describir a

corrente alterna podemos utilizar expresións semellantes ás da corrente continua:

- **Resistencia:** Oposición do circuito ó paso da corrente, R .
- **Reactancia inductiva, R_i :** Nun circuito de corrente alterna, as bobinas crean correntes inducidas que se opoñen ó paso da corrente. Mídese en ohmios (é unha resistencia) e ven dada por $R_i = L\omega$ onde L é o coeficiente de autoindución (constante que depende da lonxitude, número de espiras, resistencia do fío, etc da bobina).
- **Reactancia capacitativa, R_c :** resistencia creada por un condensador, $R_c = -\frac{1}{C\omega}i$
- **Impedancia:** Resistencia total dun circuito $z = R + R_i + R_c = R + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)i$

As resistencias que denominamos reactancias (R_i e R_c) exprésanse como números imaxinarios porque non se suman a resistencia do circuito (R) como habitualmente sumamos, senón producindo un efecto total semellante ó do módulo dun número complexo:

$\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$; por iso os complexos resultan axeitados para describir a corrente alterna.

- **Ángulo de desfase**, α : Ó circular unha corrente alterna por un circuíto de prodúcese un desfase entre a intensidade e a diferenza de potencial nos extremos que ven dado pola expresión $\tan(\varphi) = \frac{R_i + R_c}{R}$
- **Intensidade**: De xeito semellante á corrente continua, a intensidade ven dada polo cociente entre a f.e.m. e a impedancia, $I = \frac{E}{Z}$; pero, ó ser a f.e.m. variable, a intensidade tamén varia segundo unha función do tipo $I = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$ onde I_0 é a intensidade máxima (fíxate que cando o circuíto ten reactancia prodúcese un desfase entre a f.e.m e a intensidade).

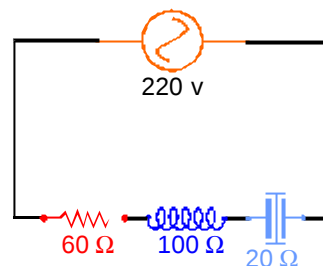
Exercicio: Calcular, no circuíto da figura, o ángulo de desfase e a intensidade máxima.

Solución:

- ✓ Impedancia: $Z = 60 + (100 - 20)i = 60 + 80i$
- ✓ Desfase: $\tan(\varphi) = \frac{80}{60} \rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 53'13$
- ✓ Forza electromotriz cando a intensidade é máxima:

$$E = 220(\cos(53'13) + \sin(53'13)i) = 176 + 132i$$

- ✓ Intensidade máxima: $I = \frac{E}{Z} = \frac{176 + 132i}{60 + 80i} = \frac{(176 + 132i) \cdot (60 - 80i)}{(60 + 80i) \cdot (60 - 80i)} = 2'112 - 0'616i$
- ✓ A intensidade máxima será: $|I| = \sqrt{2'112^2 + (-0'616)^2} = 2'2 \text{ A}$



Exercicio: No circuíto da figura, calcular a impedancia e o ángulo de desfase entre os extremos da derivación.

Solución:

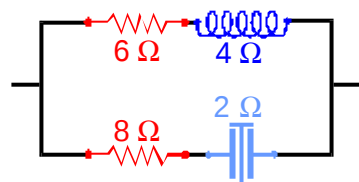
- ✓ Impedancia das derivacións: $Z_1 = 6 + 4i$ e $Z_2 = 8 - 2i$
- ✓ Impedancia equivalente:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{6 + 4i} + \frac{1}{8 - 2i} = \frac{8 - 2i + 6 + 4i}{(6 + 4i) \cdot (8 - 2i)} = \frac{14 + 2i}{60 + 20i}$$

$$Z = \frac{60 + 20i}{14 + 2i} = \frac{(60 + 20i) \cdot (14 - 2i)}{(14 + 2i) \cdot (14 - 2i)} = \frac{880 - 400i}{200} = 4'4 - 2i$$

A impedancia indica que o circuíto equivale a unha resistencia de $4'4 \Omega$ e a un reactancia capacitativa de 2Ω .

- ✓ Ángulo de desfase: $\tan(\varphi) = \frac{-2}{4'4} \rightarrow \varphi = \arctan(-0'4545) = -24'44^\circ$



Exercicios e actividades

1 Efectúa as seguintes operacións con números complexos:

a) $(2+3i)^3$ b) $(1-3i) \cdot (-3+2i)$ c) $(4-i)[x-2+5i]$
 d) $\frac{5+3i}{6-2i}$ e) $(2-7i)^{-1}$ f) $\sqrt[3]{1+5i}$

2 Calcula as seguintes potencias de i:

a) i^2 b) i^3 c) i^4 d) i^5 e) i^{238}

3 Transforma os seguintes complexos a forma polar:

a) $3-5i$ b) $1+i$ c) $-6+2i$

4 Converte a forma binómica os seguintes complexos:

a) 4_{45} b) 2_{150} c) 7_{300}

5 Escribe en forma trigonométrica os complexos:

a) $-8+6i$ b) $4i$ c) -5

6 Dados os números $z_1=-2+4i$, $z_2=0+7i$, $z_3=5-3i$.

a) Representaos graficamente.

b) Multiplícaos por $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e representa os resultados.

c) ¿Qué relación hai entre os afixos de z_1 , z_2 , z_3 e os de $z \cdot z_1$, $z \cdot z_2$, $z \cdot z_3$. Xustifica a resposta.

7 Resolve as seguintes ecuacións:

a) $-3x^2 + 5x - 3 = 0$ b) $(4-3i)x^3 = 5$ c) $16 - x^4 = 0$

8 Atopa unha ecuación de segundo grao, con coeficientes reais, que teña por solución os números complexos $z_1=2+3i$ e $z_2=2-3i$.

9 Dado o número $z=2-9i$, atopa outro que teña o mesmo argumento e módulo 1.

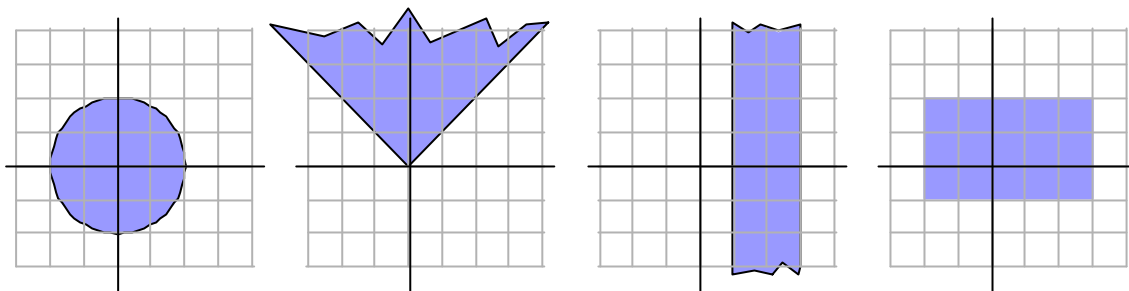
10 Atopa un número complexo de xeito que forme con $z=2+9i$ un ángulo de 60° .

11 ¿Qué figura forman no plano os afixos dos números complexos de módulo 1?

12 ¿Qué figura forman os afixos dos complexos de argumento 30° ?

13 Calcula as raíces sextas de $z=-3+4i$ e represéntaas graficamente.

14 ¿Qué condicións teñen que cumprir os complexos que teñen por afixos as partes do plano que se indican?



15 Calcula o valor do k de xeito que o número $z=k+8i$ teña módulo 10.

16 Calcula k para que o argumento de $z=2-ki$ sexa 60°

17 Calcula k para que o produto de $z=3-2i$ por $w=4+ki$ sexa un número real.

18 Atopa unha fórmula para calcular o seno e o coseno de $3A$ a partir do seno e do coseno de A , sendo A un ángulo calquera.

19 Calcula as raíces quintas da unidade e comproba que:

- O produto de dúas raíces quintas da unidade segue sendo unha raíz quinta da unidade.
- A inversa dunha raíz quinta da unidade tamén é unha raíz quinta da unidade.
- A suma das raíces quintas da unidade é 0.

20 Calcula as coordenadas do punto que resulta aplicar un xiro de 30° con centro na orixe de coordenadas o punto $P(-5,7)$.

Problema: Atopa as coordenadas de tódolos vértices dun pentágono regular de centro na orixe de coordenadas sabendo que un dos vértices é o punto $(4,3)$.

Problema: Do mesmo xeito que podemos definir partes do plano mediante ecuacións con números reais ($y=2x+1$ define unha recta), podemos facer o mesmo utilizando ecuacións con números complexos. Son especialmente interesante as que se refiren a complexos en forma polar.

Intenta debuxar as figuras que corresponden as seguintes ecuacións:

- $r=A$ con $0 \leq A \leq 2\pi$ (r é o módulo e A o argumento)
- $r=\sin(2A)$ con $0 \leq A \leq 2\pi$
- $r=1+\cos(A)$ con $0 \leq A \leq 2\pi$