

2

MATRICES E DETERMINANTES

Programa:

- 1 O espacio vectorial das matrices $n \times m$.
 - 1.1 Definición de matriz $n \times m$.
 - 1.2 Tipos de matrices. Matrices cadradas
 - 1.3 Suma de matrices.
 - 1.4 Produto dunha matriz por un número.
- 2 Produto de matrices.
 - 2.1 Definición de produto de matrices.
 - 2.2 Propiedades do produto de matrices.
 - 2.3 Inversa dunha matriz cadrada.
 - 2.4 Cálculo da matriz inversa.
- 3 Determinante dunha matriz cadrada.
 - 3.1 Determinante de orde 2.
 - 3.2 Determinante de orde 3. Regra de Sarrus.
 - 3.3 Desenvolvemento do determinante de orde n .
 - 3.4 Propiedades dos determinantes.
- 4 Rango dunha matriz
 - 4.1 Definición.
 - 4.2 Cálculo do rango dunha matriz.

Matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2'5 & 0 & -6 \\ \frac{1}{3} & 7 & \sqrt{3} \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

Unha matriz é un conxunto de números agrupados en filas e columnas.

Esa matriz ten 4 filas e 3 columnas (é de orde 4x3). Cada elemento da matriz queda determinado pola súa colocación (o elemento -6 é o 2,3; 2ª fila, 3ª columna).

En xeral, un elemento dunha matriz designarémolo por a_{ij} onde i indica a fila e j a columna. Na matriz anterior $a_{21} = 2'5$ e $a_{42} = 5$.

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -2 & 4 \\ 2'5 & \mathbf{0} & -6 \\ \frac{1}{3} & 7 & \sqrt{\mathbf{3}} \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

Unha matriz representarémola, de xeito abreviado, por $(a_{ij})_{n \times m}$ onde n é o número de filas e m o de columnas. A matriz anterior será $(a_{ij})_{4 \times 3}$.

Chamaremos diagonal dunha matriz ós elementos que teñen iguais os índices do lugar que ocupan: Na matriz A, do primeiro exemplo, a diagonal está formada por 1 (elemento 1,1), 0 (elemento 2,2) e $\sqrt{3}$ (elemento 3,3).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- **Cadradas:** Cando teñen tantas filas coma columnas.
- **Matriz fila:** Cando só teñen unha fila.
- **Matriz columna:** Formada por unha soa columna.
- **Matriz diagonal:** A que ten tódolos elementos iguais a 0 agás os da diagonal. Un caso especial de matriz diagonal é a que ten os elementos da diagonal iguais a 1 que chamaremos matriz identidade.
- **Matriz triangular superior:** A que ten tódolos elementos situados por debaixo da diagonal 0.
- **Matriz triangular inferior:** A que ten tódolos elementos situados por enriba da diagonal 0.
- **Matriz trasposta:** A trasposta dunha matriz é outra matriz que se obtén cambiando as filas polas columnas.

Matrices e números

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$$

Suma de dúas matrices: A suma de dúas matrices $(a_{ij})_{n \times m}$ e $(b_{ij})_{n \times m}$ é outra matriz, $(a_{ij} + b_{ij})_{n \times m}$, na que os elementos son a suma dos elementos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Para poder sumar dúas matrices, teñen que ser da mesma orde e a matriz suma terá tamén esa orde.

Producto dunha matriz por un número: Para multiplicar unha matriz $(a_{ij})_{n \times m}$ por un número α , multiplícase cada elemento da matriz polo número, $\alpha \cdot (a_{ij})_{n \times m} = (\alpha \cdot a_{ij})_{n \times m}$:

$$\alpha \cdot (a_{ij}) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \dots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \dots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$-3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 3 & -9 \\ -15 & -12 \end{pmatrix}$$

As matrices coa suma e o produto por escalares anteriores teñen estrutura de espacio vectorial sobre os números reais:

1. Asociativa da suma:

$$\begin{aligned} (a_{ij})_{n \times m} + [(b_{ij})_{n \times m} + (c_{ij})_{n \times m}] &= (a_{ij})_{n \times m} + (b_{ij} + c_{ij})_{n \times m} \\ (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}))_{n \times m} &= ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij})_{n \times m} = \\ &\quad \text{asociativa dos } n^{\text{os}} \text{ reais} \\ (a_{ij} + b_{ij})_{n \times m} + (c_{ij})_{n \times m} &= [(a_{ij})_{n \times m} + (b_{ij})_{n \times m}] + (c_{ij})_{n \times m} \end{aligned}$$

2. Conmutativa da suma:

$$\begin{aligned} (a_{ij})_{n \times m} + (b_{ij})_{n \times m} &= (a_{ij} + b_{ij})_{n \times m} = (b_{ij} + a_{ij})_{n \times m} = (b_{ij})_{n \times m} + (a_{ij})_{n \times m} \\ &\quad \text{conmutativa da suma dos } n^{\text{os}} \text{ reais} \end{aligned}$$

3. **Neutro da suma:** O neutro da suma de matrices é a matriz que ten tódalas súas compoñentes 0:

$$(a_{ij})_{n \times m} + (0)_{n \times m} = (a_{ij} + 0)_{n \times m} = (a_{ij})_{n \times m}$$

4. **Toda matriz ten oposta:** A oposta dunha matriz $(a_{ij})_{n \times m}$ é a matriz que ten por elementos os opostos $(-a_{ij})_{n \times m}$:

$$(a_{ij})_{n \times m} + (-a_{ij})_{n \times m} = (a_{ij} + (-a_{ij}))_{n \times m} = (0)_{n \times m}$$

5. **Distributiva da suma de matrices en relación ó produto por escalares:**

$$\begin{aligned} \alpha [(a_{ij})_{n \times m} + (b_{ij})_{n \times m}] &= \alpha (a_{ij} + b_{ij})_{n \times m} = (\alpha (a_{ij} + b_{ij}))_{n \times m} = \\ &\quad \text{distributiva da suma dos } n^{\text{os}} \text{ reais} \\ (\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij})_{n \times m} &= (\alpha a_{ij})_{n \times m} + (\alpha b_{ij})_{n \times m} = \alpha (a_{ij})_{n \times m} + \alpha (b_{ij})_{n \times m} \end{aligned}$$

6. **Distributiva da suma de números en relación ó produto dunha matriz por un número:**

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \cdot (a_{ij})_{n \times m} &= ((\alpha + \beta) \cdot a_{ij})_{n \times m} = (\alpha \cdot a_{ij} + \beta \cdot a_{ij})_{n \times m} \\ &\quad \text{distributiva da suma dos } n^{\text{os}} \text{ reais} \\ (\alpha \cdot a_{ij})_{n \times m} + (\beta \cdot a_{ij})_{n \times m} &= \alpha \cdot (a_{ij})_{n \times m} + \beta \cdot (a_{ij})_{n \times m} \end{aligned}$$

7. Asociativa do produto de matrices e o produto de números:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot (a_{ij})_{n \times m} = ((\alpha \cdot \beta) \cdot a_{ij})_{n \times m} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{asociativa} \\ \text{do produto} \\ \text{de n}^{\text{os}} \text{ reais}}}{=} (\alpha \cdot (\beta \cdot a_{ij}))_{n \times m} = \alpha \cdot (\beta \cdot a_{ij})_{n \times m}$$

8. Existencia de unidade no produto dunha matriz por un

número:

$$1 \cdot (a_{ij})_{n \times m} = (1 \cdot a_{ij})_{n \times m} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{existencia de unidade} \\ \text{no produto de números}}}{=} (a_{ij})_{n \times m}$$

Producto de matrices

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+3+5 & 3+0+0 \\ 14+27+2 & 7+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 43 & 7 \end{pmatrix}$$

A matriz A é 2x3 e a B é 3x2. A matriz producto A·B é 2x2

Definimos o produto de $A = (a_{ij})_{n \times m}$ por $B = (b_{ij})_{m \times r}$ como a matriz, na que o elemento i,j calcúlase multiplicando cada elemento da fila i de A polo correspondente da columna j de B e logo sumando os productos.

$$A \cdot B = (a_{ij})_{n \times m} \cdot (b_{ij})_{m \times r} = \left(\sum_k a_{ik} \cdot b_{kj} \right)_{n \times r}$$

Para poder multiplicar dúas o número de columnas da primeira ten que ser igual ó de filas da segunda.

Ó multiplicar unha matriz de orde $n \times m$ e outra de orde $m \times r$, a matriz producto será de orde $n \times r$.

Propiedades:

Asociativa: O produto de matrices é **asociativo**.

Neutro: Só ten senso falar de neutro do produto de matrices no caso de matrices cadradas. Neste caso, o neutro é a matriz identidade:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Conmutativa: En xeral o produto de matrices **non** é conmutativo.

É máis, na maioría das ocasións non ten sentido falar de conmutatividade porque as matrices só se poden multiplicar dun xeito e mesmo cando se poden multiplicar polos dous lados (unha é de orde $n \times m$ e a outra de orde $m \times n$ ou cando son cadradas) os seus productos serán, en xeral, diferentes.

Inversa: Novamente só podemos falar de inversa para matrices cadradas.

En xeral unha matriz cadrada non ten inversa.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 10 \\ 51 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 16 \\ 34 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_3 = 1 \\ 6x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\frac{1^a}{2} \quad \frac{2^a}{3}} \begin{cases} 2x_1 + x_3 = \frac{1}{2} \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow 0 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 4x_2 + 2x_4 = 0 \\ 6x_2 + 3x_4 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\frac{3^a}{2} \quad \frac{4^a}{3}} \begin{cases} 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_4 = \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow 0 = \frac{1}{3}$$

A matriz non ten inversa.

Determinante dunha matriz cadrada

Matrices 2x2: Chamarémoslle determinante dunha matriz cadrada de orde 2x2 á seguinte expresión:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Matrices 3x3: No caso de matrices 3x3, o determinante é máis complicado:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Para lembrar máis facilmente esa expresión utilízase, entre outros, a **Regra de Sarrus**:

Productos positivos	Productos negativos
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Para calcula-lo determinante só queda suma-los productos.

Caso xeral: Podemos calcula-lo determinante dunha matriz desenvolvéndoo polos elementos dunha fila ou dunha columna. Para a columna k sería:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ik} \cdot A_{ik}$$

Onde A_k é o determinante da matriz que resulta ó suprimir en A a fila i e a columna k multiplicado por $(-1)^{i+k}$. A A_k chamarémoslle **adxunto** de a_k .

Propiedades dos determinantes

Para simplifica-la notación escribimos algunhas das propiedades para matrices 2x2 ou 3x3, pero son válidas para calquera matriz cadrada.

- O determinante dunha matriz é igual ó determinante da súa trasposta: $\det(A) = \det(A^t)$

En consecuencia tódalas propiedades dos determinantes que fan referencia ás filas, tamén son válidas para as columnas e viceversa.

- Multilinealidade:

Determinantes.

O concepto de determinante non é tan “artificial” como pode parecer.

Queremos atopar un método que nos permita averiguar se unha matriz cadrada ten inversa e, en caso afirmativo, calculala.

Vexamos como para o caso de matrices 2x2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1 \end{cases}$$

Dividimos ese sistema en dous sistemas 2x2 e resolvémolos por redución:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1 \end{cases}$$

1º Sistema:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_{11} = a_{22}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_{21} = -a_{21}$$

$$x_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_{21} = \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

2º Sistema:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_{12} = -a_{12}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_{22} = a_{11}$$

$$x_{12} = \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Queda:

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Para que esa matriz exista, ten que ser $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ (que é o **determinante da matriz A**).

Unha matriz ten inversa cando o seu determinante é distinto de 0.

Estudio do rango dunha matriz por menores.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

1.- Eleximos un menor (determinante dunha submatriz) de orde 1 distinto de 0: $|1| \neq 0$

2.- Ampliamos ese menor a un de orde 2: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

3.- Seguimos ampliando:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Sarrus}} 0$$

4.- Como resultou ser nulo, ampliamos o menor anterior doutro xeito diferente:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Sarrus}} 24 \neq 0$$

Xa non podemos ampliar a un menor de orden 4, o rango é 3 (orde do maior menor non nulo).

1. O determinante dunha matriz que ten unha columna suma doutras dúas é igual á suma dos determinantes das matrices nas que esa columna está formada por cada un dos sumandos:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

2. O determinante dunha matriz cunha columna multiplicada por un número é igual ó determinante da matriz multiplicado por ese número:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a \cdot a_{12} \\ a_{21} & a \cdot a_{22} \end{pmatrix} = a \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

As seguintes propiedades son consecuencia da multilinealidade dos determinantes:

- O determinante dunha matriz cunha columna na que tódolos elementos son 0, é 0: $\det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = 0$

- O determinante dunha matriz con dúas filas iguais é 0:

$$\det \begin{pmatrix} a & a & a_{13} \\ b & b & a_{23} \\ c & c & a_{33} \end{pmatrix} = 0$$

- O determinante dunha matriz que ten unha columna combinación lineal das demais é 0:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \alpha a_{11} + \beta a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \alpha a_{21} + \beta a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \alpha a_{31} + \beta a_{32} \end{pmatrix} = 0$$

Consecuencia desta propiedade é que podemos utiliza-los determinantes para estudar a dependencia ou independencia dun conxunto de vectores.

- O determinante dunha matriz non varía se a unha columna se lle suma unha combinación lineal das demais:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + (\alpha a_{11} + \beta a_{12}) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + (\alpha a_{21} + \beta a_{22}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + (\alpha a_{31} + \beta a_{32}) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Rango dunha matriz

Podemos considerar as filas dunha matriz $n \times m$ como un conxunto de n vectores de $\mathbb{R}^m$ (ou as columnas como m vectores de $\mathbb{R}^n$).

O **rango** dunha matriz é o número de filas (consideradas como vectores) linealmente independentes.

Demóstrase que o número de filas independentes é igual ó de columnas, polo que o rango é o número de filas ou columnas linealmente independentes.

Inversa dunha matriz cadrada

Como xa se indicou para as matrices de orde 2×2 , unha matriz ten inversa se e só se o seu determinante é distinto de 0.

Existen varios métodos para o cálculo da matriz inversa, aquí só utilizaremos-lo chamado por adxuntos.

A inversa dunha matriz A de orde $n \times n$ é:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Onde o elemento A_{ij} é o adxunto de a_{ij}

O proceso a seguir é o seguinte:

1. Cálculase o determinante. Se $\det(A) = 0$ a matriz non ten inversa.
2. Obtense a matriz trasposta: A^t .
3. Cálculase a matriz adxunta, formada polos adxuntos, da matriz trasposta.
4. A inversa é a matriz adxunta da trasposta dividida polo determinante.

Os pasos 2 e 3 poden intercambiarse.

1. Cálculo da matriz inversa dunha matriz 3×3 .

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Comprobamos que o determinante é distinto de 0:

$$|A| = -2 \neq 0$$

3. Calculamos a trasposta:

$$A^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Calculamos-la adxunta da trasposta:

$$\text{Adx}(A^t) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\text{Adx}(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

5. Xa só queda multiplicar polo inverso do determinante:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & -3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Problemas resoltos

- 1 a) Dadas as matrices sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Resolve a seguinte ecuación matricial: $A \cdot X + B = C$ onde X é unha matriz descoñecida.
- b) ¿Existe unha matriz Y de xeito que $Y \cdot A + B = C$?

Resolución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para despegar X temos que multiplicar pola inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, que pode non existir:

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1 - 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Ten inversa}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{trasposta}} A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adxunta}} \text{Adx}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{inversa}} A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 & 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fíxate que ó non ser conmutativo o produto de matrices, é necesario ter moi en conta o lado polo que hai que multiplicar.

b) Comprobemos se as ordes das matrices son compatibles:

- $Y \cdot A$ ten que ter orde 2×3 para que se poida sumar con B .
- A ten orde 2×2 , polo que Y debe ter orde $n \times 2$ para poder multiplicarse $Y \cdot A$.
- A orde de $Y \cdot A$ é polo tanto $n \times 2$ e, de ningún xeito, pode ser 2×3 polo que non pode existirla matriz Y nas condicións do problema.

2 Estudia para que valores de K ten inversa a matriz A e calcula a inversa no caso $k=2$.

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & k \\ 4 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

Resolución: Sabemos que unha matriz ten inversa se, e só se, o seu determinante é distinto de 0, polo tanto só temos que estudar para que valores de k o determinante é 0.

$$\left| \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & k \\ 4 & 0 & -k \end{pmatrix} \right| = -2k^2 + 4k + 8$$

$$-2k^2 + 4k + 8 = 0 \rightarrow k = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 8}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-4 \pm \sqrt{80}}{-4} = \begin{cases} k_1 = 1 + \sqrt{5} \\ k_2 = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

A matriz non ten inversa cando $k = 1 \pm \sqrt{5}$.

b) Calculémo-la inversa cando $k=2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 8 = 8$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adx}(A^t) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 8 & 0 & -4 \\ -8 & 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 8 & 0 & -4 \\ -8 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3 Dúas matrices A e B conmutan se $A \cdot B = B \cdot A$. Obte-las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan coa matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Resolución:

$$A \cdot B = B \cdot A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Facendo os produtos e igualando as compoñentes queda:

$$\begin{pmatrix} a-b & 3a+2b \\ c-d & 3c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ -a+2c & -b+2d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b = a+3c \\ 3a+2b = b+3d \\ c-d = -a+2c \\ 3c+2d = -b+2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+3c = 0 \\ 3a+b-3d = 0 \\ a-c-d = 0 \\ b+3c = 0 \end{cases}$$

Obtemos un sistema de 3 ecuacións e 4 incógnitas (a 1ª e a 4ª ecuacións son a mesma) que imos resolver polo método de Gauss:

$$\left. \begin{array}{l} a-c-d=0 \\ b+3c=0 \\ 3a+b-3d=0 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

O sistema é compatible indeterminado. Como só quedan dúas ecuacións non nulas, só podemos despegar dúas das incógnitas (teñen que ser a e b por se-las que corresponden ós elementos da diagonal) en función das demais que pasan a ser parámetros:

$$\left. \begin{array}{l} c=r \\ d=s \end{array} \right\} \text{parámetros} \rightarrow \begin{cases} a=r+s \\ b=-3r \\ c=r \\ d=s \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} r+s & -3r \\ r & s \end{pmatrix}$$

4 Calcula os valores dos parámetros a e b para que a matriz A teña rango 2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & a & 0 & b \end{pmatrix}$$

Resolución: Calculamo-lo rango de A por menores (tamén pode facerse por Gauss):

$$|2| = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango de A} \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango de A} \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & a & 0 \end{vmatrix} = 3 + 3a - 2a = 3 + a \Rightarrow (\text{Se } a \neq -3 \Rightarrow \text{Rango de } A = 3)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & a & b \end{vmatrix} = a - b \Rightarrow (\text{Se } b \neq a \Rightarrow \text{Rango de } A = 3)$$

Polo tanto, para que o rango de A sexa 2 ten que ser $a = -3$ e $b = a$, é dicir $b = -3$.

5 Estudia segundo os valores de k cal é o rango da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Resolución: Como A é unha matriz cadrada, estudiamos cando o seu rango é 3 (determinante distinto de 0):

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^3 + 1 + 1 - k - k - k = k^3 - 3k + 2$$

$$k^3 - 3k + 2 = 0$$

$$\frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ & 1 & 1 & -2 \\ & 1 & 1 & -2 \\ & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad (k-1) \cdot (k^2 + k - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k^2 + k - 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} k_2 = 1 \\ k_3 = -2 \end{cases} \end{cases}$$

Temo-las seguintes posibilidades:

Caso 1: $k \neq 1$ e $k \neq -2$. O determinante de A é distinto de 0, polo tanto o rango é 3.

Caso 2: $k = 1$. A matriz queda: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, o rango é 1 (só hai unha fila independente).

Caso 3: $k = -2$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} |-2| = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango de } A \geq 1 \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango de } A = 2 \end{cases}$$

Fíxate que xa sabemos que o rango de A non pode ser 3 porque o seu determinante é 0.

6 Calcula o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Resolución: Desenvolvémolo pola 4ª columna (ten un 0):

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$0 + 5 \cdot (4 - 6 + 6 + 2) - 7 \cdot (-4 + 2 - 6 - 8) + (6 - 1 - 12 + 3 + 12 - 2) = 148$$

Outro xeito é que nunha fila (ou nunha columna) obteñamos varios elementos 0 sumandolle unha combinación lineal das demais filas (ou columnas) e logo aplica-la fórmula. Lembra que o determinante non varia ó facer esas transformacións:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3^{\text{a fila}} - 1^{\text{a fila}}]{2^{\text{a fila}} + 1^{\text{a fila}}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{desenvolvendo pola 2ª columna}]{=} -1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & 7 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 148$$

Problemas propostos

1 ¿Como teñen que se-las ordes de dúas matrices A e B para poder face-los productos A·B e B·A? Xustifica a resposta.

2 Calcula-la matriz inversa de $I - A$ sendo I a matriz identidade de orden 3x3 e A a matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Estudia para que valores de k a matriz A ten inversa e calcula a inversa no caso de k=3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & k \\ 4 & -k & 3 \end{pmatrix}$$

4 Calcula o rango das seguintes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -6 & 4 & -7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & 3 & 3 \\ -1 & -14 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

5 Estudia segundo os valores de k cal é o rango das seguintes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ 4 & k & -4 \\ 6 & 3 & -6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ 2k & 2 & -4 \\ 6 & 3 & -3k \end{pmatrix}$$

6 Estudia segundo os valores dos parámetros a e b cal é o rango da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -a & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & b \\ 2 & -5 & a & -2 \end{pmatrix}$$