

# Unidade 3: Programación lineal

1. Introducción: un problema sen solución.
2. Inecuacións lineais
3. Resolución de inecuacións lineais:
4. Programación Lineal.
  - 4.1. Solución gráfica
  - 4.2. Solución analítica.
5. Exercicios resoltos.
6. Exercicios propostos.

## Introducción

### *Un problema sen solución*

Dispoñemos de dous tipos de alimentos coas seguintes características:

| Alimento | Proteínas | Graxas | Fibra |
|----------|-----------|--------|-------|
| A        | 30%       | 10%    | 5%    |
| B        | 10%       | 15%    | 25%   |

Tendo en conta que se necesitan 40 gr. de proteínas, 60 gr. de graxas e 30 gr. de fibra diarios ¿Que cantidade se deberá tomar de cada alimento?

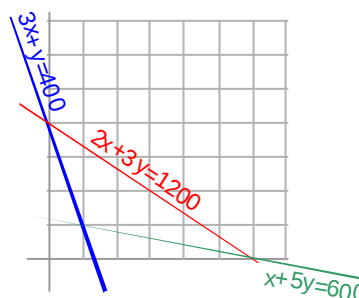
$$\left. \begin{aligned} \frac{30x}{100} + \frac{10y}{100} &= 40 \\ \frac{10x}{100} + \frac{15y}{100} &= 60 \\ \frac{5x}{100} + \frac{25y}{100} &= 30 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} 3x + y &= 400 \\ 2x + 3y &= 1200 \\ x + 5y &= 600 \end{aligned} \right\}$$

Ó resolvelo atoparémonos cun sistema de tres ecuacións e dúas incógnitas: Ese sistema non ten solución. Pero trátase dun problema “real” que semella debe ter unha solución

Investiguemos a razón de que non teña solución. As ecuacións lineais con dúas incógnitas pódense representar graficamente. A súa gráfica é unha recta.

Resolver o sistema é atopar o punto de corte das rectas. Comprobamos que as rectas cortanse dúas a dúas pero non as tres no mesmo punto.

Non é pois posible atopar unha combinación deses alimentos que



proporcione xustamente 30 g de proteínas, 60 g de graxas e 20 g de fibra. Para que o problema poda ter solución temos que redefinir as condicións do mesmo e esa esixencia de que teñan que ser necesariamente 30 gr. de proteínas, 60 gr. de graxas e 20 gr. de fibra é demasiado forte e tamén pouco realista.

É moito máis real se pedimos que as proteínas sexan, polo menos, 40 gr., as graxas 60 gr. como máximo e a fibra 30 gr. como mínimo.

Prantexado así, obtemos un sistema de INECUACIONES:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{30x}{100} + \frac{10y}{100} \geq 40 \\ \frac{10x}{100} + \frac{15y}{100} \leq 60 \\ \frac{5x}{100} + \frac{25y}{100} \geq 30 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + y \geq 400 \\ 2x + 3y \leq 1200 \\ x + 5y \geq 600 \end{array} \right\}$$

É doado decatarse de que agora o problema ten moitas solucións:  $x=100$  e  $y=300$ ,  $x=200$  e  $y=200$ ,  $x=300$  e  $y=200$ ,  $x=350$  e  $y=100$ ,  $x=400$  e  $y=100$ , ....

Para poder elixir unha desas solucións necesitaremos algún criterio. Por exemplo, se o alimento A custa 0.03€/g e o B custa 0.01€/g, podemos intentar atopar a combinación que custe o menos posible.

Esa é a formulación típica dun problema de **Programación Lineal**: temos que atopar os valores dunhas incógnitas de xeito que se verifiquen unha serie de condicións e que unha certa función que depende deses valores sexa o maior ou o menor posible.

Un problema de programación lineal constará de:

- Un conxunto de restricións (as inecuacións).
- Unha función a optimizar (o custo).

Nos só abordaremo-lo caso de dúas incógnitas, que se resolve graficamente. Para resolve-lo caso xeral hai varios métodos, o máis coñecido é o **Método do Simplex**.

# Programación lineal

## Inecuacións lineais.

Unha inecuación lineal con dúas incógnitas é unha expresión similar a unha ecuación lineal de dúas incógnitas agás no feito de que o signo “=” é substituído por un signo de desigualdade, “ $\geq$ ” (maior ou igual) ou “ $\leq$ ” (menor ou igual):

$$ax + by \geq c \quad \text{ou} \quad ax + by \leq c$$

Neste tipo de expresión podemos realizar moitas das transformacións que realizamos coas ecuacións pero, cando dividimos ou multiplicamos por un número negativo é necesario invertir o sentido do signo de desigualdade:

- Traspoñer termos (suma alxébrica):

$$A + B \geq C \Leftrightarrow A \geq C - B$$

- Traspoñer termos (producto por un número positivo):

$$A \cdot B \geq C \Leftrightarrow A \geq \frac{C}{B} \quad (B > 0)$$

- Traspoñer termos (producto por un número negativo):

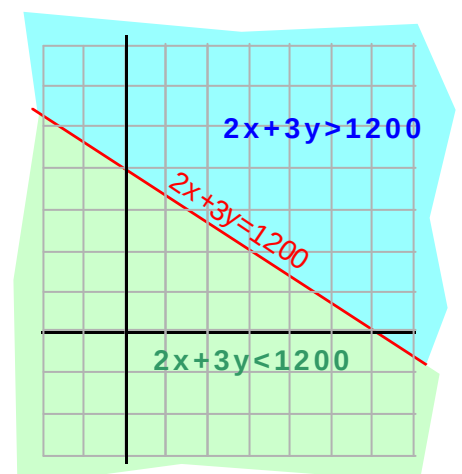
$$A \cdot B \geq C \Leftrightarrow A \leq \frac{C}{B} \quad (B < 0)$$

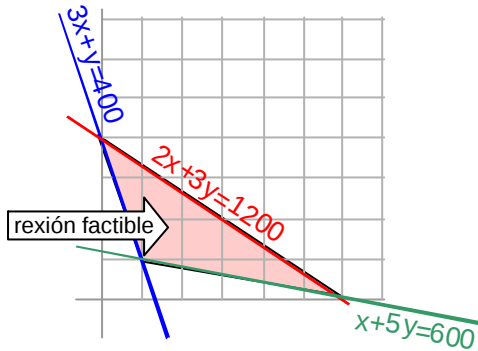
A razón de este estrano comportamento dos signos de desigualdade está en que, nos números negativos, un número é máis pequeno canto canto maior sexa o seu valor absoluto. Xusto o contrario do que sucede cos positivos:  $5 \geq 3 \Leftrightarrow -5 \leq -3$ .

## Resolución de inecuacións lineais

Lembra que os valores de  $x$  e  $y$  que resoven unha ecuación lineal do tipo  $ax + by = c$  forman unha recta no plano.

Esa recta divide ao plano en dúas partes. Todos os puntos dun dos lados verifican a desigualdade nun sentido e todos os puntos do outro lado verifican a desigualdade no sentido contrario.

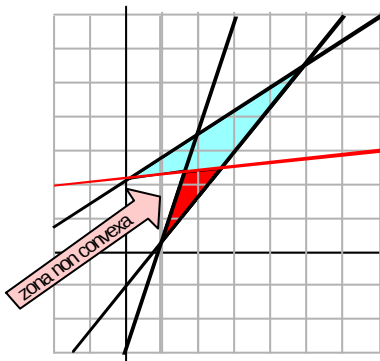




Para resolver unha inecuación lineal con dúas incógnitas só temos que representar a ecuación e seleccionar a parte do plano que verifica a desigualdade que nos interesa.

Se o que queremos resolver é un sistema de inecuacións, só debemos repetir o proceso con cada unha das inecuacións.

Dese xeito obtemos unha rexión do plano limitada por segmentos rectilíneos que recibe o nome de **rexión factible**.



A rexión factible NON pode ter entrantes como o da figura pois, por exemplo, a zona encarnada non podería pertencer a esa rexión por estar por abaixo da recta encarnada.

## Programación lineal

A formulación típica dun problema de **Programación Lineal** consta de:

- Un conxunto de restriccións en forma de inecuacións lineais.
- Unha función, tamén lineal, a optimizar suxeita a esas restriccións.

Pódese demostrar que a rexión factible, cando as restriccións son lineais, forma unha rexión do plano limitada por unha poligonal e que é convexa. É dicir, que non ten entrantes nin buratos no seu interior.

A solución do problema de programación lineal serán os valores das incógnitas onde a función obxectivo tome o valor óptimo (máximo ou mínimo segundo o caso).

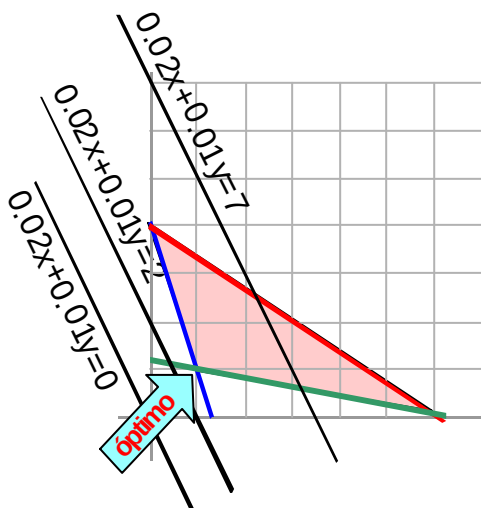
Necesariamente, ao ser a rexión factible convexa, a solución óptima serán as coordenadas dun vértice (solución única) ou as coordenadas dos puntos dunha aresta (infinitas solucións).

Para atopar o óptimo podemos empregar dous métodos: graficamente e analiticamente.

**Graficamente:** dándolle á función obxectivo algúns valores arbitrarios e representandoas, resultan rectas paralelas e, canto maior sexa o valor, a recta está máis alta.

Se buscamos un **mínimo** desa función só debemos coller o punto ou puntos, da rexión factible, que estén na paralela **máis baixa**.

En cambio, se buscamos un **máximo** colleremos o punto ou puntos que estén na paralela **máis alta**.



**Analiticamente:** A solución óptima é necesariamente algún dos vértices da rexión factible.

Cada vértice está situado na intersección de dúas das restriccións, para calculalos só teremos que resolver o sistema formado por esas restriccións despois de substituír o signo de desigualdade polo de igualdade.

Unha vez calculados os vértices, calculamos o valor da función obxectivo en cada un e elegimos aquel ou aqueles nos que se acaden o valor óptimo.

No caso de que exista máis de un vértice que acade o valor óptimo, tamén serán solucións todos os puntos da aresta entre eses vértices.

### Exercicio:

Para o tratamento dunha certa enfermidade hai que administrar tres vitaminas: X, Y, Z. Cada semana é preciso consumir aló menos 60 mgrs. da vitamina X, 50 mgrs da Y e 80 mgrs da Z.

Estas vitaminas preséntanse en dous preparados: o A, con un custo de 0.1 € cada 50 mgrs e cunha composición dun 20% de X, un 40% de Y e un 40% de Z; e o preparado B, con un custo de 0.25 € cada 100 mgrs e unha composición dun 30% de X, un 50% de Y e un 20% de Z.

- Debuxa a rexión factible.
- ¿Pódese prescindir dalgunha restricción?
- ¿Que cantidade de cada preparado fará máis económico o tratamento?

### Resolución:

- A pesar das X, Y e Z, este é un problema de programación lineal e, Incógnitas: *x* **cantidade do composto A**  
*y* **cantidade do composto B**

As restriccións refírense a cantidades de vitaminas, expresadas en miligramos, polo que debemos averiguar cantos mgrs. Son as seguintes:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ \frac{20x}{100} + \frac{30y}{100} \geq 60 \\ \frac{40x}{100} + \frac{50y}{100} \geq 50 \\ \frac{40x}{100} + \frac{20y}{100} \geq 80 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y \geq 600 \\ 4x + 5y \geq 500 \\ 2x + y \geq 400 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Función Obxectivo (fixarse en que os custos de cada preparado

refírense a cantidades diferentes):  $z \equiv \frac{0.1}{50} \cdot x + \frac{0.25}{100} \cdot y$

Empezamos por calcular, graficamente, a rexión factible:

- Representamos a recta  $2x + 3y = 600$  (a 1ª restricción substituíndo o signo de “ $\geq$ ” por “ $=$ ”).
- Seleccionamos a parte do plano que verifica a desigualdade. Basta elixir un punto fóra da recta e comprobar se verifica a desigualdade  $2x + 3y \geq 600$ :

En cada vértice córtanse dúas rectas, calculámdos resolvendo os sistemas correspondentes:

#### 1º Vértice:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 1200 \\ x + 5y = 600 \end{array} \right\} x = 600 - 5y$$

$$2(600 - 5y) + 3y = 1200$$

$$-7y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 600 \end{cases}$$

$$\text{Custo : } 0.02 \cdot 600 + 0.01 \cdot 0 = 12$$

#### 2º Vértice:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 400 \\ x + 5y = 600 \end{array} \right\} y = 400 - 3x$$

$$x + 5(400 - 3x) = 600$$

$$-14x = -1400 \Rightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 100 \end{cases}$$

$$\text{Custo : } 0.02 \cdot 100 + 0.01 \cdot 100 = 3$$

#### 3º Vértice:

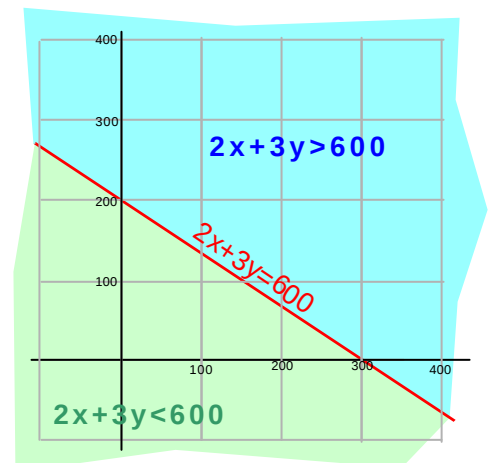
$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 400 \\ 2x + 3y = 1200 \end{array} \right\} y = 400 - 3x$$

$$2x + 3(400 - 3x) = 1200$$

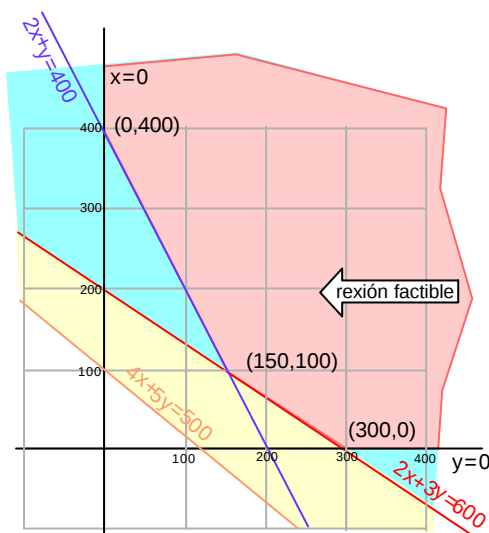
$$-7x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 400 \end{cases}$$

$$\text{Custo : } 0.02 \cdot 0 + 0.01 \cdot 400 = 4$$

O óptimo é pois  $x=100$  e  $y=100$  e o custo mínimo é de 3€.



O (0,0) non verifica a desigualdade:  
 $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \geq 600$  (falso)  
 Por tanto temos que elixir o lado contrario a onde está o (0,0).



- o Se o punto verifica a desigualdade quedamos co lado do plano que se atopa o punto.
- o Se non a verifica elegimos o lado contrario

Repetimos o proceso coas seguintes restrici3ns e obtemos a rexi3n factible da figura.

b) F3xate que a restrici3n  $4x + 5y \geq 500$  non ten ningunha influencia para delimitar a rexi3n factible. 3 sup3rflua.

c) A soluci3n 3ptima ser3 alg3n dos v3rtices da rexi3n factible:

$$\bullet \text{ 1}^\circ \text{ V3rtice: } \begin{cases} 2x + 3y = 600 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 2x = 600 \rightarrow \begin{cases} x = 300 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ 2}^\circ \text{ V3rtice: } \begin{cases} 2x + 3y = 600 \\ 2x + y = 400 \end{cases} \xrightarrow{\text{restando}} 2y = 200 \rightarrow y = 100$$

$$2x + 100 = 400 \rightarrow x = \frac{300}{2} \rightarrow x = 150$$

$$\bullet \text{ 3}^\circ \text{ V3rtice: } \begin{cases} 2x + y = 400 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 400 \\ x = 0 \end{cases}$$

Estudiamos o valor da funci3n obxectivo en cada un dos v3rtices:

$$\bullet \text{ 1}^\circ \text{ V3rtice: } z = \frac{0.1}{50} \cdot 300 + \frac{0.25}{100} \cdot 0 = 0.6 \text{ €}$$

$$\bullet \text{ 2}^\circ \text{ V3rtice: } z = \frac{0.1}{50} \cdot 150 + \frac{0.25}{100} \cdot 100 = 0.575 \text{ €}$$

$$\bullet \text{ 3}^\circ \text{ V3rtice: } z = \frac{0.1}{50} \cdot 0 + \frac{0.25}{100} \cdot 400 = 1 \text{ €}$$

A soluci3n 3ptima 3 100 mgr do preparado A e 150 mgr do preparado B e ten un custo de 0.575 €

## Exercicio:

Unha empresa de transportes disp3n de 6 autobuses de 60 prazas e 10 microbuses de 20 prazas. Sup3nendo que se necesita trasladar a 400 pasaxeiros, p3dese:

- Cantos coches de cada tipo poden usarse.
- N3mero de coches de cada tipo que deben usarse para que o custo sexa m3nimo sabendo que o pre3o dos autobuses 3 de 0.7 €/km. e o dos microbuses 3 de 0.4 €/km.

## Resoluci3n:

a) Sexan:

*x o n3mero de autobuses que debemos usar*

*y o n3mero de microbuses que debemos usar.*

As restrici3ns que se te3en que satisfacer son, por unha banda os autobuses e microbuses dos que dispo3nemos e, por outra, que debemos garantir unha praza para cada pasaxeiro:

$$\text{Hai seis autobuses} \rightarrow x \leq 6$$

$$\text{Hai dez microbuses} \rightarrow y \leq 10$$

$$\left( \begin{array}{c} \text{pasax. autobuses} \\ 60 \cdot x \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{pasax. microbuses} \\ 20 \cdot y \end{array} \right) \geq 400$$

$$\left. \begin{array}{l} 6 \geq x \geq 0 \\ 10 \geq y \geq 0 \\ 3x + y \geq 20 \end{array} \right\} \text{Resultan desigualdades:}$$

Representando esas inecuacións resulta a rexión factible que aparece na figura.

Tanto x coma y só poden tomar valores naturais, a rexión factible estará formada só polos puntos con coordenadas enteiras (os puntos da cuadrícula).

b) Neste tipo de problemas, cando só podemos admitir solucións enteiras, compre buscar o óptimo de xeito gráfico para evitar falsas solucións.

A función obxectivo será o custo por quilómetro:

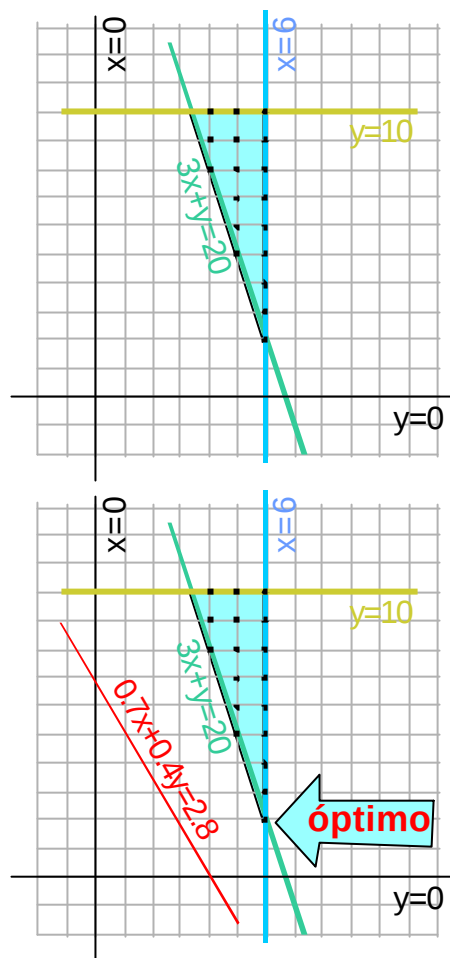
$$z \approx 0.7x + 0.4y$$

Damoslle ao custo un valor arbitrario, por exemplo 2.8 (para que sexa múltiplo de 0.7 e de 0.4), e representámolo:

$$0.7x + 0.4y = 2.8$$

Dado que as solucións teñen que ser enteiras, só temos que fixarnos na representación gráfica e vemos que o punto de coordenadas (6,2) é o que nos da o custo mínimo que será.

$$z \approx 0.7 \cdot 6 + 0.4 \cdot 2 = 5 \text{ €/km}$$



### Exercicio:

Un camión do modelo A cobra 90 € por viaxe e pode transportar 1 máquina do tipo M e 3 do tipo Q. Un camión do tipo B cobra 60 € e pode levar 3 do tipo M e 1 do tipo Q.

Necesítase transportar 11 máquinas do tipo M e 14 do tipo Q. ¿Cantos camiões se deben usar de cada modelo para que o custo sexa mínimo?

### Resolución:

Como ves, trátase dun problema de Programación Lineal.

Empezamos por poñerlle nomes as incógnitas:

**x** núm.de camiões tipo A

**y** núm.de camiões tipo B

Podemos formular as seguintes restriccións:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y \geq 11 \\ 3x + y \geq 14 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

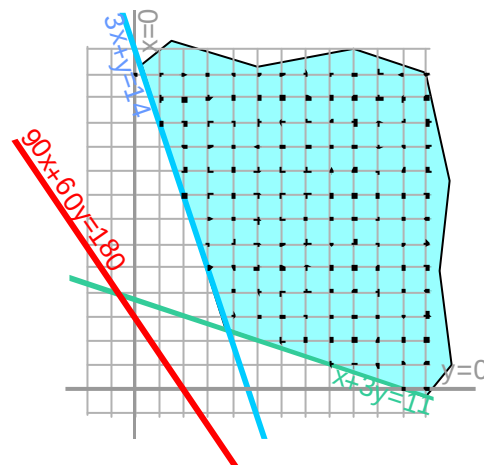
Función obxectivo (custo):  $z \approx 90x + 60y$

Dado que as solucións só poden números enteiros, resolverémolo graficamente.

Despois de obter a rexión factible, damoslle o valor 180 (múltiplo de 90 e de 60) a función obxectivo e representámola.

Vemos que a **solución óptima** é (4,3) e o custo:

$$z \approx 90 \cdot 4 + 60 \cdot 3 = 600 \text{ €}$$





# Exercicios e actividades

1. Dado o seguinte conxunto de restriccións lineais:
- $$\left. \begin{array}{l} -x + 2y \leq 6 \\ 4x - 2y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$
- Atopa cal é a rexión factible.
  - Calcula os valores de  $x$  e  $y$  que verifican as restriccións anteriores e fan máximo o valor da expresión  $3x+4y$

2. Dado o seguinte conxunto de restriccións lineais:
- $$\left. \begin{array}{l} 2x + 4y \leq 20 \\ 3x - 2y \geq 6 \\ x \geq 3 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$
- Atopa cal é a rexión factible.
  - Calcula os valores de  $x$  e  $y$  que verifican as restriccións anteriores e fan mínimo o valor da expresión  $3x+4y$ .
  - Calcula os valores de  $x$  e  $y$  que verifican as restriccións anteriores e fan máximo o valor da expresión  $4x+8y$ . ¿Cantas solucións hai?

3. Calcula-lo máximo e o mínimo da función  $z=4x+y$  suxeita as seguintes restriccións:
- $$\left. \begin{array}{l} -x + 6y \geq 12 \\ x + 2y \leq 20 \\ 3x + 2y \geq 24 \end{array} \right\}$$

4. Unha empresa produce dous bens A e B. Ten dúas factorías e cada unha delas produce os dous bens nas cantidades por hora seguintes:

|       | Factoría 1       | Factoría 2       |
|-------|------------------|------------------|
| Ben A | 10 unidades/hora | 20 unidades/hora |
| Ben B | 25 unidades/hora | 25 unidades/hora |

A empresa recibe un pedido de 300 unidades de A e 500 de B. Os custos de funcionamento das dúas factorías son 10.000 pesetas por hora para a factoría 1 e 8.000 pesetas por hora para a factoría 2. ¿Cantas horas debe funcionar cada factoría para mellora-los custos da empresa e satisface-lo pedido? (3 puntos).

5. Nuns grandes almacéns ofrecen o lote A formado por 3 pantalóns e 1 camisa ó prezo de 15000 ptas, e o lote B que consta de 1 pantalón e 3 camisas por 10000 ptas ¿Cantos lotes teño que mercar se preciso, alomenos, 11 camisas e 14 pantalóns facendo o menor gasto posible? Sinala sobre este problema: a rexión factible, as restriccións e a función obxectivo.
6. Un pequeno taller fabrica coches e camións en miniatura. Dispón de dúas seccións: A(motores) e B(carrocerías e montaxes), que traballan simultaneamente. Para fabricar cada unidade necesítanse, en cada sección, as horas que se indican na táboa:

|        | A  | B  |
|--------|----|----|
| Coche  | 10 | 10 |
| Camión | 40 | 10 |

Supóñase que en A non se pode traballar máis de 200 horas ó mes e que en B non máis de 80. Se os beneficios por coche e camión son de 30 e 40 miles de pta respectivamente, ¿cantos coches de cada tipo se deben fabricar cada mes para obte-lo máximo beneficio?

7. Nunha situación de catástrofe, producida por inundacións, o goberno dun país ten que evacuar a 1000 persoas dunha certa zona cunha equipaxe de 150 toneladas. Unha compañía de aviación oferta avións de dous tipos A e B ó prezo de 20 millóns os do tipo A e 60 millóns os do tipo B. Cada avión tipo A pode transportar 100 pasaxeiros e 25 toneladas de equipaxe, mentras que os de tipo B poden transportar 200 pasaxeiros e 15 toneladas de equipaxe. Se dispoñen de 6 avións de tipo A e 8 avións tipo B ¿Cantos deben alugar de cada tipo para que o transporte custe o menos posible?

8. Un empresario fabrica dous produtos A e B, que vende con 4.500 pesetas de beneficio o produto A e con 6.000 pesetas de beneficio o produto B.

A súa maquinaria condiciónalle a produción de forma que, diariamente, non pode facer máis de 400 produtos A, nin máis de 300 produtos B, nin máis de 500 en total.

Supoñendo que vende toda a produción, ¿cantos produtos de cada clase debería fabricar para obter o maior beneficio posible?.

9. Unha compañía extrae minerais dunha mina con dous filóns I e II. O número de quilogramos de minerais A e B que se pode extraer de cada tonelada dos filóns I e II está descrito na táboa adxunta xunto cos custos por tonelada. Se a compañía debe extraer polo menos 3000 kg de A e 2500 kg de B, ¿cantas toneladas de cada filón se deben procesar co fin de minimiza-lo custo?

|                    | Filón I    | Filón II   |
|--------------------|------------|------------|
| Mineral A          | 100 quilos | 200 quilos |
| Mineral B          | 200 quilos | 50 quilos  |
| Custo por tonelada | 50 dólares | 60 dolares |

10. Maximiza -la función  $z=5x+2y$ , coas seguintes restriccións:

$$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad 2x + y \leq 6 \quad 4x + y \leq 10 \quad -x + y \leq 3$$

11. Os alumnos dun colexio, teñen 120 camisetas, 110 pañuelos e 70 gorros. Co fin de obter diñeiro para a viaxe de fin de curso, vanos poñer á venda en dous paquetes distintos; polo primeiro (dúas camisetas, un pañuelo e un gorro) cobrarán 600 pesetas; e polo segundo (unha camiseta, dous pañuelos e un gorro) 700 pesetas. ¿Cantos paquetes de cada tipo deberán vender para obte-lo máximo beneficio?
12. Debuxa o recinto que cumpre as restriccións:  $0 < y$ ,  $0 < x < 10$ ,  $x < y$ ,  $y - 2x < 6$ ,  $3x + 4y > 24$ . Maximiza-la función  $F(x, y) = x + y + 1$  coas restriccións anteriores.
13. Debuxa a rexión determinada polas inecuacións  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $x + y < 6$ ,  $2x + y < 10$ ,  $x + y > 3$  e maximiza a función  $z = 4x + 3y$  sometida ás restriccións dadas por estas inecuacións.
14. Un empresario fabrica dous produtos A e B. A fabricación dun kilogramo de A necesita 4 horas de traballo e un gasto de 60 euros en material, obténdose un beneficio de 45 euros. A fabricación dun kilogramo de B necesita 8 horas de traballo e un gasto de 48 euros en material, obténdose un beneficio de 33 euros. Cada semana o empresario dispón de 200 horas de traballo. Ademais, asinou un contrato que o obriga a fabricar un mínimo de 15 kg. de A e 10 kg. de B. Se non pode gastar máis de 1920 euros en material, ¿cantos kilogramos por semana debe fabricar de cada produto para obte-lo máximo beneficio posible?
15. Deséxase investir 3000 euros en dous tipos de accións A e B. O tipo A ten bastante risco, cun interés anual do 10% e o tipo B é bastante segura, cun interés anual do 7%. Decídese investir como máximo 1800 euros en A e como mínimo 600 euros en B e ademais, investir en A tanto ou máis que en B. ¿Cal debe se-la distribución do investimento para obte-lo máximo interés anual?