



3

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEAIS

Programa:

1. **Sistemas de ecuacións lineais.**
 - 1.1. **Definición.**
 - 1.2. **Tipos de sistemas.**
 - 1.3. **Forma matricial dun sistema de ecuacións lineais.**

2. **Teorema de Rouche-Frobenius.**
 - 2.1. **Enunciado.**
 - 2.2. **Discusión dun sistema de ecuacións lineais.**

3. **Regra de Cramer.**
 - 3.1. **Enunciado e demostración.**
 - 3.2. **Resolución de sistemas coa Regra de Cramer.**

Sistemas lineais

Sistemas lineais: Un sistema de ecuacións lineais de n ecuacións e m incógnitas é un sistema da forma:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned} \right\}$$

Matriz do sistema: Á matriz $A = (a_{ij})_{n \times m}$ chamarémoslle **matriz do sistema** ou **matriz dos coeficientes**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada: É a matriz que resulta de engadirlle á matriz A a columna dos termos independentes, $B = (b_i)_{n \times 1}$:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

Sistemas equivalentes: **¡Error! Marcador no definido.** Dous sistemas son **equivalentes** cando teñen o mesmo conxunto de solucións.

Resolver un sistema é ir transformando ese sistema noutros equivalentes, pero máis simples, ata ter despexadas as incógnitas.

Hai moitos xeitos de obter sistemas equivalentes:

- Multiplicar unha ecuación por un número distinto de 0.
- Sumar a unha ecuación unha combinación lineal das demais.
- Despexar unha incógnita nunha ecuación e substituíla nas demais.
- Despexar unha incógnita en varias ecuacións e igualalas expresións que se obteñen.

Sistema homoxéneo: É un sistema de ecuacións lineais que ten tódolos termos independentes 0:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Os sistemas homoxéneos sempre teñen polo menos a solución que fai tódalas incógnitas 0. Esa solución recibe o nome de **trivial**.

Exemplo:

Un sistema lineal de 2 ecuacións e 3 incógnitas:

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y - z &= -1 \\ 5x - 2y + 7z &= 3 \end{aligned} \right\}$$

Matriz do sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemplo:

Sistema homoxéneo:

$$\left. \begin{aligned} -2x + y + 4z &= 0 \\ 3x - 5y + 2z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Sempre ten, polo menos, a solución que fai tódalas incógnitas 0: $x=0$, $y=0$ e $z=0$.

$$\left. \begin{aligned} -2 \cdot 0 + 0 + 4 \cdot 0 &= 0 \\ 3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Neste caso, esa solución non é única: Por exemplo $x=22$, $y=16$ e $z=7$ é outra solución

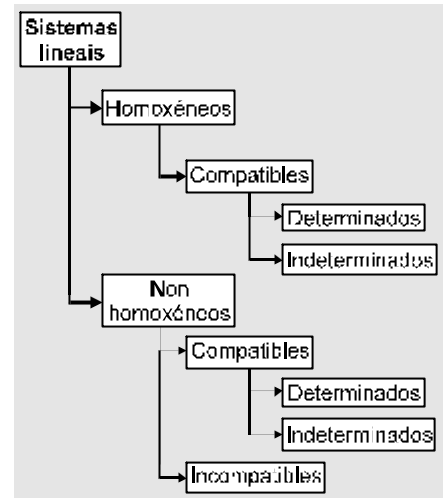
Tipos de sistemas lineais

Atendendo á compatibilidade e o número de solucións, un sistema de ecuacións lineais pode ser:

- **Compatible:** Se ten solución.
- **Incompatible:** Cando non ten solución.
- **Determinado:** Ten unha única solución.
- **Indeterminado:** Ten moitas solucións.

Os sistemas homoxéneos son sempre compatibles porque teñen, polo menos, a solución que fai tódalas incógnitas 0.

Esa solución recibe o nome de trivial.



Teorema de Rouché-Frobenius

Un sistema de ecuacións lineais ten solución se, e só se, o rango da matriz dos coeficientes é igual ó da matriz ampliada:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{array} \right\} \text{ compatible} \Leftrightarrow \text{rango}(A) = \text{rango}(M)$$

Ademais, se os rangos son iguais ó número de incógnitas, o sistema é determinado: $\text{Rango}(A) = \text{rango}(B) = m$

Témo-las seguintes posibilidades:

1. $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$: Sistema compatible
 - 1.1 $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = n^\circ$ de incógnitas: Determinado
 - 1.2 $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) < n^\circ$ de incógnitas: Indeterminado
2. $\text{rang}(A) < \text{rang}(B)$: Sistema incompatible

Matrices e sistemas de ecuacións lineais

Tendo en conta a definición de produto de matrices, un sistema lineal pódese escribir como un produto de matrices:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Cando a matriz do sistema é cadrada, se existe a matriz A^{-1} (inversa de A), podemos resolve-lo sistema multiplicando por ela:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \xrightarrow{\text{asociativa}} (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B \xrightarrow{\text{neutro}} X = A^{-1} \cdot B$$

Exemplo:

$$\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 9 \\ 7x + 3y + z = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Regra de Cramer

Un sistema lineal de n ecuacións e n incógnitas ten solución única se e só se o determinante da matriz do sistema non é 0.

$$\left[\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{compatible} \\ \text{determinado} \end{array} \Leftrightarrow [\det(A) \neq 0]$$

Nese caso, as solucións veñen dadas por:

$$\forall k = 1 \dots n \Rightarrow x_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \overset{k}{b_1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

Para calcula-lo valor de x_k substituímo-la columna k da matriz dos coeficientes pola columna dos termos independentes.

Demostración:

“**Ü**” Cando o sistema ten tantas ecuacións coma incógnitas, a matriz do sistema é cadrada. Se $\det(A) \neq 0$ entón existe A^{-1} (inversa de A) e, tal como vimos antes, podemos resolve-lo sistema multiplicando pola inversa:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Fíxémonos ademais no valor das incógnitas:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

A solución obtense como un produto de matrices. x_k resulta de multiplica-los elementos da fila k da matriz A^{-1} polos termos independentes, b_j : $x_k = \frac{A_{1k} \cdot b_1 + A_{2k} \cdot b_2 + \dots + A_{nk} \cdot b_n}{\det(A)}$

O numerador desa expresión coincide co desenvolvemento do determinante da matriz que se obtén ó substituír na matriz do sistema a columna k polos termos independentes:

$$\forall k = 1 \dots n \Rightarrow x_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \overset{k}{b_1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

“**P**” Para demostrar esta implicación recorreremos á interpretación vectorial do sistema:

Se o sistema ten solución única, polo teorema de Rouche, sabemos que: $\text{rang}(A) = \text{rang}(M) = n$.

$\text{Rango}(A)=n$ implica que os n vectores A_1, \dots, A_n teñen que ser independentes e polo tanto o determinante da matriz A ten que ser distinto de 0.

Problemas resoltos

1 Estudia a compatibilidade segundo os valores do parámetro k do sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + ky - 3z = 1 \\ x + 2y + z = -2 \\ -kx + y + 4z = -3 \end{array} \right\}$$

Solución: Empezamos por comprobar para que valores de k o sistema é de Cramer (compatible determinado).

$$\left. \begin{array}{l} 2x + ky - 3z = 1 \\ x + 2y + z = -2 \\ -kx + y + 4z = -3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{compatible} \\ \text{determinado} \end{array} \Leftrightarrow [\det(A) \neq 0]$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & k & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -k & 1 & 4 \end{pmatrix} = 16 - k^2 - 3 - 6k - 2 - 4k = -k^2 - 10k + 11$$

$$-k^2 - 10k + 11 = 0 \Rightarrow k = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 11}}{2 \cdot (-1)} = \frac{10 \pm 12}{-2} = \begin{cases} k_1 = -11 \\ k_2 = 1 \end{cases}$$

Caso I ($k^1 - 11$ e $k^1 1$): $\det(A) \neq 0$. O sistema é compatible determinado.

Caso II ($k = -11$): Estudiámo-los rangos da matriz dos coeficientes e da matriz ampliada.

Como $\det(A) = 0$, o rango de A ten que ser menor de 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -11 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 11 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } A) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 2 & -11 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 11 = 15 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } A) = 2 \end{cases}$$

Como o rango de A é 2, só temos que comprobar se o rango de M é 3 estudiando o menor de orde 3 que resulta ó *orlar* cos termos independentes ó menor de orde 2 que nos deu o rango de A :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -11 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 11 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} (\text{rango de } M) \geq (\text{rango de } A) = 2 \\ \begin{vmatrix} 2 & -11 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 11 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 180 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } M) = 3 \end{cases}$$

O sistema é incompatible (os rangos son diferentes).

Caso III ($k = 1$): Volvemos estudia-los rangos.

Como $\det(A) = 0$, o rango de A ten que ser menor de 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } A) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } A) = 2 \end{cases}$$

Comprobamos se o rango de M é 3 *orando* coa columna dos termos independentes ó menor de orde 2 que nos deu o rango de A :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} (\text{rango de } M) \geq (\text{rango de } A) = 2 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\text{rango de } M) = 2 \end{cases}$$

O sistema é compatible indeterminado.

2 Estudia a compatibilidade do seguinte sistema de ecuacións en función dos parámetros a e b :

$$\left. \begin{aligned} x + ay - az &= 3 \\ ax - y + az &= 2 \\ -ax - y + z &= b \end{aligned} \right\}$$

Solución: Investigamos cando a matriz dos coeficientes ten determinante distinto de 0:

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & -1 & a \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix} \right| = -1 - a^3 + a^2 + a^2 - a^2 + a = -a^3 + a^2 + a - 1$$

$$-a^3 + a^2 + a - 1 = 0$$

$$1 \left| \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & -1 & & \\ & -1 & 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & 1 & 0 & & \end{array} \right. \quad -a^3 + a^2 + a - 1 = (a-1) \cdot (-a^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a-1 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ -a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1 \end{cases}$$

Caso I ($a^1 - 1$ e $a^1 - 1$): O sistema é compatible determinado ($\det(A) \neq 0$).

Caso II ($a=1$): Estudíamo-los rangos da matriz dos coeficientes e da matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right| = -1 - 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } A) = 2$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

$$(\text{rango de } M) \geq (\text{rango de } A) = 2$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & b \end{array} \right| = -2b - 6 \Rightarrow \begin{cases} -2b - 6 = 0 \Leftrightarrow b = -3 & (\text{rango de } M = 2) \\ -2b - 6 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq -3 & (\text{rango de } M = 3) \end{cases}$$

Se $b = -3$ o sistema é *compatible indeterminado* e, se $b \neq -3$, o sistema é *incompatible*.

Caso III ($a=-1$): Volvemos estudia-los rangos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{array} \right| = -1 - 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } A) = 2$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

$$(\text{rango de } M) \geq (\text{rango de } A) = 2$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & b \end{array} \right| = -2b + 6 \Rightarrow \begin{cases} -2b + 6 = 0 \Leftrightarrow b = 3 & (\text{rango de } M = 2) \\ -2b + 6 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 3 & (\text{rango de } M = 3) \end{cases}$$

Se $b = 3$, os rangos son iguais pero menores co número de incógnitas: o sistema é compatible indeterminado

Se $b \neq 3$ é incompatible.

3 Estudia para que valores de k son independentes os vectores $(k, 1, 1)$, $(1, k, 1)$ e $(1, 1, k)$

Solución: Son independientes se só hai unha combinación lineal deles que dea o vector (0,0,0) ou, o que é o mesmo, se é compatible determinado o sistema:

$$x(k,1,1) + y(1,k,1) + z(1,1,k) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + ky + z = 0 \\ x + y + kz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} = k^3 + 1 + 1 - k - k - k = k^3 - 3k + 2$$

$$k^3 - 3k + 2 = 0$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & 1 & 0 & -3 & 2 & & \\ -2 & & -2 & 4 & -2 & & \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 0 & & \end{array}$$

$$k^3 - 3k + 2 = (k + 2) \cdot (k^2 - 2k + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k + 2 = 0 \Rightarrow k = -2 \\ k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k = 1 \end{cases}$$

Os vectores son independentes cando $k \neq -2$ e $k \neq 1$ (fixate que ó se-lo sistema homoxéneo non é necesario estudia-la compatibilidade., sempre son compatibles).

4 Discutir e resolver, segundo o valor de a , o sistema:

$$\begin{cases} (1+a)x + y + z = 1 \\ x + (1+a)y + z = (1+a) \\ x + y + (1+a)z = (1+a)^2 \end{cases}$$

Solución: Empezamos por indagar cando a matriz dos coeficientes ten determinante distinto de 0:

$$\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix} = (1+3a+3a^2+a^3) + 1+1-1-a-1-a-1-a = a^3 + 3a^2$$

$$a^3 + 3a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2(a+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \\ a+3 = 0 \Rightarrow a = -3 \end{cases}$$

Caso I ($a \neq 0$ e $a \neq -3$): O sistema é compatible determinado.

A solución virá dada pola Regra de Cramer:

$$x = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1+a & 1 \\ (1+a)^2 & 1 & 1+a \end{pmatrix}}{a^3 + 3a^2} = \frac{-a^3 - 2a^2}{a^3 + 3a^2} = \frac{-a-2}{a+3}$$

$$y = \frac{\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & (1+a)^2 & 1+a \end{pmatrix}}{a^3 + 3a^2} = \frac{a^2}{a^3 + 3a^2} = \frac{1}{a+3}$$

$$z = \frac{\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1+a \\ 1 & 1 & (1+a)^2 \end{pmatrix}}{a^3 + 3a^2} = \frac{a^4 + 4a^3 + 4a^2}{a^3 + 3a^2} = \frac{a^2 + 4a + 4}{a+3}$$

Caso II ($a=0$): Estudiámo-los rangos da matriz dos coeficientes e da matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{rango de } A = 1) \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{rango de } M = 1)$$

O sistema é compatible indeterminado. O grao de indeterminación é 2, só podemos despxear unha das incógnitas en función das outras:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 - \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{array} \right\}$$

Caso III (a=-3): Volvemos estudia-los rangos.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } A) = 2$$

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} (\text{rango de } M) \geq (\text{rango de } A) = 2 \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } M = 3) \end{cases}$$

Se $a = -3$ o sistema é incompatible.

5 Estudia a compatibilidade do seguinte sistema e resólveo cando teña máis dunha solución:

$$\left. \begin{array}{l} x - ay - z = 1 \\ 2x + 3y - az = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{array} \right\}$$

Solución: Comprobar para que valores de a o sistema é de Cramer (ten solución única):

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 2 & 3 & -a \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 + a^2 - 4 + 3 + 2a + 4a = a^2 + 6a + 5$$

$$a^2 + 6a + 5 = 0 \Rightarrow a = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 4}{2} = \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = -5 \end{cases}$$

Caso I (a¹ -1 e a¹ -5): O sistema é *compatible determinado*.

Caso II (a=-1): Estudiámo-los rangos da matriz dos coeficientes e da matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } A = 2)$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} (\text{rango de } M) \geq (\text{rango de } A) = 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\text{rango de } M) = 2 \end{cases}$$

Neste caso o sistema é *compatible indeterminado*. Vemos que a 3ª ecuación depende das outras (sabemos que é a 3ª porque o menor de A distinto de 0, está formado pola 1ª e a 2ª filas).

A solución podemos calculala utilizando Gauss ou Cramer transformando antes a z nun parámetro.

Ten que se-la z porque é a columna que non se utilizou para no menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

$$\left. \begin{array}{l} x+y=1+t \\ 2x+3y=2-t \\ z=t \end{array} \right\} x = \frac{\begin{vmatrix} 1+t & 1 \\ 2-t & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = 1+4t \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+t \\ 2 & 2-t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = -3t \quad \text{Solución: } \begin{cases} x=1+4t \\ y=-3t \\ z=t \end{cases}$$

Caso III (a=-5): Volvemos estudiar los rangos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 10 = -7 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } A) = 2$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} (\text{rango de } M) \geq (\text{rango de } A) = 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\text{rango de } M = 2) \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado.

Transformamos z en un parámetro para calcular la solución:

$$\left. \begin{array}{l} x+5y=1+t \\ 2x+3y=2-5t \\ z=t \end{array} \right\} x = \frac{\begin{vmatrix} 1+t & 5 \\ 2-5t & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = 1-4t \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+t \\ 2 & 2-t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = t \quad \text{Solución: } \begin{cases} x=1-4t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$$

Problemas propuestos

1 ¿Para que valores de λ son dependientes los vectores $\vec{v}_1 = (3, \lambda, -6)$, $\vec{v}_2 = (-2, 1, \lambda + 3)$ e $\vec{v}_3 = (1, \lambda + 2, 4)$? Pon \vec{v}_1 como combinación lineal de los otros dos siendo λ uno de los valores calculados.

2 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x-2y+z=0 \\ -2x+y-5z=9 \\ x+y+z=-6 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x-2y+z=0 \\ -2x+y-5z=9 \\ x-4y-7z=18 \end{array} \right\}$$

3 Estudia, en función del parámetro k , la compatibilidad de los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x+ky+z=0 \\ kx+y-5z=5+2k \\ x+5y+3z=-1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} kx+y-z=-2 \\ 3x+ky+4z=1 \\ x+y+2z=-3 \end{array} \right\}$$

4 Estudia a compatibilidade dos seguintes sistemas de ecuacións e resólveos cando sexa posible:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ -x + 4y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 5x + 6y - 2z = 0 \\ -3x - 4y + z = 0 \\ 4x + 8y - z = 0 \end{array} \right\}$$

5 Discute e resolve cando sexa posible, o seguinte sistema en función dos valores do parámetro k :

$$\left. \begin{array}{l} x + ky - 3z + kw = 0 \\ kx - y + z - 3w = 0 \\ 5x + 2ky - z = 0 \end{array} \right\}$$

6 Estudia a compatibilidade dos seguintes sistemas e resólveos en función do parámetro a :

$$\left. \begin{array}{l} ax + y = a + 2 \\ 2x - ay = 2 - 2a \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + az = a^2 \end{array} \right\}$$

7 Discutir, segundo os valores do parámetro a , a dimensión do subespacio de \mathbb{R}^3 xerado polos vectores $(4, a, -a)$, $(3a, a + 1, -3)$, $(a, 1, -1)$.

8 Demostra que o conxunto de solucións dun sistema lineal homoxéneo de n ecuacións e m incógnitas é un subespacio vectorial de \mathbb{R}^m .

9 Dado o sistema de ecuacións:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 2 \\ -2x + y - z = 5 \\ x + 3y + z = -1 \end{array} \right\}$$

a) Escríbeo en forma matricial.

b) Calcula a matriz inversa da matriz do sistema e, utilizándoa, calcula a solución do sistema.

10 Un sistema de ecuacións lineais homoxéneo ¿pode ter só dúas solucións?. Xustifica a resposta.

11 Dados os sistemas de ecuacións:

$$\left. \begin{array}{l} 4x - 2y = 2 \\ -6x + 3y = -3 \end{array} \right\} \text{ e } \left. \begin{array}{l} 4x - 2y = 0 \\ -6x + 3y = 0 \end{array} \right\}$$

a) Resólveos e escribe as solucións en forma paramétrica.

b) ¿Hai algunha relación entre as solucións dos dous sistemas? Xustifica a resposta.

12 ¿Para que valores de k os vectores $(1, k, 19)$, $(k, 1, 3)$ e $(k-1, -1, 3-k)$ forman unha base de \mathbb{R}^3 ?

13 Estudia, en función dos valores de k , o rango dos seguinte conxunto de vectores de \mathbb{R}^3 :

$$A = \{(2, k, -1), (-4, k, 6k), (0, 3k, 2), (k + 5, -3, -10)\}$$

14 Demostra que as solucións dun sistema lineal non homoxéneo poden obterse sumandolle a unha solución particular as solución do sistema homoxéneo.

15 Calcula os valores de k para os que o sistema seguinte é compatible e resolveo neses casos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + 3y - z = 5 \\ -x + ky - z = 3 \\ 2kx - 2z = 2k \end{array} \right\}$$

16 Dunha función polinómica de segundo grao, $y = ax^2 + bx + c$, sabemos que a súa gráfica pasa polos puntos $(-1, 11)$, $(2, -1)$ e $(3, 3)$. Calcula a fórmula desa función.