5 Cálculo Diferencial

Programa:

1 **Funcións continuas.**
   - 1.1 **Función continua nun punto. Discontinuidades.**
   - 1.2 **Función continua nun intervalo.**
   - 1.3 **Teorema de Bolzano.**

2 **Derivada dunha función nun punto.**
   - 2.1 **Definición de derivada nun punto. Derivadas laterais.**
   - 2.2 **Interpretación xeométrica do concepto de derivada..**
   - 2.3 **Continuidade e derivabilidade.**

3 **Función derivada.**
   - 3.1 **Definición de función derivada.**
   - 3.2 **Derivadas sucesivas.**

4 **Teoremas de Rolle e do Valor Medio do Cálculo diferencial.**
   - 4.1 **Teorema de Rolle: Enunciado, demostración e interpretación xeométrica.**
   - 4.2 **Teorema do Valor Medio do Cálculo Diferencial: Enunciado, demostración e interpretación xeométrica.**

5 **Crecemento e decrecemento dunha función. Extremos relativos.**
   - 5.1 **Definición de función crecente e decrecente. Interpretación xeométrica.**
   - 5.2 **Intervalos de monotonía dunha función.**
   - 5.3 **Definición de máximos e mínimos locais. Cálculo dos extremos relativos dunha función.**

6 **Regra de L'Hopital.**
   - 6.1 **Enunciado da Regra de L'Hopital.**
   - 6.2 **Aplicación da Regra de L'Hopital para o cálculo de límites.**

7 **Representación gráfica de funcións.**

Continuidade

A continuidade é unha medida de regularidade dunha función.

Que unha función sexa continua significa que a unha variación pequena da x correspóndelle unha variación tamén pequena do valor da función. Fíxate na seguinte táboa de valores da función $f(x)=x^2$:

x	$f(x)=x^2$
1'8	3'24
1'9	3'61
2	4

x	$f(x)=x^2$
2'2	4'84
2'1	4'41
2'01	4'04

Unha función f(x), definida nun intervalo (a,b), é continua nun punto $x_0 \in (a,b)$ cando o límite da función no punto coincide co valor da función: $f(x)$ continua en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

- Fíxate que non ten sentido falar de continuidade nun punto onde non está definida a función.
- Tódalas funcións elementais definidas por unha sóa fórmula son continuas no seu dominio.

Das funcións que coñeces, as únicas que poden ser discontinuas en algún punto son as funcións definidas a cachos, que poden ser discontinuas nos puntos onde cambia a fórmula.

Para estudia-la continuidade de funcións definidas a trozos utilizaremos os límites laterais e o valor da función no punto:

I.- Límite pola esquerda: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

II.- Límite pola dereita: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

III.- Valor da función no punto: $f(x_0)$

Se eses valores coinciden, a función é **continua** en x_0 e, en caso contrario é **discontinua**.

Exemplo: Estudia a continuidade en x=2 da función:

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{se } x\le 2 \\ x^2 & \text{se } x>2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x+2)=4$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(x^2\right)=4$$

$$f(2)=2+2=4$$

f(x) é continua en x=2.

Definición: Diremos que unha función é **continua** cando é continua en tódolos puntos do seu dominio de definición.

Se unha función é continua nun intervalo, a parte da gráfica da funcion correspondente a ese intervalo é unha línea enteira.

Tipos de discontinuidades

- **Discontinuidade de salto:** Os límites laterais existen pero son distintos: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.
- **De tipo infinito ou de salto de 2ª especie:** Algún dos limites laterais, ou os dous, non existen:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\infty \text{ ou } \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$$

- **Discontinuidade evitable.:** Os límites laterais existen e son iguais, pero o valor da función no punto é diferente.

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

Graficamente, cando unha función é discontinua nun punto, a súa gráfica está partida nese punto.

Exemplo: Estudia a continuidade en x=-1 da función:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x=1 \\ \dfrac{x^2-1}{1-x} & \text{se } x\neq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{1-x}=\frac{0}{0} \text{ in det.}$$

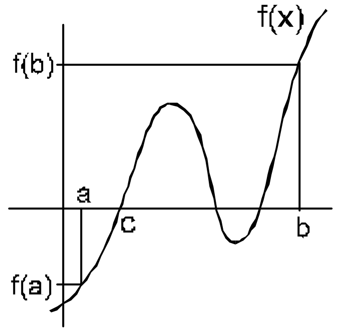
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(-1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

$$f(1)=1$$

Discontinua de tipo evitable en x=1.

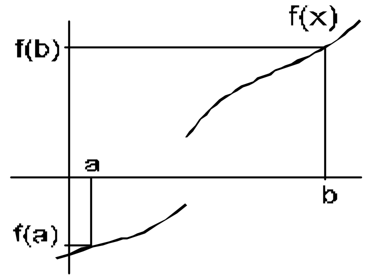
Teorema de Bolzano

Se unha función f(x) é continua nun intervalo $[a,b]$ e toma valores de signos distintos nos extremos do intervalo: $f(a)\cdot f(b)<0$, entón hai un punto no intervalo, $c\in(a,b)$, no que a función vale 0: f(c)=0



Non podemos uni-los puntos (a,f(a)) e (b,f(b)) cunha línea continua sen corta-lo eixe OX. O teorema só garante a existencia dun punto de corte, pero pode haber máis.

Se a función non é continua no intervalo, o teorema pode non cumprirse tal como aparece na segunda gráfica.



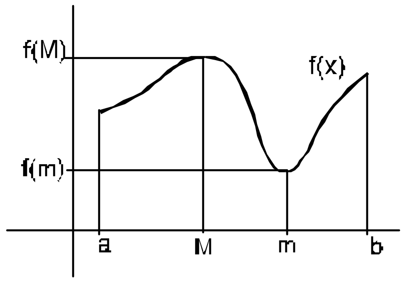
O teorema proporciona un método para calcular solucións aproximadas a ecuacións do tipo f(x)=0 (f(x) continua) buscando pares de valores nos que a función tome signos contrarios.

Consecuencia deste teorema é que unha función continua nun intervalo pechado $[a,b]$ acada tódolos valores comprendidos entre f(a) e f(b).

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Se unha función f(x) é continua nun intervalo pechado $[a,b]$, entón f(x) acada un máximo e un mínimo nese intervalo. É dicir:

$$\exists m\in[a,b] \text{ tal que } \forall x\in[a,b]\ \ f(m)\le f(x)$$
$$\exists M\in[a,b] \text{ tal que } \forall x\in[a,b]\ \ f(x)\le f(M)$$



Fíxate que, se a función non é continua ou se o intervalo non é pechado, o teorema pode non cumprirse. A función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ é continua no intervalo $(0,2]$ pero non ten máximo, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\infty$

Taxa de variacion

Definímo-la taxa de variación dunha función f(x) no intervalo $[x_1,x_2]$ como o cociente entre o incremento do valor da función e incremento de x (tamén se lle chama cociente incremental):

$$TV_{[x_1,x_2]}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

A taxa de variación é unha medida da variación media da función no intervalo.

Derivada nun punto

Exemplo: O espacio percorrido por un móbil, en metros, ven dado pola función $s = 5t^2$ (t en segundos)

¿Cal é a velocidade do móbil?

Solución:

Hai dous tipos de velocidades:

- **Velocidade media:** É o espacio percorrido dividido polo tempo.
- **Velocidade instantánea:** Velocida-de que leva un móbil nun intre dado.

A velocidade media do móbil do problema entre t=1 e t=4 é:

$$VM_{[1,4]} = \frac{5\cdot 4^2 - 5\cdot 1^2}{4-1} = 25\ \tfrac{m}{s}$$

A velocidade instantánea non pode calcularse directamente, pero pode aproximarse mediante velocidades medias. En t=1:

$$VM_{[1,2]} = \frac{5\cdot 2^2 - 5\cdot 1^2}{2-1} = 15\ \tfrac{m}{s}$$

$$VM_{[1,1'5]} = \frac{5\cdot 1'5^2 - 5\cdot 1^2}{1'5-1} = 12'5\ \tfrac{m}{s}$$

$$VM_{[1,1'1]} = \frac{5\cdot 1'1^2 - 5\cdot 1^2}{1'1-1} = 10'5\ \tfrac{m}{s}$$

A velocidade instantánea será o límite desas velicidades medias:

$$v(1) = \lim_{x\to 1}\frac{5x^2 - 5\cdot 1^2}{x-1} = 10\ \tfrac{m}{s}$$

A derivada dunha función f(x) no punto x_0 é o límite:

$$Df(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Facendo o cambio $h = x - x_0$ obtemos unha nova expresión para a derivada: $Df(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

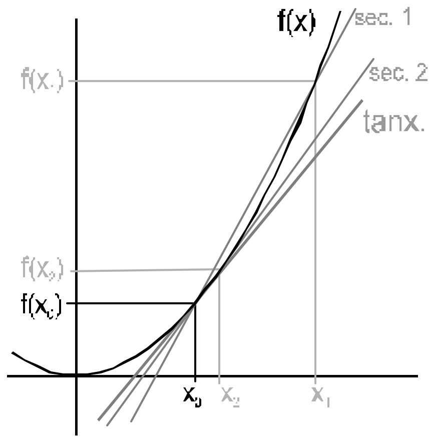
- A derivada é o límite das taxas de variación cando facemos que o intervalo se aproxime a un punto. É unha medida da variación "instantánea" da función no punto.
- Cando a función está definida a trozos estudiamos a derivabilidade mediante límites laterais:

$$D^-f(x_0) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$D^+f(x_0) = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Se os límites coinciden, a función é derivable en x_0.

- As funcións elementais, definidas por unha soa fórmula, son derivables en tódolos puntos do seu dominio.
- Que unha función sexa derivable implica que non experimenta cámbios bruscos de tendencia.



Interpretacion grafica da derivada

Queremos atopa-la ecuación da recta tanxente a súa gráfica dunha función f(x) no punto $(x_0, f(x_0))$.

Para calcula-la ecuación dunha recta necesitamos dous puntos, pero só temos un.

O que si podemos é elexir un valor x_1 próximo x_0 e aproxima-la tanxente pola secante que pasa polos puntos: $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ e que ten de ecuación:

$$sec_1 \equiv y - f(x_1) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Fixémonos na pendente desa recta: $m_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Para mellorala só temos que elexir un punto, x, máis próximo ó punto de tanxencia: $m_{sec} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Ss x se aproxima *infinitamente* a x_0, a secante transfórmase na tanxente e a súa pendente na pendente da tanxente:

$$m_{tanx} = \lim_{x\to x_0}(m_{sec}) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = Df(x_0)$$

- A pendente da recta tanxente á gráfica dunha función é igual á derivada da función nese punto.
- A ecuación da **recta tanxente** a unha función f(x) no punto $(x_0, f(x_0))$ vén dada por: $y - f(x_0) = Df(x_0)(x - x_0)$

Exemplo:

Aprox. pola tanxente: Podemos calcular valores descoñecidos dunha función, aproximandoa pola recta tanxente nun punto próximo.

$$Df(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$Df(x_0) \approx \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$f(x)-f(x_0) \approx Df(x_0)(x-x_0)$$
$$f(x) \approx Df(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

¿Canto vale o Ln(1'5)? Sabemos que Ln(1)=0, un valor próximo a 1'5, e tamén o valor da derivada:

$$Ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Podemos aproximalo coa tanxente:

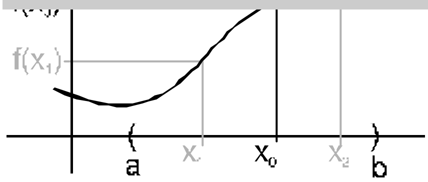
$$y - 0 = 1\cdot(x-1) \rightarrow y = x - 1$$
$$Ln(1'5) \approx 1'5 - 1 = 0'5$$

O erro (Ln(1'5)=0'4054) é pequeno e disminue ó achegárnos ó punto de tanxencia.

Crecemento e derivadas

Definición: f(x) definida nun intervalo (a,b) é **crecente** en x_0 se existe un entorno de x_0, $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subset (a,b)$ tal que:

$$x_1, x_2 \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$



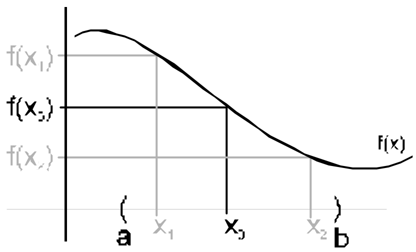
Definición: f(x) é **decrecente** en x_0 se existe un entorno, $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subset (a,b)$ que cumpra:

$$x_1, x_2 \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$$

Teorema: Sexa f(x) unha función definida nun intervalo (a,b) e derivable en $x_0 \in (a,b)$, entón:

a) Se $Df(x_0) > 0$, f(x) é crecente en x_0.

b) Se $Df(x_0) < 0$, f(x) é decrecente en x_0.



Demostración: a) Podemos demostralo de xeito non riguroso tendo en conta que nun entorno de de x_0 $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subset (a,b)$ podemos aproximar a función pola recta tanxente de xeito que o erro sexa "despreciable".

Sexan x_1 e x_2 pertecentes a ese entorno: $x_1 < x_2$

$$\left.\begin{aligned} f(x_2) &\approx f(x_0)+Df(x_0)(x_2-x_0) \\ f(x_1) &\approx f(x_0)+Df(x_0)(x_1-x_0) \end{aligned}\right\}$$
$$f(x_2)-f(x_2) \approx Df(x_0)[(x_2-x_0)-(x_1-x_0)] = Df(x_0)(x_2-x_1) > 0$$

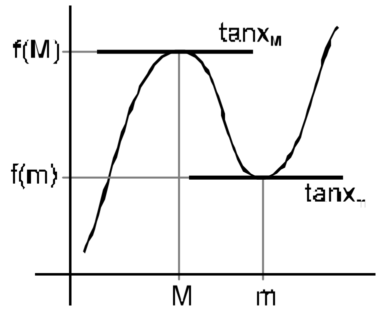
é dicir, f(x) é crecente en x_0 (o apartado *b* é semellante).

Extremos relativos

Definición: f(x) definida en (a,b) acada un **máximo relativo** en x_0 se existe un entorno de x_0, $\left(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\right)\subset\left(a,b\right)$ tal que:

$$x\in\left(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\right)\Rightarrow f\left(x\right)\le f\left(x_0\right)$$

Definición: f(x) definida en (a,b) acada un **mínimo relativo** en x_0 se existe un entorno de x_0, $\left(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\right)\subset\left(a,b\right)$ tal que: $x\in\left(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\right)\Rightarrow f\left(x\right)\ge f\left(x_0\right)$.



Graficamente: A tanxente nos máximos e nos mínimos relativos da gráfica é unha recta horizontal e, polo tanto, a súa pendente é 0: Como a pendente é igual a derivada no punto, a derivada tamén ten que ser 0.

Derivadas e extremos relativos

Teorema: Sexa f(x) unha función definida nun intervalo $\left(a,b\right)$ e derivable en $x_0\in\left(a,b\right)$ entón, se f(x) ten un extremo relativo en x_0, a súa derivada en x_0 é 0: $Df\left(x_0\right)=0$

Demostración: Supoñamos que en x_0 hai un máximo relativo (se fose un mínimo a demostración é semellante), entón f(x) é crecente antes de x_0 e decrecente despois:

$$x\in\left(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\right)\Rightarrow f\left(x\right)\le f\left(x_0\right)\Rightarrow\begin{cases} x<x_0\Rightarrow\dfrac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}>0\\ x<x_0\Rightarrow\dfrac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}<0\end{cases}$$

Polo tanto, a derivada pola esquerda ten que ser positiva e negativa a derivada pola dereita:

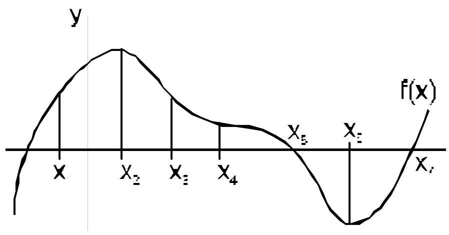
$$D^-f\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\ge 0$$

$$D^+f\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\le 0$$

Dado que a función é derivable en x_0, as derivadas laterais teñen que coincidir e a única posibilidade é que sexan 0:

$$D^-f\left(x_0\right)=D^+f\left(x_0\right)=Df\left(x_0\right)=0$$

O recíproco deste teorema non é certo: $Df\left(x_0\right)$ pode ser 0 e non haber un extremo en x_0 (pode haber un punto de inflexión como por exemplo en x=0 coa función $f(x)=x^3$)



Crecemento e derivada nun punto son conceptos interrelacionados:

Derivada positiva, a función é crecente (puntos x_1 e x_7).

Derivada negativa, a función é decrecente (x_3, x_5).

Derivada 0, poden darse tres posibilidades:

- **Un máximo** (punto x_2**).**
- **Un mínimo** (punto x_6**).**
- **Un punto de inflexión** (punto x_4).

Derivada nun punto e continuidade

Teorema: Se unha función f(x), definida nun intervalo (a,b), é derivable nun punto $x_0 \in (a,b)$, entón é continua nese punto.

Demostración: A derivada defínese como o límite dun cociente:

$$Df(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

O denominador do cociente tende a 0: $\lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$.

Para que exista límite, o numerador tamén ten que tender a 0:

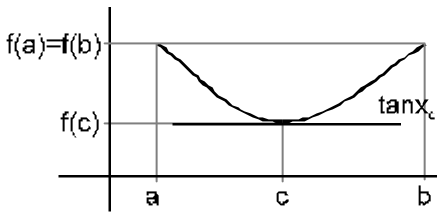
$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} [f(x)] = f(x_0)$$

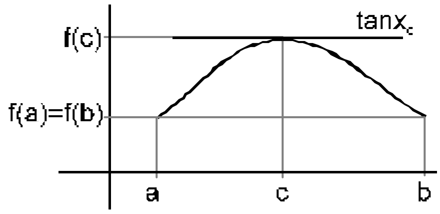
Polo tanto a función é continua en x_0.

O recíproco non é certo: Unha función pode ser continua nun punto e non ser derivable nese punto.

Teorema de Rolle

Sexa f(x) unha función continua no intervalo pechado $[a,b]$, derivable no intervalo aberto (a,b) e tal que $f(a) = f(b)$, entón existe un punto $c \in (a,b)$ no que a derivada vale 0: $Df(c) = 0$.





Interpretación xeométrica: A gráfica correspondente a unha función continua e derivable nun intervalo e que teña as ordenadas dos extremos iguais, ten polo menos un punto onde a tanxente é horizontal

Demostración: Dado que f(x) é continua en $[a,b]$, polo teorema de Bolzano-Weierstass, f(x) ten un máximo, M, e un mímino, m: $\forall x \in [a,b] \quad f(m) \le f(x) \le f(M)$.

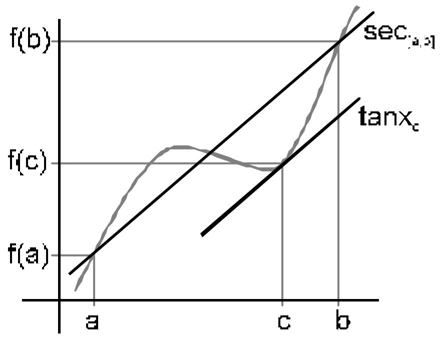
Xa demostramos que a derivada é 0 nos extremos relativos. Queda por probar que polo menos un extremo está no interior do intervalo. Distinguimos dous casos:

1. $f(m) = f(M)$, a función é constante, a derivada é 0 en tódolos puntos do intervalo (a,b).
2. $f(m) \ne f(M)$, dado que $f(m) \le f(a) = f(b) \le f(M)$, temos:

$$f(m) \ne f(M) \Rightarrow \begin{cases} (M \ne a \;\text{ e }\; M \ne b) \Rightarrow M \in (a,b) \Rightarrow Df(M) = 0 \\ \qquad \text{ou} \\ (m \ne a \;\text{ e }\; m \ne b) \Rightarrow m \in (a,b) \Rightarrow Df(m) = 0 \end{cases}$$

O c sería m ou M (o que estea no interior do intervalo).

Teorema do Valor Medio do Cálculo Diferencial



> **Interpretación xeométrica:** Hai polo menos un punto no intervalo (a,b) onde a tanxente á gráfica correspondente a unha función continua e derivable, é paralela á secante que une os puntos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$.

Sexa f(x) unha función continua no intervalo pechado $[a,b]$, derivable no intervalo aberto (a,b), entón hai un punto $c \in (a,b)$ tal que: $Df(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demostración: $g(x) = [f(b) - f(a)] \cdot x - (b-a) \cdot f(x)$ cumpre as hipótese do Teorema de Rolle:

- É continua en $[a,b]$ por ser suma de funcións continuas: O polinomio $[f(b)-f(a)]x$, $[f(b)-f(a)]$ é un número, e a función $(b-a)f(x)$ que é continua por ser producto dunha función continua por un número.
- É derivable no intervalo (a,b) por ser suma de funcións derivables (as mesmas do apartado anterior).
- Ademais $g(a) = g(b)$, en efecto:

$$g(a) = [f(b)-f(a)] \cdot a - (b-a) \cdot f(a) = f(b) \cdot a - b \cdot f(a)$$
$$g(b) = [f(b)-f(a)] \cdot b - (b-a) \cdot f(b) = -f(a) \cdot b + a \cdot f(b)$$

Polo tanto existe un $c \in (a,b)$ tal que $Dg(c) = 0$:

$$g'(x) = [f(b)-f(a)] - (b-a) \cdot f'(x)$$
$$[f(b)-f(a)] - (b-a) \cdot f'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Regra de L´Hopital

Sexan f(x) e g(x) funcións continuas e derivables no intervalo (a,b) e tales que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$. Se $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$ e se existe $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entón tamén existe $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e, ademais, $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

A regra de L'Hopital proporciona un método moi eficaz para o cálculo de límites cando temos indeterminacións do tipo $\frac{0}{0}$ e tamén pode estenderse para indeterminacións doutros tipos:

- Indeterminacións $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- A regra de L'Hopital pódese aplicar igualmente con límites da forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ cando x tende a ∞.

Podemos transformar outros tipos de límites nos tipos anteriores para poder aplica-la Regra de L'Hopital:

1. Límites da forma $0\cdot\infty$:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=0\cdot\infty\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\dfrac{0}{0}\\[2ex] \lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}=\dfrac{\infty}{\infty}\end{cases}$$

2. Se $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=1^{\infty}$, tomando logaritmos:

$$Ln\left[\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}\right]=\lim_{x\to x_0}\left[Ln\left[f(x)\right]^{g(x)}\right]=\lim_{x\to x_0}\left[g(x)\cdot Ln\left[f(x)\right]\right]$$

$$\xrightarrow[\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\left[Ln\left[f(x)\right]\right]=0]{\lim\limits_{x\to x_0}\left[g(x)\right]=\infty}\lim_{x\to x_0}\left[g(x)\cdot Ln\left[f(x)\right]\right]=\infty\cdot 0$$

3. Cando $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=0^0$ ou $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\infty^0$, tomando logaritmos conducen a indeterminacións do tipo $0\cdot(-\infty)$ e $0\cdot\infty$ respectivamente.

Demostración: Só imos esbozala sen afondar nos detalles:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{\dfrac{f(x)-0}{x-a}}{\dfrac{g(x)-0}{x-a}}$$

Dado que f(x) e g(x) cumpren as hipótese do Teorema do Valor Medio do Cálculo Diferencial, temos:

$$\exists c_1\in(a,x)\ \text{t. q.}\ \frac{f(x)-0}{x-a}=f'(c_1)$$

$$\exists c_2\in(a,x)\ \text{t. q.}\ \frac{g(x)-0}{x-a}=g'(c_2)$$

O límite anterior queda:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$$

En principio, non parece que c_1 e c_2 teñan porque ser iguais, o Teorema de Cauchy garántenos que podemos collelos de xeito que si o sexan, co que podemos escribir:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{c\to a^+}\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Función derivada

Se unha función f(x) é derivable nun intervalo (a,b), podemos definir a súa **función derivada**, f'(x), como a función que a cada punto $x\in(a,b)$ faille corresponde-la derivada de f(x) nese punto:

$$f'(x)=Df(x)\quad\forall x\in(a,b)$$

Derivada segunda

Se unha función f(x) é derivable nun intervalo (a,b), existe a súa función derivada, f'(x), nese intervalo.

Exemplo:

O espacio percorrido por un móbil vén dado pola función $e(t)=5t^2$

¿Que tipo de movemento leva?

Resolución: Estudiamos se a velocidade (derivada) é constante ou non.

$$v(0)=\lim_{t\to 0}\frac{5t^2-5\cdot 0^2}{t-0}=0\ \tfrac{m}{s}$$

$$v(1)=\lim_{t\to 0}\frac{5t^2-5\cdot 1^2}{t-1}=10\ \tfrac{m}{s}$$

$$v(2)=\lim_{t\to 0}\frac{5t^2-5\cdot 2^2}{t-2}=20\ \tfrac{m}{s}$$

É un movemento uniformemente acelerado (a velocidade aumenta de xeito regular $10\ \tfrac{m}{s}$ cada segundo).

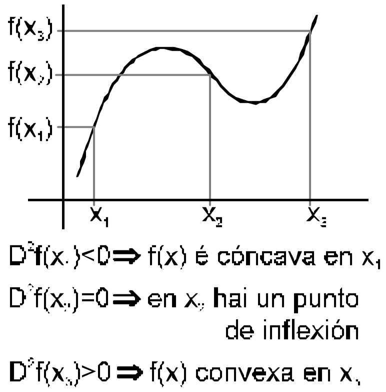
Os valores da velocidade (veñen dados por unha fórmula moi simple:

$$v(t)=10t$$

v(t) é a **función derivada** de e(t).

Definímo-la derivada segunda de f(x) no punto $x_0 \in (a,b)$ como a derivada, se existe, de f'(x) en x_0:

$$D^2 f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$



Curvatura: Unha función derivable nun punto é **convexa** nese punto se a súa gráfica queda por “enriba” da recta tanxente, se queda por debaixo é **cóncava** e se a gráfica corta no punto á recta tanxente é un **punto de inflexión** (cambia a curvatura).

A derivada segunda no punto x_0 describe a curvatura da gráfica de f(x) no punto:

- $D^2f(x_0) < 0 \Rightarrow$ f(x) é cóncava en x_0
- $D^2f(x_0) > 0 \Rightarrow$ f(x) é convexa en x_0
- $D^2f(x_0) = 0 \Rightarrow$ en x_0 hai un *posible* punto de inflexión (tamén pode haber un extremo relativo).

Función derivada segunda: Se existe a **derivada segunda** de f(x) en tódolos puntos do intervalo podemos defini-la función derivada segunda como : $f''(x) = D^2 f(x) \quad \forall x \in (a,b)$.

Derivadas sucesivas

De xeito semelante á derivada segunda, podemos defini-la derivada terceira de f(x) en $x_0 \in (a,b)$ como a derivada en x_0 da función derivada segunda, f''(x), e así sucesivamente.

As funcións elementais son todas de clase infinita, é dicir, derivables tódalas veces que se queira.

Cálculo de funcións derivadas

Podemos atopa-la función derivada dunha función dada a partir das funcións derivadas das funcións elementais e utilizando as regras de derivación.

Debes ter en conta que *u* e *v* indican funcións que dependen dunha certa variable, por exemplo u=sen(x). En cambio *a* representa unha constante numérica.

REGRAS DE DERIVACIÓN		
función	derivada	regra
$a \cdot u$	$a \cdot u'$	A derivada dunha constante por unha función é a constante pola derivada da función
$u+v$	$u'+v'$	A derivada dunha suma é a suma das derivadas
$u \cdot v$	$u' \cdot v+u \cdot v'$	A derivada dun producto é a derivada do primeiro factor polo segundo sen derivar máis o primeiro sen derivar pola derivada do segundo
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	A derivada dun cociente é a derivada do numerador polo denominador sen derivar menos o numerador sen derivar pola derivada do denominador dividido todo polo denominador ó cadrado
$f(u)$	$f'(u) \cdot u'$	Regra da cadea

DERIVADAS ELEMENTAIS			
función	derivada	función	derivada
x^r	$r \cdot x^{r-1}$	u^r	$r \cdot u^{r-1} \cdot u'$
$sen(x)$	$cos(x)$	$sen(u)$	$[cos(u)] \cdot u'$
$cos(x)$	$-sen(x)$	$cos(u)$	$[-sen(u)] \cdot u'$
$tg(x)$	$1+tg^2(x)$	$tg(u)$	$[1+tg^2(u)] \cdot u'$
$Ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$Ln(u)$	$\left(\frac{1}{u}\right) \cdot u' = \frac{u'}{u}$
e^x	e^x	e^u	$e^u \cdot u'$