



4

XEOMETRÍA do Espacio

Programa:

1. O espacio afín E^3 .

- 1.1. Vectores do espacio.
- 1.2. Coordenadas no espacio.

2. Rectas e planos.

- 2.1. Ecuacións do plano: Vectorial, paramétrica e xeral.
- 2.2. Ecuacións da recta: Vectorial, paramétrica, contínua e xeral.
- 2.3. Posición relativa de dúas rectas.
- 2.4. Posición relativa de dous e de tres planos.
- 2.5. Posición relativa dunha recta e dun plano.

3. Producto escalar

- 3.1. Definición de producto escalar. Interpretación xeométrica.
- 3.2. Ángulos, módulos e distancias.

4. Producto vectorial e mixto.

- 4.1. Definición de producto vectorial. Interpretación xeométrica.
- 4.2. Definición de producto mixto. Interpretación xeométrica.

5. Distancias e ángulos.

- 5.1. Ecuación normal do plano.
- 5.2. Distancia e ángulo entre dous planos.
- 5.3. Distancia e ángulo entre dúas rectas.
- 5.4. Distancia e ángulo entre unha recta e un plano.

Xeometría

Descartes descubriu que é posible transformar os problemas xeométricos en problemas numéricos mediante a introducción de coordenadas.

Partindo dese enfoque da Xeometría, trataremos dous tipos de problemas no espazo:

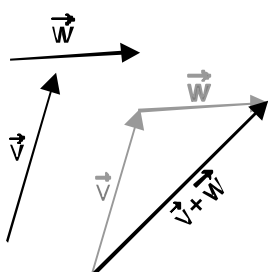
- **Xeometría Afín:** Problemas de incidencia e paralelismo entre rectas e planos.
- **Xeometría Euclídea:** Situacións nas que interveñen o concepto de distancia e a medida de ángulos.

Vectores libres do espazo: V3

Vector libre: Intuitivamente, un vector libre é un segmento orientado que podemos situar en calquera lugar do espazo.

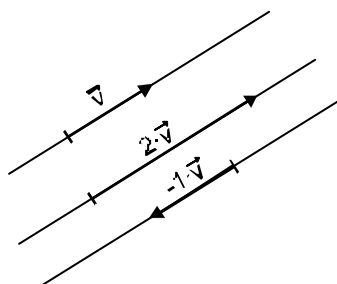
Un vector libre queda caracterizado coñecendo:

- **Módulo:** Lonxitude do segmento.
- **Dirección:** A recta que o contén e tódalas paralelas a ela.
- **Sentido:** Para cada dirección hai dous sentidos.



Suma de vectores: A suma de vectores libres do plano faise colocando un dos vectores a continuación do outro: O vector suma é o que vai desde a orixe do primeiro ata o extremo do segundo (outro xeito equivalente de definir a suma de vectores é mediante a regra do paralelogramo).

Producto por un número: Ó multiplicar un vector por un número real obtemos outro vector coa mesma dirección, de módulo o produto do módulo polo número e co mesmo sentido do vector orixinal se o número é positivo ou sentido contrario se número é negativo.



Con esas operacións os vectores libres do espazo teñen estrutura de espazo vectorial sobre $\mathbb{R}$ e chamáremoslle V^3 .

Chamarémos **combinación lineal** dun conxunto de vectores a suma deses vectores multiplicados por números. Unha combinación lineal de vectores é outro vector.

Nos espazos vectoriais chámase dimensión ao número máximo de vectores independentes.

Se eleximos tres vectores do espazo con diferentes direccións e que non están os tres contidos no mesmo plano, eses vectores son independentes pois non é posible poñer un deles como combinación dos outros dous. A dimensión deste espazo vectorial é pois 3.

Eliximos tres vectores independentes, que chamaremos base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de V^3 . Podemos poñer cada vector do espacio como combinación lineal dos elementos desa base:

$$\forall \vec{v} \in V^3 \quad \exists v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R} \text{ tal que } \vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3$$

Dos números v_1 , v_2 e v_3 dicimos que son as **compoñentes** do vector $\vec{v}$ respecto da base B .

Unha vez elixida unha base, podemos utilizar, en lugar dun segmento orientado para cada un dos vectores libres do espacio, as súas compoñentes (v_1, v_2, v_3) .

Vectores alineados

Definición: Diremos que dous vectores non nulos están alineados cando teñen a mesma dirección.

Teorema:: Se dous vectores teñen a mesma dirección, entón podemos atopar un número que multiplicado por un dea o outro.

A implicación contraria tamén é certa:

$$\vec{v} \parallel \vec{w} \Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{R} \text{ tal que } \vec{v} = l \cdot \vec{w}$$

Demostración: Se os vectores teñen o mesmo senso, o número é

$$\lambda = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{w}|} \text{ e, se teñen senso contrario, é } \lambda = -\frac{|\vec{v}|}{|\vec{w}|}.$$

Só temos que ter en conta a definición do produto dun vector por un número para comprobar que $\vec{v}$ e $\lambda \cdot \vec{w}$ teñen o mesmo módulo, a mesma dirección e o mesmo sentido. Son iguais.

Vectores e coordenadas

Chámase **espacio afín** ó conxunto E dos puntos do espacio cos vectores libres V^3 : Espacio afín $\equiv (E, V^3, +, \cdot)$.

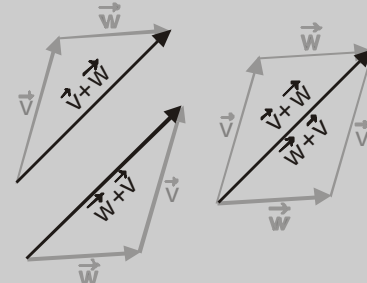
Fixamos un **sistema de referencia**: Un punto, que será a orixe de coordenadas, e unha base de V^3 .

As **coordenadas** do punto P son as compoñentes do vector que vai da orixe a ese punto: $P \equiv (v_1, v_2, v_3)$.

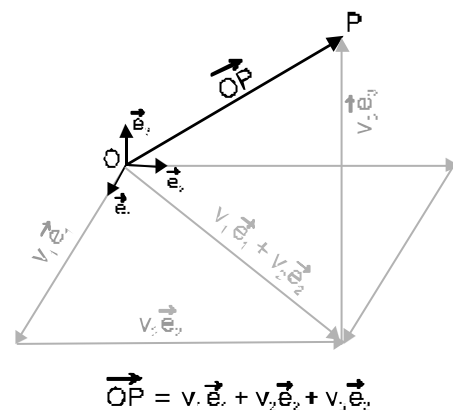
Ó vector $\vec{OP}$, que vai da orixe a P , chamáremoslle vector de posición do punto P .

V^3 espacio vectorial:

O diagrama seguinte demostra que a suma de vectores é conmutativa (calquera que sexa a orde da suma, o vector resultante é a diagonal do paralelogramo).



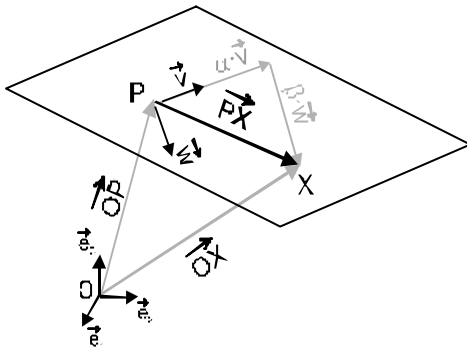
De xeito similar, pódese demostrar que os vectores do espacio cumpren tódalas propiedades que definen a estrutura de espacio vectorial.



Dese xeito, podemos interpretar a terna (v_1, v_2, v_3) como as coordenadas dun punto ou como as compoñentes do vector de posición do punto, o que resulta realmente útil á hora de abordar algúns problemas.

Podemos calcular o vector que vai dun punto a outro simplemente restando as súas coordenadas:

$$\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ} \Rightarrow \vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$$



Exemplo: Atopar a ecuación do plano π que pasa polos puntos $(2,2,3)$, $(0,1,3)$ e $(3,2,5)$.

Solución: Utilizamos como vectores de dirección do plano os vectores que van dun dos puntos ós outros dous:

$$\vec{v} = (2,2,3) - (0,1,3) = (2,1,0)$$

$$\vec{w} = (3,2,5) - (0,1,3) = (3,1,2)$$

Ecuación vectorial do plano π :

$$(x, y, z) = (0, 1, 3) + \alpha(2, 1, 0) + \beta(3, 1, 2)$$

Ecuación dun plano no espacio

Para descubrir a ecuación dun plano no espacio temos que atopar unha condición que só a verifiquen os puntos do plano.

Partiremos dun punto do plano, P, e de dous vectores *contidos* no plano e con distinta dirección, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, que chamaremos **vectores de dirección** do plano.

Dado un punto xenérico X do plano, o vector que vai de P a X, $\vec{PX}$, está contido no plano e, polo tanto, pode poñerse como combinación lineal de $\vec{v}$ e $\vec{w}$: $\vec{PX} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$

$$\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{PX} \Leftrightarrow \vec{OX} = \vec{OP} + a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{w}$$

Esa ecuación só a cumpren os puntos do plano: é a **ecuación vectorial do plano**.

Por compoñentes, a ecuación anterior queda:

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + a \cdot (v_1, v_2, v_3) + b \cdot (w_1, w_2, w_3)$$

Sendo (x, y, z) un punto xenérico, (p_1, p_2, p_3) un punto do plano e (v_1, v_2, v_3) e (w_1, w_2, w_3) son vectores de dirección.

Exemplo: Calculemos as ecuacións paramétrica e xeral do plano π anterior.

Solución: Ecuacións paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2\alpha + 3\beta \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = 3 + 2\beta \end{cases}$$

Ecuación xeral:

$$\begin{cases} x = 2a + 3b \\ y = 1 + a + b \\ z = 3 + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -2 + b \\ z = 3 + 2b \end{cases} \Leftrightarrow 2x - 4y - z = -7$$

Outras ecuacións dun plano

Desenvolvendo a ecuación vectorial obtémos outras ecuacións dun plano no espacio:

$$\begin{cases} x = p_1 + \alpha \cdot v_1 + \beta \cdot w_1 \\ y = p_2 + \alpha \cdot v_2 + \beta \cdot w_2 \\ z = p_3 + \alpha \cdot v_3 + \beta \cdot w_3 \end{cases} \quad \text{ecuacións paramétricas}$$

Eliminando os parámetros α e β obtémor a **ecuación xeral**:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz = D$$

Ecuación da recta no espacio

Partiremos dun punto da recta, P , e dun vector coa mesma dirección cá recta, $\vec{v}$, **vector de dirección** da recta.

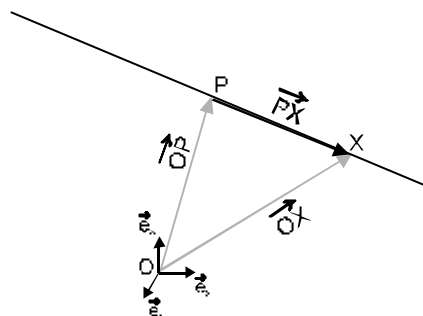
O vector que vai de P a un punto xenérico X da recta, $\vec{PX}$, ten a mesma dirección ca $\vec{v}$ (o que significa que $\vec{PX} = l \cdot \vec{v}$) e esa condición só a cumpren os puntos da recta. É a **ecuación vectorial** dunha recta no espacio:

$$\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{PX} \Leftrightarrow \vec{OX} = \vec{OP} + l \cdot \vec{v}$$

Escrita en forma de compoñentes, queda:

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + l \cdot (v_1, v_2, v_3)$$

Onde (x, y, z) é un punto xenérico, (p_1, p_2, p_3) é un punto da recta e (v_1, v_2, v_3) é un vector de dirección.



Exemplo: Atopar a ecuación da recta que pasa polos puntos $A(1,0,-3)$ e $B(3,-2,2)$.

Solución: Un vector de dirección da recta é o vector $\vec{AB}$:

$$\vec{v} = (3, -2, 2) - (1, 0, -3) = (2, -2, 5)$$

Ecuación vectorial da recta:

$$(x, y, z) = (1, 0, -3) + \lambda(2, -2, 5)$$

Outras ecuacións da recta

Desenvolvendo a ecuación vectorial obtemos outras expresións da ecuación dunha recta no espacio:

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda \cdot (v_1, v_2, v_3) \xrightarrow{\text{operando e igualando}} \begin{cases} x = p_1 + \lambda \cdot v_1 \\ y = p_2 + \lambda \cdot v_2 \\ z = p_3 + \lambda \cdot v_3 \end{cases}$$

Expresión que recibe o nome de **ecuacións paramétricas**.

Despexamos o λ encada unha das ecuacións:

$$l = \frac{x - p_1}{v_1} \quad l = \frac{y - p_2}{v_2} \quad l = \frac{z - p_3}{v_3}$$

Igualando obtemos as **ecuacións continuas** da recta:

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} = \frac{z - p_3}{v_3}$$

Tendo en conta que unha recta queda determinada pola intersección de dous planos, tamén podemos describir unha recta mediante un sistema formado polas ecuacións deses planos:

$$\left. \begin{aligned} \pi &\equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi' &\equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{aligned} \right\} \text{Ecuacións xerais da recta.}$$

Exemplo: Ecuacións paramétricas, continua e xeral de:

$$(x, y, z) = (1, 0, -3) + \lambda(2, -2, 5)$$

Solución: Ecuacións paramétricas:

$$\left. \begin{aligned} x &= 1 + 2\lambda \\ y &= -2\lambda \\ z &= -3 + 5\lambda \end{aligned} \right\}$$

Ecuacións continuas:

$$\left. \begin{aligned} l &= \frac{x-1}{2} \\ l &= \frac{y}{-2} \\ l &= \frac{z+3}{5} \end{aligned} \right\} \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{5}$$

Ecuacións xerais:

$$\left. \begin{aligned} x &= 1 + 2\lambda \\ y &= -2\lambda \\ z &= -3 + 5\lambda \end{aligned} \right\} \begin{cases} x + y = 1 \\ 5x - 2z = 11 \end{cases}$$

Posición relativa de dous planos

Dous planos no espazo só poden adoptar 3 posicións relativas:

- Cortarse nunha recta.
- Ser paralelos.
- Ser coincidentes.

Sexan π e π' dous planos no espazo de ecuacións xerais:

$$p \equiv Ax + By + Cz = D \quad p' \equiv A'x + B'y + C'z = D'.$$

Estudiar a súa posición relativa equivale a resolver o sistema:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases}$$

Exemplo:

$$\begin{cases} \pi \equiv 2x + 4y - 2z = 6 \\ \pi' \equiv -3x - 6y + 3z = -9 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ -3 & -6 \end{array} \right\} \neq 0$$

$$\frac{2}{-3} = \frac{4}{-6} = \frac{-2}{3} = \frac{6}{-9}$$

É dun sistema de 2 ecuacións e 3 incógnitas, poden darse os seguintes casos:

- $\text{Rango}(A) = \text{rango}(M) = 1$, sistema compatible indeterminado. As solucións dependen de 2 parámetros (ec. paramétrica dun plano): Os planos son coincidentes.

Unha das ecuacións obtense multiplicando a outra por un número. Os coeficientes A, B, C e D son proporcionais:

$$\pi = \pi' \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

Exemplo:

$$\begin{cases} \pi \equiv 2x + 3y - 4z = 1 \\ \pi' \equiv -x + 5y - z = 3 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{array} \right\} \neq 0$$

- $\text{Rango}(A) = \text{rango}(M) = 2$ sistema compatible indeterminado. As solucións dependen de 1 parámetro (corresponden á ecuación paramétrica dunha recta). Os planos córtanse nunha recta.

Exemplo:

$$\begin{cases} \pi \equiv 2x + 4y - 2z = 6 \\ \pi' \equiv -3x - 6y + 3z = -1 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ -3 & -6 \end{array} \right\} \neq 0$$

$$\frac{2}{-3} = \frac{4}{-6} = \frac{-2}{3} \neq \frac{6}{-1}$$

- $[\text{Rango}(A) = 1] \neq [\text{rango}(M) = 2]$, sistema incompatible. Os planos son paralelos. Neste caso os valores dos coeficientes de x, y e z dos planos son proporcionais pero non así os termos independentes:

$$\pi \parallel \pi' \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$

Feixe de planos

O conxunto de tódolos planos que se cortan nunha recta forman un **feixe de planos**.

Sexan π e π' dous planos distintos dese feixe, con ecuacións:

$$p \equiv Ax + By + Cz = D$$

$$p' \equiv A'x + B'y + C'z = D'.$$

A intersección deses dous planos é a recta común a todos os

planos do feixe:
$$\left. \begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array} \right\} \equiv r$$

Engadindo a ese sistema a ecuación de calquera outro plano do feixe, a solución non varía (segue a ser a recta r), o que só pode ocorrer se a ecuación dese plano é combinación das ecuacións de π e π' polo tanto, a ecuación dun plano calquera do feixe será:

$$\eta \equiv \alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A'x + B'y + C'z + D') = 0$$

Para non ter que manexar dous parámetros, considerámonos a posibilidade de que α sexa ou non 0:

$$\eta \equiv \begin{cases} \alpha \neq 0 \Rightarrow Ax + By + Cz + D + \frac{\beta}{\alpha}(A'x + B'y + C'z + D') = 0 \\ \alpha = 0 \Rightarrow A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

Facendo $\frac{\beta}{\alpha} = t$ obtémose a ecuación do feixe dependendo dun único

parámetro t (ó darlle valores o t obtéñense todos os planos do feixe agás o π'):

$$\eta \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D + t(A'x + B'y + C'z + D') = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

Exemplo: Ecuación do feixe de planos que contén os planos:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x - 4z = 1 \\ \pi' \equiv x + 5y - z = 0 \end{array} \right\}$$

Solución:

$$\eta \equiv \alpha(2x - 4z - 1) + \beta(x + 5y - z) = 0$$

$$\eta \equiv \begin{cases} 2x - 4z - 1 + t(x + 5y - z) = 0 \\ 2x - y - 4z - 1 = 0 \end{cases}$$

Posición relativa de dúas rectas

Dúas rectas no espazo poden adoptar 4 posicións relativas:

- Cortarse nun punto.
- Ser paralelas.
- Ser coincidentes.
- Cruzarse: As rectas teñen distintas direccións pero, ó non estar no mesmo plano, non se cortan.

Sexan r_1 e r_2 dúas rectas no espazo de ecuacións xerais:

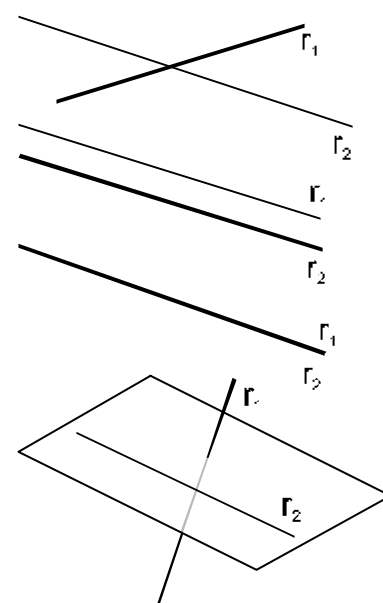
$$r_1 \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A'_1x + B'_1y + C'_1z = D'_1 \end{cases} \text{ e } r_2 \equiv \begin{cases} A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \\ A'_2x + B'_2y + C'_2z = D'_2 \end{cases}$$

Estudiar a súa posición relativa equivale a resolver o sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ \pi' \equiv A'_1x + B'_1y + C'_1z = D'_1 \\ \eta \equiv A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \\ \eta' \equiv A'_2x + B'_2y + C'_2z = D'_2 \end{array} \right\}$$

É un sistema de 4 ecuacións e 3 incógnitas que corresponden as ecuacións de 4 planos que se cortan dous a dous nunha recta.

Poden darse os seguintes casos (os rangos son, polo menos, 2):



Exemplo:

Posición relativa das rectas:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = z \text{ e } s \equiv \frac{x-1}{-4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$$

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} P = (0,1,0) \\ Q = (1,0,0) \\ \vec{v} = (2,-3,1) \\ \vec{w} = (-4,2,6) \end{array} \right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Estudiamos o rango da matriz A:

$$|(-1)| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -7 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Os vectores de dirección non teñen as componentes proporcionais:

$$\frac{2}{-4} \neq \frac{-3}{2} \neq \frac{1}{6}$$

As rectas teñen que cortarse.

- $\text{Rango}(A) = \text{rango}(M) = 2$, sistema indeterminado. Os planos η e η' pertencen o feixe de planos que determinan π e π' . As rectas teñen que ser coincidentes.
- $\text{Rango}(A) = \text{rango}(M) = 3$, sistema compatible determinado. As rectas córtanse nun punto.
- $[\text{Rango}(A) = 2] \neq [\text{rango}(M) = 3]$, sistema incompatible. Os planos η e η' son paralelos a planos do feixe que determinan π e π' . As rectas son paralelas..
- $[\text{Rango}(A) = 3] \neq [\text{rango}(M) = 4]$, sistema incompatible., η e η' non pertencen ó feixe que determinan π e π' . As rectas teñen direccións diferentes pero non se cortan, crúzanse.

Tamén podemos estudar a posición relativa de dúas rectas, r e s , mediante a matriz:

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv (p_1, p_2, p_3) + l(v_1, v_2, v_3) \\ s \equiv (q_1, q_2, q_3) + m(w_1, w_2, w_3) \end{array} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} p_1 - q_1 & p_2 - q_2 & p_3 - q_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

Temos as seguintes posibilidades:

- **Rango 1:** Rectas coincidentes.
- **Rango 2:** As rectas córtanse (vectores de dirección non alineados) ou son paralelas (compoñentes dos vectores de dirección proporcionais).
- **Rango 3:** As rectas crúzanse.

Posición relativa dunha recta e dun plano

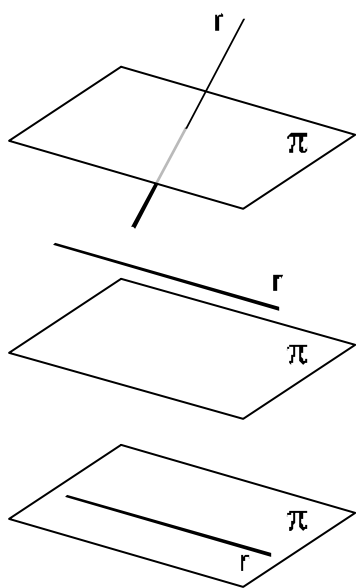
Unha recta e un plano no espazo poden adoptar as seguintes posicións relativas:

- Cortarse nun punto.
- Ser paralelos.
- A recta estar contida no plano.

Sexan r unha recta e π un plano no espazo de ecuacións xerais:

$$r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases} \text{ e } p \equiv Ex + Fy + Gz = H.$$

Estudar a súa posición relativa equivale a resolver o seguinte sistema de tres ecuacións e tres incógnitas (o rango é polo menos 2 por ser as dúas primeiras as ecuacións dunha recta):



$$\left. \begin{array}{l} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \\ Ex + Fy + Gz = H \end{array} \right\}$$

Poden darse as seguintes posibilidades

- $\text{Rango}(A) = \text{rango}(M) = 2$, o sistema é compatible indeterminado. A recta está contida no plano (o sistema ten infinitas solucións).
- $\text{Rango}(A) = \text{rango}(M) = 3$, sistema compatible determinado. A recta e o plano córtanse nun punto (solución única).
- $[\text{Rango}(A) = 2] \neq [\text{rango}(M) = 3]$, sistema incompatible. A recta e paralela ó plano (non ten solución).

Producto escalar de dous vectores

Dados dous vectores libres do espazo, $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ definimos o seu **producto escalar** como:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{cases} |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\alpha) & \text{se } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ e } \vec{w} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{se } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } \vec{w} = \vec{0} \end{cases}$$

O produto escalar de dous vectores é igual ó produto dos seus módulos polo coseno do ángulo que forman (observa que o produto escalar de dous vectores é un número).

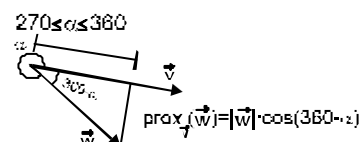
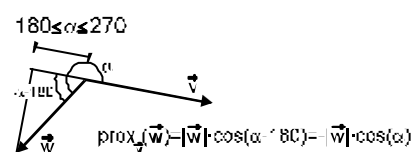
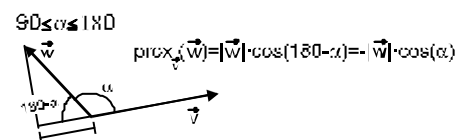
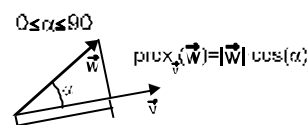
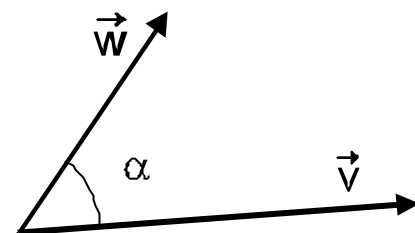
Interpretación xeométrica: O valor absoluto do produto escalar é o produto do módulo de un pola proxección do outro sobre el:

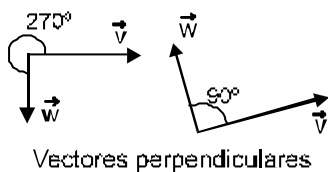
$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| = [\text{prox}_{\vec{w}}(\vec{v})] \cdot |\vec{w}| = [\text{prox}_{\vec{v}}(\vec{w})] \cdot |\vec{v}|$$

Demostración: Só hai que ter en conta que segundo a que cadrante pertencenza o ángulo α , a proxección de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$, $\text{prox}_{\vec{w}}(\vec{v})$ será (ver figuras):

1. $0 \leq \alpha \leq 90 \Rightarrow \text{prox}_{\vec{w}}(\vec{v}) = |\vec{w}| \cdot \cos(\alpha)$
2. $90 \leq \alpha \leq 180 \Rightarrow \text{prox}_{\vec{w}}(\vec{v}) = |\vec{w}| \cos(180 - \alpha) = -|\vec{w}| \cos(\alpha)$
3. $180 \leq \alpha \leq 270 \Rightarrow \text{prox}_{\vec{w}}(\vec{v}) = |\vec{w}| \cos(\alpha - 180) = -|\vec{w}| \cos(\alpha)$
4. $270 \leq \alpha \leq 360 \Rightarrow \text{prox}_{\vec{w}}(\vec{v}) = |\vec{w}| \cos(360 - \alpha) = |\vec{w}| \cos(\alpha)$

Polo tanto: $|\vec{v} \cdot \vec{w}| = [\text{prox}_{\vec{w}}(\vec{v})] \cdot |\vec{w}| = [\text{prox}_{\vec{v}}(\vec{w})] \cdot |\vec{v}|$





Propiedades do produto escalar

1. É conmutativo: $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V^3 \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$

Só hai que ter en conta que $\cos(a) = \cos(360 - a)$.

2. $\forall \vec{v}, \vec{w}, \vec{n} \in V^3 \quad \vec{v} \cdot (\vec{w} + \vec{n}) = \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{n}$

3. $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V^3 \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \vec{v} \cdot (a \cdot \vec{w}) = a \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}$

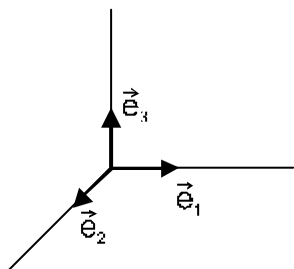
4. Dous vectores non nulos son perpendiculares se e só se o seu produto escalar é 0.

Demostración:

“ $\Rightarrow$ ” Se dous vectores son perpendiculares, o coseno do ángulo que forman é 0 e, polo tanto, o seu produto escalar tamén

“ $\Leftarrow$ ” Sexan $\vec{v} \neq \vec{0}, \vec{w} \neq \vec{0} \in V^3$ tales que $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$:

$$|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(a) = 0 \xrightarrow[\vec{w} \neq \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{w}| \neq 0]{\vec{v} \neq \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{v}| \neq 0} \cos(a) = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{w}$$



Base ortonormal

Dada unha base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ dos vectores libres do espazo, diremos que é **ortonormal** se cumpren as condicións:

1. $\forall i = 1, 2, 3 \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$

2. $\forall i = 1, 2, 3 \quad \forall j = 1, 2, 3 \quad \text{se } i \neq j \Rightarrow \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$

Intuitivamente unha base ortonormal é a que está formada por vectores de módulo 1 e perpendiculares entre si. No sucesivo, suporemos que tódalas bases son ortonormais, non sendo que se indique o contrario.

Expresión analítica do produto escalar

Sexan os vectores libres $\vec{v} = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + v_3 \cdot \vec{e}_3$ e $\vec{w} = w_1 \cdot \vec{e}_1 + w_2 \cdot \vec{e}_2 + w_3 \cdot \vec{e}_3$ expresados coma combinación lineal dos elementos dunha base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + v_3 \cdot \vec{e}_3) \cdot (w_1 \cdot \vec{e}_1 + w_2 \cdot \vec{e}_2 + w_3 \cdot \vec{e}_3)$$

Utilizando a propiedades 2) do produto escalar, queda:

$$\begin{aligned}
&= (\mathbf{v}_1 \cdot \vec{e}_1) \cdot (\mathbf{w}_1 \cdot \vec{e}_1 + \mathbf{w}_2 \cdot \vec{e}_2 + \mathbf{w}_3 \cdot \vec{e}_3) + \\
&\quad (\mathbf{v}_2 \cdot \vec{e}_2) \cdot (\mathbf{w}_1 \cdot \vec{e}_1 + \mathbf{w}_2 \cdot \vec{e}_2 + \mathbf{w}_3 \cdot \vec{e}_3) + \\
&\quad (\mathbf{v}_3 \cdot \vec{e}_3) \cdot (\mathbf{w}_1 \cdot \vec{e}_1 + \mathbf{w}_2 \cdot \vec{e}_2 + \mathbf{w}_3 \cdot \vec{e}_3) = \\
&= (\mathbf{v}_1 \cdot \vec{e}_1) \cdot (\mathbf{w}_1 \cdot \vec{e}_1) + (\mathbf{v}_1 \cdot \vec{e}_1) \cdot (\mathbf{w}_2 \cdot \vec{e}_2) + (\mathbf{v}_1 \cdot \vec{e}_1) \cdot (\mathbf{w}_3 \cdot \vec{e}_3) + \\
&\quad (\mathbf{v}_2 \cdot \vec{e}_2) \cdot (\mathbf{w}_1 \cdot \vec{e}_1) + (\mathbf{v}_2 \cdot \vec{e}_2) \cdot (\mathbf{w}_2 \cdot \vec{e}_2) + (\mathbf{v}_2 \cdot \vec{e}_2) \cdot (\mathbf{w}_3 \cdot \vec{e}_3) + \\
&\quad (\mathbf{v}_3 \cdot \vec{e}_3) \cdot (\mathbf{w}_1 \cdot \vec{e}_1) + (\mathbf{v}_3 \cdot \vec{e}_3) \cdot (\mathbf{w}_2 \cdot \vec{e}_2) + (\mathbf{v}_3 \cdot \vec{e}_3) \cdot (\mathbf{w}_3 \cdot \vec{e}_3) =
\end{aligned}$$

Pola propiedade 3) obtemos:

$$\begin{aligned}
&= (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_1) \cdot (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_2) \cdot (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_3) \cdot (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) + \\
&\quad (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1) \cdot (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) + (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_2) \cdot (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) + (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_3) \cdot (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3) + \\
&\quad (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1) \cdot (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1) + (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2) \cdot (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2) + (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_3) \cdot (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3)
\end{aligned}$$

Se a base é ortonormal, $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$ e $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ ($i \neq j$), resulta:

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \cdot (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_2 + \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_3$$

Exemplo: Cálculo do produto escalar dos vectores $(-1, 4, 3)$ e $(6, 3, -2)$

Solución:

$$\begin{aligned}
(-1, 4, 3) \cdot (6, 3, -2) &= \\
&= -1 \cdot 6 + 4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 0
\end{aligned}$$

Como o produto escalar é 0, os vectores son perpendiculares.

Módulo dun vector

Dado un vector $\vec{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, podemos calcular o seu módulo utilizando o produto escalar:

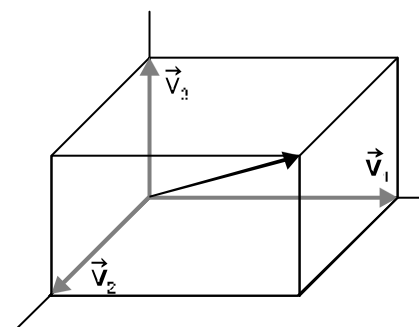
$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(0) = |\vec{v}|^2 \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

Por componentes e se a base é ortonormal, resulta:

$$|(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)| = \sqrt{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \cdot (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)} = \sqrt{\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2 + \mathbf{v}_3^2}$$

Interpretación xeométrica: O módulo dun vector corresponde a súa lonxitude. O vector é a diagonal dun ortoedro de dimensións $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Para calcular a súa lonxitude aplicamos Teorema de

Pitágoras: $l = \sqrt{\left(\sqrt{\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2}\right)^2 + \mathbf{v}_3^2} = \sqrt{\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2 + \mathbf{v}_3^2} = |\vec{v}|$



Exemplo:

Módulo do vector $(-2, 1, 2)$

Solución:

$$|(-2, 1, 2)| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3$$

Ángulo de dous vectores

Dados $\vec{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $\vec{w} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$, podemos calcular o coseno do ángulo que forman utilizando o produto escalar:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(a) \Rightarrow \cos(a) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

Exemplo:

Coseno do ángulo que forman os vectores $(2,-6,3)$ e $(-2,1,2)$

Solución:

$$\left. \begin{aligned} |(-2,1,2)| &= \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3 \\ |(2,-6,3)| &= \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} = 7 \\ (-2,1,2) \cdot (2,-6,3) &= -4 \end{aligned} \right\}$$

$$\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{-4}{3 \cdot 7} = -\frac{4}{21}$$

Por compoñentes obtemos a expresión:

$$\cos(a) = \frac{v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \cdot \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}}$$

Ecuación normal no plano

Sexa $P = (p_1, p_2, p_3)$ un punto do plano e $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ un vector perpendicular ó plano.

Un punto xenérico do plano, $X=(x,y,z)$, caracterízase porque o vector que vai de P a X , $\vec{PX} = \vec{OX} - \vec{OP}$, está contido no plano e, polo tanto, é perpendicular ó vector $\vec{n}$:

$$X \in p \Leftrightarrow \vec{PX} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{PX} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (\vec{OX} - \vec{OP}) \cdot \vec{n} = 0$$

Por compoñentes queda:

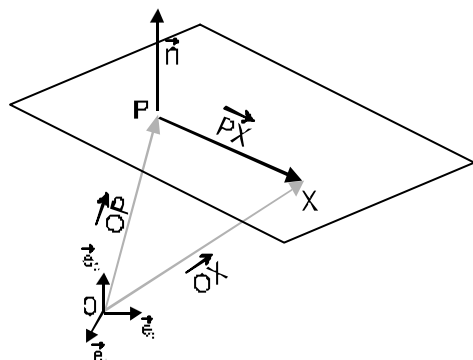
$$[(x, y, z) - (p_1, p_2, p_3)] \cdot (n_1, n_2, n_3) = 0$$

Expresión que recibe o nome de **ecuación normal** do plano e o vector $\vec{n}$ o de **vector característico** do plano.

Desenvolvemos a expresión anterior obtemos a ecuación xeral:

$$n_1x + n_2y + n_3z = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 \Leftrightarrow Ax + By + Cz = D$$

polo tanto, os coeficientes de x , y e z na ecuación xeral do plano son as compoñentes dun vector perpendicular ó plano.



Distancia entre dous puntos

Definimos a **distancia entre dous puntos** P e Q do espacio como o módulo do vector que vai dun ó outro:

$$d(P, Q) = |\vec{PQ}| = |\vec{OQ} - \vec{OP}|$$

Por compoñentes :

$$\left. \begin{aligned} P &= (p_1, p_2, p_3) \\ Q &= (q_1, q_2, q_3) \end{aligned} \right\} d(P, Q) = |(q_1, q_2, q_3) - (p_1, p_2, p_3)|$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

Exemplo: Distancia entre $P(1,-3,-2)$ e $Q(2,5,1)$

Solución:

$$\vec{PQ} = (2, 5, 1) - (1, -3, -2) = (1, 8, 3)$$

$$d(P, Q) = |\vec{PQ}| = \sqrt{1^2 + 8^2 + 3^2} = \sqrt{74}$$

Producto vectorial

Sexa $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ unha base ortonormal de V^3 e sexan vectores $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ dous vectores de V^3 .

Definimos o **producto vectorial** de $\vec{v}$ e $\vec{w}$, que se representa por $\vec{v} \wedge \vec{w}$, como o vector que se obtén pola expresión:

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Fíxate que o último determinante non é realmente un determinante (os elementos da 1ª fila non son números), só é unha expresión para lembrar como se calcula o produto vectorial.

Exemplo: Producto vectorial dos vectores $(-1, 4, 3)$ e $(6, 3, -2)$

Solución:

$$\begin{aligned} (-1, 4, 3) \wedge (6, 3, -2) &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = \\ &= (-17, 16, -27) \end{aligned}$$

Propiedades do produto vectorial

1. Anticonmutativa: $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V^3 \quad \vec{v} \wedge \vec{w} = -\vec{w} \wedge \vec{v}$
2. Distributiva: $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3 \quad \vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$
3. $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V^3 \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (a \cdot \vec{v}) \wedge \vec{w} = a \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$
4. Dous vectores teñen a mesma dirección se, e só se, o seu produto vectorial é $\vec{0}$.
5. $|\vec{v} \wedge \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(\alpha)$
6. $\vec{v} \wedge \vec{w}$ é perpendicular a $\vec{v}$ e a $\vec{w}$:

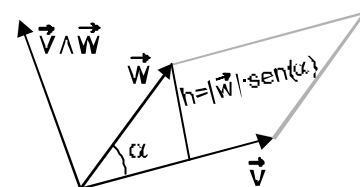
$$(\vec{v} \wedge \vec{w}) \perp \vec{v} \quad (\vec{v} \wedge \vec{w}) \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$$

Interpretación xeométrica:

- O módulo do produto vectorial de dous vectores é igual á área do paralelogramo que determinan:

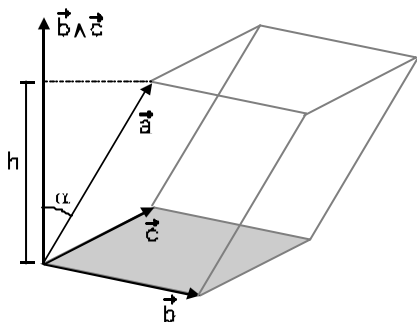
$$\text{Área} = |\vec{v}| \cdot h = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(\alpha) = |\vec{v} \wedge \vec{w}|$$

- A dirección é perpendicular ó plano que contén os vectores.
- O sentido ven dado pola regra do sacacorchos.



Producto mixto

Dados $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, vectores de V^3 . Definimos o seu **producto mixto** como o produto escalar de $\vec{a}$ polo produto vectorial de $\vec{b}$ e $\vec{c}$:



$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (a_1, a_2, a_3) \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Interpretación xeométrica: O valor absoluto do produto mixto de tres vectores é igual ó volume do paralelepípedo que determinan eses vectores: $V_{\text{paralelepípedo}} = A_{\text{base}} \cdot h$.

Ademais $A_{\text{base}} = |\vec{b} \wedge \vec{c}|$ e $h = \text{prox}_{\vec{b} \wedge \vec{c}}(\vec{a}) = |\vec{a}| \cdot \cos(\alpha)$:

$$|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b} \wedge \vec{c}| \cdot \cos(\alpha) = h \cdot |\vec{b} \wedge \vec{c}| = h \cdot A_{\text{base}} = V$$

Distancias a un plano

Distancia dun punto a un plano: A distancia dun punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ a un plano $p \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ é a distancia de P á súa proxección ortogonal sobre o plano.

A distancia é igual á proxección do vector $\vec{QP}$ (Q un punto calquera do plano) sobre $\vec{n}$ (vector normal ó plano):

$$\text{prox}_{\vec{n}}(\vec{QP}) = \frac{|\vec{QP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|[(p_1, p_2, p_3) - (q_1, q_2, q_3)] \cdot (A, B, C)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Rightarrow$$

$$d(P, \pi) = \frac{|A_1 p_1 + B p_2 + C p_3 - (A_1 q_1 + B q_2 + C q_3)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Dado que Q é un punto do plano, verifica a súa ecuación:

$$A \cdot q_1 + B \cdot q_2 + C \cdot q_3 + D = 0 \Rightarrow A \cdot q_1 + B \cdot q_2 + C \cdot q_3 = -D$$

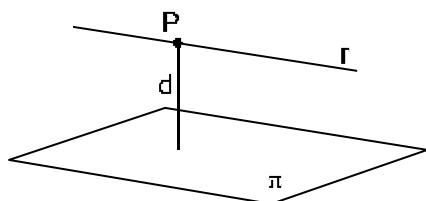
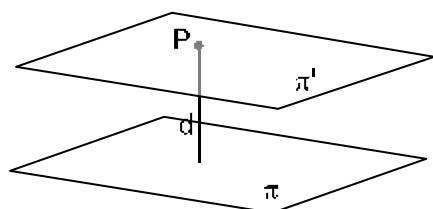
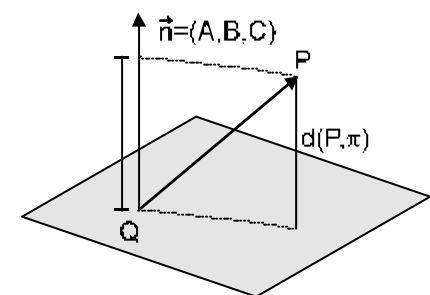
A expresión da distancia queda:

$$d(P, p) = \frac{|A_1 p_1 + B p_2 + C p_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Distancia entre dous planos: Cando se cortan ou son coincidentes, consideraremos que a distancia é 0.

Se son paralelos, a distancia entre eles será igual á distancia dun punto calquera dun dos planos ó outro.

Distancia entre unha recta e un plano: Se a recta corta o plano ou se está contida nel, consideraremos que a distancia é 0.



Se a recta é paralela ó plano, a distancia será igual á distancia dun punto calquera da recta ó plano.

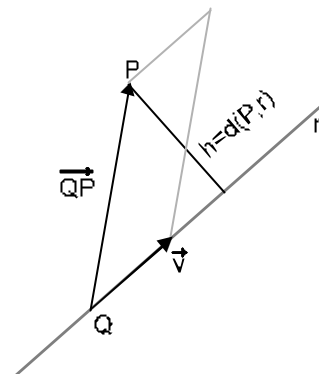
Distancia dun punto a unha recta

Definimos a distancia dun punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ a unha recta r como a distancia de P á súa proxección ortogonal sobre a recta.

Para calculala basta ter en conta que a distancia de P a r coincide coa altura do paralelogramo formado polos vectores $\vec{QP}$ (Q un punto calquera da recta) e $\vec{v}$.

A altura do paralelogramo é igual á súa área dividida pola base:

$$d(P, r) = \frac{|\vec{QP} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$



Distancia entre dúas rectas

Rectas que se cortan ou coincidentes: A distancia é 0.

Rectas paralelas: A distancia será igual á distancia dun punto calquera dunha das rectas á outra.

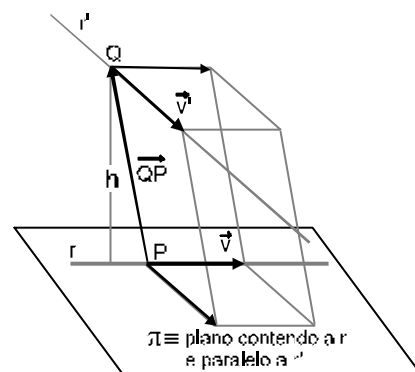
Rectas que se cruzan: A distancia entre elas será a distancia mínima entre os seus puntos.

Un xeito de calculala é atopar a ecuación do plano que contén a unha das rectas e é paralelo á outra. A distancia desa recta ó plano coincide coa distancia entre as rectas.

Un segundo método é semellante ó correspondente á distancia dun punto a unha recta pero utilizando o produto mixto.

A distancia entre as rectas r e r' é igual á altura do paralelepípedo que determinan os vectores $\vec{QP}$ (P e Q puntos de r e r'), $\vec{v}$ (vector de dirección de r) e $\vec{v}'$ (vector de dirección de r') e, polo tanto, é o volume do paralelepípedo dividido pola área da base:

$$d(r, r') = \frac{\left| \begin{vmatrix} \vec{QP} & \vec{v} & \vec{v}' \\ \vec{v} & \vec{v}' & \vec{v} \wedge \vec{v}' \end{vmatrix} \right|}{|\vec{v} \wedge \vec{v}'|}$$



Exemplo: Distancia entre rectas que se cruzan:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{2}$$

$$r' \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

Solución: Calculamos a ecuación do plano contendo a r e paralelo a r' :

$P(1, -2, 3)$ un punto, $\vec{v}(1, 1, 2)$ e

$\vec{v}'(-1, -1, -1)$ vectores de dirección:

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha - \beta \\ y = -2 + \alpha + \beta \\ z = 3 + 2\alpha - \beta \end{cases} \quad 3x + y - 2z = -5$$

Distancia de r' ó plano:

$$d(r', \pi) = \frac{\left| \frac{3 \cdot 0 + 4 - 2 + 5}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2}} \right|}{\sqrt{11}} = \frac{7}{\sqrt{11}}$$

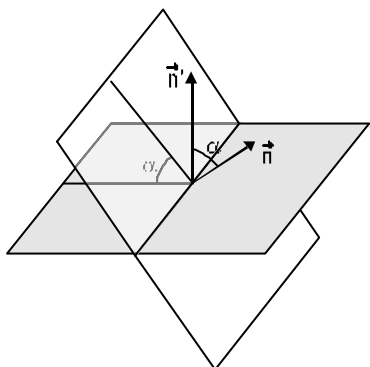
Ángulos

Ángulo entre dous planos que se cortan: Dous planos córtanse formando un diedro.

O ángulo que forman os planos $p \equiv Ax + By + Cz = D$ e $p' \equiv A'x + B'y + C'z = D'$ é o menor dos ángulos diedros que forman.

O coseno dese ángulo coincide co valor absoluto do coseno dos vectores característicos dos planos:

$$\cos(p, p') = \left| \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \right|$$

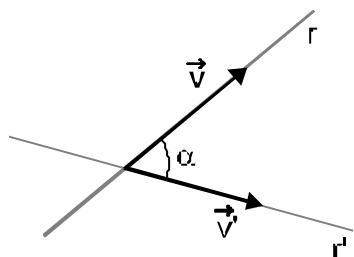


Ángulo entre dúas rectas que se cortan: É o menor dos dous ángulos que forman.

Se $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{v}' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ vectores de dirección das rectas r e r' . Segundo sexan os sentidos de $\vec{v}$ e $\vec{v}'$, o ángulo que forman é igual ó ángulo das rectas ou o complementario.

En calquera caso, o coseno do ángulo que forman as rectas coincide co valor absoluto do coseno do ángulo que forman os vectores de dirección:

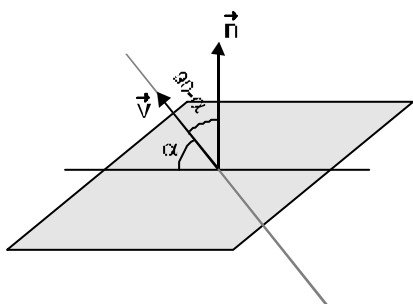
$$\cos(r, r') = \left| \frac{v_1 \cdot v'_1 + v_2 \cdot v'_2 + v_3 \cdot v'_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \sqrt{v'^2_1 + v'^2_2 + v'^2_3}} \right|$$



Ángulo dunha recta e un plano que se cortan: É o ángulo que forman a recta e a súa proxección ortogonal sobre o plano.

Se $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ é un vector de dirección da recta e $\vec{n} = (A, B, C)$ é o vector característico do plano, o ángulo que forman eses vectores é complementario do que forman a recta e o plano. Tendo en conta que o coseno dun ángulo é igual ó seno do complementario, temos:

$$\sin(r, p) = \left| \cos(\vec{v}, \vec{n}) \right| = \left| \frac{Av_1 + Bv_2 + Cv_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \right|$$



Problemas resoltos

1 Dados os vectores $(2,2,-1)$ e $(-1,1,0)$, pídese:

- Comproba que son ortogonais.
- Atopa outros dous vectores coas mesmas direccións cós anteriores e que teñan módulo 1.
- Atopa outro vector que forme cos do apartado anterior unha base ortonormal de V^3 .

Resolución: Dous vectores son ortogonais se, e só se, o seu produto escalar é 0:

a) $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \rightarrow (2,2,-1) \cdot (-1,1,0) = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 0$ Son ortogonais.

b) Para obter un vector coa mesma dirección ca outro e con módulo 1 só temos que multiplicar o vector polo inverso do módulo:

$$|(2,2,-1)| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3 \Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{3}(2,2,-1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \text{ ten módulo 1}$$

$$|(-1,1,0)| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \text{ ten módulo 1}$$

c) Un vector que forme cos anteriores unha base ortonormal ten que ser perpendicular a eles e ter módulo 1.

Lembra que o produto vectorial de dous vectores é outro vector perpendicular a eles:

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \wedge \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$$

Ese vector xa ten módulo 1 porque o módulo do produto vectorial de dous vectores é o produto dos módulos (neste caso 1 e 1) polo seno do ángulo que forman (e $\sin(90^\circ)=1$). Comprobémolo:

$$\left|\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{16}{18}} = 1$$

2 Atopa a ecuación xeral dos seguintes planos:

- Plano que pasa polo puntos $(2,-1,0)$, $(1,1,5)$ e $(3,0,4)$.
- Plano que pasa polo punto $(1,-5,2)$ e é paralelo ó plano $2x+3y+z+5=0$
- Plano que pasa pola orixe de coordenadas e contén á recta $(x,y,z)=(1,1,2)+t(-3,1,4)$.

Resolución: Dependendo dos datos será máis doado partir dunha ecuación ou doutra. Nós partiremos sempre da ecuación vectorial ou da normal.

a) Ecuación vectorial do plano: $(x,y,z) = (p_1,p_2,p_3) + a \cdot (v_1,v_2,v_3) + b \cdot (w_1,w_2,w_3)$

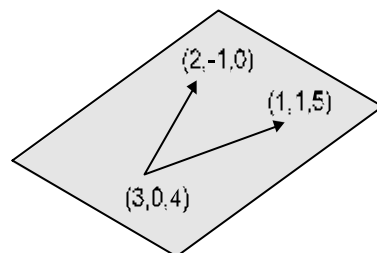
Necesitamos un punto do plano (pode ser calquera dos tres) e dous vectores de dirección (os que van dun punto ós outros dous):

$$\vec{v} = (2, -10) - (3, 0, 4) = (-1, -1, -4)$$

$$\vec{w} = (1, 15) - (3, 0, 4) = (-2, 11)$$

$$(x, y, z) = (3, 0, 4) + \alpha \cdot (-1, -1, -4) + \beta \cdot (-2, 11)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 - \alpha - 2\beta \\ y = -\alpha + \beta \\ z = 4 - 4\alpha + \beta \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1^a + 2 \cdot 2^a \rightarrow x + 2y = 3 - 3\alpha \\ 3^a - 2^a \rightarrow z - y = 4 - 3\alpha \end{array} \quad x + 3y - z = -1$$



b) Ecuación normal do plano:

$$[(x, y, z) - (p_1, p_2, p_3)] \cdot (n_1, n_2, n_3) = 0$$

Sabemos ademais, que dous planos paralelos teñen o mesmo vector característico, (2,3,1), polo que a ecuación do plano que buscamos será:

$$[(x, y, z) - (1, -5, 2)] \cdot (2, 3, 1) = 0 \rightarrow 2x + 3y + z + 11 = 0$$

c) Ecuación vectorial do plano: $(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + a \cdot (v_1, v_2, v_3) + b \cdot (w_1, w_2, w_3)$

Necesitamos dous vectores de dirección: Un pode ser o vector de dirección da recta e o outro o vector que vai da orixe a un punto calquera da recta.

$$\vec{v} = (-3, 14)$$

$$\vec{w} = (1, 1, 2) - (0, 0, 0) = (1, 1, 2)$$

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \alpha \cdot (-3, 14) + \beta \cdot (1, 1, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -3\alpha + \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = 4\alpha + 2\beta \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1^a - 2^a \rightarrow x - y = -4\alpha \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \rightarrow z - 2y = 2\alpha \end{array} \quad x - 5y + 2z = 0$$

3 Atopa a ecuación xeral dos seguintes planos:

a) Plano que contén ós "eixes" de coordenadas OX e OY.

b) Plano que pasa polo punto (0, -2, 1) e é perpendicular á recta: $(x, y, z) = (5, -1, 2) + t(1, 2, -1)$

c) Plano que pasa polo punto (1, 2, 3) e é perpendicular a recta de ecuación:

$$r \equiv \begin{cases} x - 3y + z - 5 = 0 \\ 2x + y - z = -2 \end{cases}$$

Resolución: a) As ecuacións dos eixes OX e OY son:

$$OX \equiv (x, y, z) = (0, 0, 0) + t(1, 0, 0)$$

$$OY \equiv (x, y, z) = (0, 0, 0) + t'(0, 1, 0)$$

O plano que buscamos é o que pasa pola orixe e ten por vectores de dirección ós vectores (1, 0, 0) e (0, 1, 0):

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0).$$

Outro xeito é ter en conta que un vector característico dese plano é o vector unitario coa dirección do eixe OZ: $\vec{n} = (0,0,1)$

A ecuación do plano será: $[(x,y,z) - (0,0,0)] \cdot (0,0,1) = 0 \rightarrow z = 0$

b) O vector de dirección da recta é un vector característico do plano que se pide, polo tanto:

$$[(x,y,z) - (0,-2,1)] \cdot (1,2,-1) = 0 \rightarrow x + 2y - z + 5 = 0$$

c) As ecuacións xerais dunha recta corresponden a dous planos que, ó cortarse, determinan esa recta. Polo tanto a recta está contida en cada un dos planos e os vectores característicos deses planos son perpendiculares ó vector de dirección da recta: Eses vectores son vectores de dirección do plano que buscamos: $\pi \equiv (x,y,z) = (1,2,3) + \alpha(1,-3,1) + \beta(2,1,-1)$

Outro xeito de abordar o problema é atopar un vector de dirección da recta que, polo dito antes, é un vector perpendicular ós vectores característicos dos planos. Ese vector pode ser o produto vectorial dos vectores característicos:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3 \Leftrightarrow \vec{v} = (2,3,7)$$

A ecuación do plano será: $[(x,y,z) - (1,2,3)] \cdot (2,3,7) = 0 \rightarrow 2x + 3y + 7z - 29 = 0$

4 Atopa a ecuación das seguintes rectas:

a) Recta que pasa polos puntos (1,4,-1) e (2,-1,0).

b) Recta perpendicular ó plano $3x - y + 2z - 4 = 0$ pasando polo punto (0,1,5).

c) Recta pasando polo punto (3,2,1) e paralela á recta: $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ x + 4y - z = 1 \end{cases}$

Resolución: Partiremos da ecuación vectorial da recta, $(x,y,z) = (p_1,p_2,p_3) + t \cdot (v_1,v_2,v_3)$, ou da ecuación continua, $\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} = \frac{z-p_3}{v_3}$, polo que debemos atopar un punto da recta e un vector de dirección.

a) $\vec{v} = (1,4,-1) - (2,-1,0) = (-1,5,-1) \rightarrow r \equiv (x,y,z) = (2,-1,0) + t(-1,5,-1)$ Ecuación vectorial.

$$\left. \begin{matrix} x = 2 - t \\ y = -1 + 5t \\ z = -t \end{matrix} \right\} \quad \left. \begin{matrix} 5x + y = 9 \\ x - z = 2 \end{matrix} \right\} \quad \text{Ecuacións xerais} \quad \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{-1} \quad \text{Ecuación continua.}$$

b) O vector característico do plano é un vector de dirección da recta. Polo tanto:

$$r \equiv (x,y,z) = (0,1,5) + t(3,-1,2) \quad \text{Ecuación vectorial.} \quad \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{2} \quad \text{Ecuación continua.}$$

c) O vector de dirección da recta que buscamos ten que ser perpendicular ós vectores característicos dos planos que aparecen na ecuación xeral de r . Polo tanto, podemos usar, como vector de dirección, o produto vectorial deses vectores característicos:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 \Leftrightarrow \vec{v} = (2, 1, 6)$$

A ecuación continua da recta será: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{6}$

5 Estudia para que valores do parámetro k , o seguinte sistema ten máis dunha solución e, nese caso, dar unha interpretación xométrica das solucións.

$$\begin{cases} x - ky + kz = k \\ -x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = k \end{cases}$$

Resolución: Dado que é un sistema 3×3 , para que teña máis dunha solución é necesario que o determinante de A sexa 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & -k & k \\ -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - k - k - k^2 - k^2 - 1 = -k^2 - 2k - 1$$

$$-k^2 - 2k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{-2} = -1$$

Comprobamos que efectivamente ten máis dunha solución (tamén pode ser incompatible) estudiando os rangos:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ O seu rango é 1 porque só ten unha fila independente (a 3ª é igual á 1ª e a 2ª é igual á 1ª multiplicada por -1).

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ O rango de M tamén é 1 polas mesmas razóns.

O sistema é compatible indeterminado e o grao de indeterminación é 2. A solución do sistema corresponde á intersección de *tres planos coincidentes*, ós puntos dun plano.

6 Estudia a posición relativa dos seguintes planos en función do parámetro k :

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv kx + 2y + 3z = 1 \\ \pi_2 &\equiv x + (k+1)y + 3z = k \\ \pi_3 &\equiv (k+1)x + 3(k+1)y + 9z = 2 \end{aligned}$$

Resolución: Estudamos cal é a intersección dos planos segundo os valores de k :

$$\begin{cases} kx + 2y + 3z = 1 \\ x + (k+1)y + 3z = k \\ (k+1)x + 3(k+1)y + 9z = 2 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} k & 2 & 3 \\ 1 & k+1 & 3 \\ k+1 & 3k+3 & 9 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} k & 2 & 3 & 1 \\ 1 & k+1 & 3 & k \\ k+1 & 3k+3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} k & 2 & 3 \\ 1 & k+1 & 3 \\ k+1 & 3k+3 & 9 \end{vmatrix} = -3k^2 + 9k - 6$$

$$-3k^2 + 9k - 6 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = 1 \end{cases}$$

Caso I: $k \neq 2$ e $k \neq 1$. Sistema compatible determinado, os planos córtanse nun único punto.

Caso II: $k=2$

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 3z = 2 \\ 3x + 9y + 9z = 2 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 9 & 9 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 12 + 9 - 9 - 36 - 4 = -16 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(M) = 3$$

O sistema é incompatible, os tres planos non teñen ningún punto en común.

Fixándonos na matriz do sistema vemos que a 2ª e a 3ª filas son proporcionais, agás os termos independentes (os vectores característicos dos planos 2º e 3º teñen a mesma dirección), polo tanto eses dous planos son paralelos.

Caso III: $k=1$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 6y + 9z = 2 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 6y + 9z = 2 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 6 = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ (ten dú as filas iguais)} \Rightarrow \text{rango}(M) = 2$$

O sistema é compatible indeterminado. É evidente que a 2ª ecuación é igual á 1ª, pero tiñamos que estudar os rangos para averiguar se o sistema é compatible ou non.

A solución é a recta intersección do 1º plano (ou o 2º pois son o mesmo) e o 3º.

7 Estudia a posición relativa das seguintes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x - y + z = -2 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} -x + y - 2z = 3 \\ 2x + 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

Resolución: Coas rectas en forma xeral, o xeito máis doado é estudar o rango das matrices A e M. Farémolo por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2^a - 1^a \cdot 2 \\ 3^a + 1^a \\ 4^a - 1^a \cdot 2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3^a \cdot 7 + 2^a \cdot 4 \\ 4^a \cdot 7 - 2^a \cdot 3}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -9 & 12 \\ 0 & 0 & 9 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{4^a + 3^a} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Vemos que rango de A é 3 e o rango de M é 4, polo tanto as rectas *crúzanse*.

8 Estudia a posición relativa das rectas $r \equiv \begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ 3x + 2y - z = 2 \end{cases}$ e $s \equiv \frac{x-1}{-6} = \frac{y+1}{8} = \frac{z-2}{-2}$ e calcula a distancia entre elas no caso de que non se corten.

Resolución: A posición relativa de dúas rectas podemos estudiala a partir do rango da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} p_1 - q_1 & p_2 - q_2 & p_3 - q_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \quad (p_1, p_2, p_3) \text{ e } (q_1, q_2, q_3) \text{ son un punto de cada recta.}$$

$$(v_1, v_2, v_3) \text{ e } (w_1, w_2, w_3) \text{ son vectores de dirección das rectas.}$$

Fíxate que o determinante desa matriz é o que aparece no numerador da fórmula para calcular a distancia entre dúas rectas que se cruzan:

$$d(r, r') = \frac{|[(p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3), (v_1, v_2, v_3), (w_1, w_2, w_3)]|}{|(v_1, v_2, v_3) \wedge (w_1, w_2, w_3)|}$$

- **Rango(A)=1**, as rectas son coincidentes.
- **Rango (A)=2**, as rectas córtanse (os vectores de dirección son independentes) ou son paralelas (un dos vectores de dirección é igual ó outro multiplicado por un número).
- **Rango(A)=3**, as rectas crúzanse.

Empezamos por atopar un punto e un vector de dirección de r resolvendo o sistema e obtendo as ecuacións paramétricas da recta:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ 3x + 2y - z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 \neq 0 \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 + 2t \\ 3x + 2y = 2 + t \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 4t \\ z = t \end{cases}$$

Un punto da recta é (0,1,0) e (3,-4,1) é un vector de dirección.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(A) \geq 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rango}(A) = 2 \end{cases}$$

Os vectores de dirección son dependentes ($\vec{v}_s = -2 \cdot \vec{v}_r$), as rectas son paralelas.

$$d(r, s) = d((1, -12), r) = \frac{|[(1, -12) - (0, 1, 0)] \wedge (3, -4, 1)|}{|(3, -4, 1)|} = \frac{|(6, 5, 2)|}{|(3, -4, 1)|} = \frac{\sqrt{36 + 25 + 4}}{\sqrt{9 + 16 + 1}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

9 Dada a recta $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ e o plano $\pi \equiv 2x - y + 3z + 6 = 0$, pídese:

- Calcular o ángulo que forman a recta e o plano.
- Determinar a ecuación continua da recta s , proxección ortogonal de r sobre π .

Resolución:

a) necesitamos un vector de dirección da recta, $(1, 2, -1)$ e un vector normal ó plano, $(2, -1, 6)$

$$\sin(\alpha) = \frac{|(2, -1, 6) \cdot (1, 2, -1)|}{|(2, -1, 6)| \cdot |(1, 2, -1)|} = \frac{|2 - 2 + 3|}{\sqrt{4 + 1 + 9} \cdot \sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{84}} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{84}}\right) = 19'1066''$$

b) A proxección ortogonal de r sobre π é a intersección do plano π' , que é perpendicular a π e contén a r , con π .

Para atopar a ecuación dese plano necesitamos un vector perpendicular ó plano.

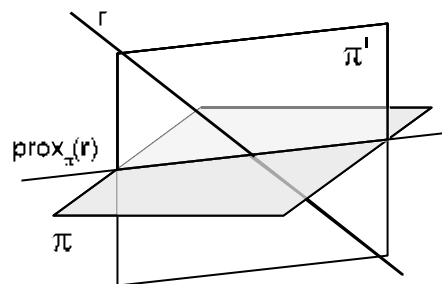
O vector de dirección da recta e o vector característico de π son vectores de dirección de π' , polo tanto o seu produto vectorial será perpendicular a π' :

$$\vec{n} = (1, 2, -1) \wedge (2, -1, 6) = (5, -5, -5) \rightarrow \vec{n}' = \frac{1}{5} \vec{n} = (1, -1, -1)$$

$$p' \equiv [(x, y, z) - (2, 1, 0)] \cdot (1, -1, -1) = 0 \Rightarrow p' \equiv x - y - z - 1 = 0$$

A ecuación da recta pedida será:

$$s \equiv \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = -6 \end{cases} \xrightarrow{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow z=t} \begin{cases} x = -7 - 4t \\ y = -8 - 5t \\ z = t \end{cases} \rightarrow s \equiv \frac{x+7}{-4} = \frac{y+8}{-5} = \frac{z}{1}$$



10 Dada a recta r de ecuación $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$ e o punto $P=(3, -7, -2)$, determina a ecuación do plano que contén a recta e está a distancia 3 do punto.

Resolución: A distancia dun punto a un plano $Ax+By+Cz+D=0$ vén dada pola fórmula:

$$d(P, \pi) = \frac{|A_1 p_1 + B p_2 + C p_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Como o plano ten que conter a recta, collendo dous puntos da recta e tendo en conta a fórmula anterior poderíamos propor un sistema de 3 ecuacións e 4 incógnitas que ten por solucións as ecuacións do plano que estamos buscando (só poderíamos despegar tres incógnitas en función da outra porque cada plano ten infinitas ecuacións, pero só se diferencian no produto por un número):

$$\left. \begin{aligned} P &= (1, 2, 3) \\ Q &= (1, 2, 3) + (1, 1, 4) = (2, 3, 7) \\ d(P, \pi) &= \frac{|3A - 7B - 2C + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} A \cdot 1 + B \cdot 2 + C \cdot 3 &= -D \\ A \cdot 2 + B \cdot 3 + C \cdot 7 &= -D \\ |3A - 7B - 2C + D| &= \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \end{aligned} \right\}$$

Desafortunadamente, resolver ese sistema non semella cousa fácil, e máis tendo un valor absoluto na última ecuación o que nos obrigaría a desdobralo en dous (hai dous planos nas condicións do problema).

Un xeito máis doado é utilizar a ecuación do feixe de planos que determina a recta r :

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 4x - z - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Feixe de planos} \equiv \begin{cases} 4x - z - 1 = 0 \\ 4x - z - 1 + \lambda(x - y + 1) = 0 \end{cases}$$

O plano buscado é o $4x - z - 1 = 0$ ou é da forma $4x - z - 1 + \lambda(x - y + 1) = 0$ e só temos que resolver unha ecuación cunha soa incógnita: λ

$$d((3, -7, -2), (4x - z - 1 = 0)) = \frac{|12 + 2 - 1|}{\sqrt{4^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{13}{\sqrt{17}} \neq 3 \quad (4x - z - 1 = 0 \text{ non é o plano})$$

$$4x - z - 1 + \lambda(x - y + 1) = 0 \Leftrightarrow (4 + \lambda)x - \lambda y - z + (\lambda - 1) = 0$$

$$d((3, -7, -2), ((4 + \lambda)x - \lambda y - z + (\lambda - 1) = 0)) = \frac{|12 + 3\lambda + 7\lambda + 2 + \lambda - 1|}{\sqrt{(4 + \lambda)^2 + \lambda^2 + (-1)^2}} = 3$$

$$|11\lambda + 13| = \sqrt{2\lambda^2 + 8\lambda + 17} \xrightarrow{\text{elevando ó cadrado}} 121\lambda^2 + 286\lambda + 169 = 9 \cdot (2\lambda^2 + 8\lambda + 17)$$

$$103\lambda^2 + 214\lambda + 16 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-214 \pm \sqrt{214^2 - 4 \cdot 103 \cdot 16}}{2 \cdot 103} = \frac{-214 \pm 198}{206} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-16}{206} \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Os planos pedidos son:

$$\lambda = -2 \rightarrow \pi \equiv 4x - z - 1 + (-2)(x - y + 1) = 0 \Leftrightarrow \pi \equiv 2x + 2y - z - 3 = 0$$

$$\lambda = \frac{-8}{103} \rightarrow \pi \equiv 4x - z - 1 + \left(\frac{-8}{103}\right)(x - y + 1) = 0 \Leftrightarrow \pi \equiv \frac{404}{103}x + \frac{8}{103}y - z - \frac{111}{103} = 0$$

Problemas propostos

- 1 a) Calcula o módulo dos seguintes vectores: $\vec{v} = (2, 1, -2)$ $\vec{w} = (1, 0, 2)$
- b) ¿Canto mide o ángulo que forman?
- c) Demostra que se dous vectores son linealmente dependentes, entón forman un ángulo de 0° (a outra implicación tamén é certa).

- 2 Dados os vectores $(8, 4, -8)$ e $(1, 0, t)$.

- a) Calcula o valor de t de xeito que os vectores sexan ortogonais.
- b) Para ese valor de t , atopa tres vectores, dous coas mesmas direccións dos anteriores, que formen unha base ortonormal.

3 Os vectores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ son perpendiculares ó vector $\vec{u}$, ¿tamén o son entre si? Xustifica a resposta.

4 Calcular algún valor do parámetro a para que o produto vectorial de $(1,2,a)$ e $(1,a,0)$ teña a mesma dirección có eixe OZ.

Suxerencia: A dirección do eixe OZ vén dada polo vector $(0,0,1)$.

5 Calcular a área do triángulo de vértices as interseccións do plano $2x + y + z = 2$ cos eixes de coordenadas.

6 Calcula a ecuación xeral dos seguintes planos:

a) Plano que pasa polos puntos $(2,1,-3)$, $(1,1,0)$ e $(5,-1,0)$.

b) Plano que pasa polo punto $(1,2,3)$ e é paralelo ó plano $2x+3y+z=4$.

c) Plano que pasa por $(1,-2,1)$ e é perpendicular á recta $\begin{cases} x+y=-2 \\ 2x-3z=1 \end{cases}$

d) Plano que pasa polo punto $(1,0,-2)$ e contén a recta $\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x-y+4x-1=0 \end{cases}$

7 Calcula a ecuación continua das seguintes rectas:

a) Recta que pasa por $(4,2,1)$ e é paralela á recta $\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x-y+4x-1=0 \end{cases}$

b) Recta que pasa polo punto $(-1,2,-1)$ e é perpendicular ó plano $2x - y - 3z + 2 = 0$.

c) Recta pasando pola orixe de coordenadas e perpendicular ó plano de ecuación:

$$(x,y,z) = (10,-5) + a(11,-3) + b(-2,10)$$

8 Calcula k de xeito que a distancia de $P = (1,k,-2)$ ó plano $p \equiv 2x - y - 2z + 2 = 0$ sexa 5.

9 Estudia a posición relativa dos planos $p_1 \equiv x - y - 3z + 2 = 0$ e $p_2 \equiv -3x + 3y + 9z + 1 = 0$ e calcula a distancia entre eles.

10 Ecuación do plano que pasa por $(1,-2,1)$ e $(0,1,0)$ e é paralelo á recta $\frac{x-1}{2} = \frac{2y+1}{-2} = z+1$.

Suxerencia: Fíxate que a ecuación da recta non está en forma continua.

11 Obtéñanse as ecuacións da recta intersección do plano π que pasa polos puntos $A(1,0,1)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,1)$ co plano que sendo perpendicular a π contén a recta $\frac{x-1}{2} = y-2 = \frac{z+1}{-2}$

12 Calcular o volume do tetraedro que forman os planos: $x=0$, $y=0$, $z=0$ e $x+y+z=2$

Suxerencia: Os vértices do tetraedro son as interseccións de 3 dos planos.

13 Estudia a posición relativa dos seguintes planos segundo os valores do parámetro k :

$$\pi_1 \equiv x - 2y - z = k - 1 \quad \pi_2 \equiv kx + y + z = -1 \quad \pi_3 \equiv -x - 5y - kz = k + 2$$

14 Determina o valor de k para que os planos seguintes córtense nunha recta:

$$\pi_1 \equiv -x + ky - 5z = 3 \quad \pi_2 \equiv kx - y + z = -1 \quad \pi_3 \equiv x + y - 4z = k$$

15 Estudiar en función do parámetro k a posición relativa das rectas:

$$r \equiv \begin{cases} y - 2z = 0 \\ x - az = 1 - a \end{cases} \quad s \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1}$$

16 Calcula as seguintes distancias:

a) Do punto $P(1,2,3)$ á recta $\begin{cases} x + y = -2 \\ 2x - 3z = 1 \end{cases}$ c) Entre os planos $x - 3y - 2 = 0$ e $-3x + 9y - 1 = 0$

b) De $P(1,1,-1)$ ó plano $2x - y + 2z = 4$ d) Entre as rectas $r \equiv \begin{cases} x + y - 5z = -2 \\ x - 3z = -2 \end{cases}$ $s \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = z$

17 Calcular o ángulo formado polas rectas: $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$ $s \equiv \frac{x-1}{2} = y + 3 = z - 1$

18 Ecuación do plano contendo a recta $r \equiv \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ e paralelo a $s \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y+3}{2} = z - 1$

19 Dadas as rectas $r \equiv \begin{cases} x - 2z = a - 2 \\ y - az = -a \end{cases}$ $s \equiv \frac{x+1}{2} = y = \frac{z+a}{a}$. Determina os valores de a para que

sexan coplanarias e, neses casos, calcula a ecuación xeral do plano que as contén.