



TEOREMA DA INCOMPLETITUDE DE GÖDEL

Kurt Gödel



Kurt Gödel naceu en Brno, Moravia, o 28 de abril de 1906. Fillo de expatriados alemáns cunha baixa educación, foi un estudante brillantísimo, sensible, introvertido, bastante enclenque e moi inquisitivo (tanto que chegou a ser alcumado "Herr Warum", "señor Porque"). Ademais tiña unha preocupación enfermiza pola hixiene e a dieta, crese que se debeu a unhas febres reumáticas; e non só iso, os grandes estudosos da vida deste personaxe din que as súas ansias de racionalidade se debían ao transfondo recorrente dunha inestabilidade mental, dunha hipocondría.

Estudou na universidade de Viena, coa intención de cursar física, pero impresionado polas leccións de Philipp Furtwängler e Hans Hahn, Kurt orientouse polas matemáticas. Dous anos despois foi invitado ao Círculo de Viena, onde entrou en contacto co filósofo Rudolf Carnap e co matemático Karl

Menger que lle axudaron a familiarizarse coa lóxica matemática e a filosofía. Gödel foi sempre un platónico convencido de que ademais do mundo dos obxectos existe outro dos conceptos, ao que se chega por intuición. E, pensaba que o valor da verdade é independente do que coñecemos, tamén sabía que esta filosofía era unha gran axuda nas matemáticas.

A partires de 1928, comezou a deixar de lado o Círculo de Viena e comezou a adquirir recoñecemento internacional na lóxica matemática, grazas á súa tese doutoral "A completitude dos axiomas do cálculo funcional de primeira orde" e tamén coa súa memoria "Sobre as proposicións formalmente indicibles de Principia Mathematica e sistemas afíns". E en 1931, apareceu un artigo que demostrou que existen obxectos que obedecen á teoría dos números, pero que en certos aspectos deixan de comportarse como números, este é o teorema da incompletitude. Se os axiomas non se contradín entre si, entón ese mesmo feito codificado en enunciado numérico será formalmente indicible (nin demostrable, nin refutable) a partires de ditos axiomas.

As obsesións e manías de Kurt Gödel non lle impediron continuar co seu traballo, grazas tamén ao afecto de Adele Porket, bailarina seis anos maior ca el e que coñeceu nun local nocturno de Viena nos seus anos de estudante. Tras unha longa tempada como parella,

casaron en setembro de 1938. No 1939, Gödel seguía sumido no traballo indiferente aos acontecementos políticos e mentres o mundo afundía ao seu redor, el estaba sen traballo e a punto de ser recrutado polas forzas armadas nazis, así que pide axuda ao Instituto de Estudos Avanzados de Princeton, obtivo os visados para abandonar o país, e en xaneiro de 1940, Gödel e Porket, viaxaron cara a San Francisco. Kurt xa non volvería a saír dos Estados Unidos e en 1946 obtivo a cidadanía estadounidense. No 1953, foi nomeado catedrático de claustro de Princeton e elixido membro da Academia Nacional das Ciencias. Durante todos estes anos daba un paseo matinal con outro ilustre refuxiado, Albert Einstein. Naqueles momentos Gödel abandonara o seu traballo sobre a teoría dos conxuntos e orientouse cara á filosofía e a teoría da relatividade. O seu último artigo aparece no 1958, e fai a súa última aparición en público no 57, para recibir un doutorado honorífico da Universidade Rockefeller.

Na súa vellez coidou da súa muller á que un ataque cardíaco deixou inválida. Temeroso de ser envelenado, deixou de comer; morreu de

TEOREMA DA INCOMPLETITUDE DE GÖDEL

desnutrición o 14 de xaneiro de 1978.

Teorema da incompletitude de Gödel

O coñecido como teorema da incompletitude de Gödel, son en realidade dous teoremas. Todo teorema se reduce a unha lista inicial de axiomas, os cales se deben de coñecer. Unha teoría pode partir dun número finito de axiomas, ou ben dun número infinito de axiomas, co único requisito de que dada unha afirmación, esta se poida verificar de forma mecánica se é un dos axiomas. Aínda que falar de un número infinito de axiomas pareza estraño, isto é xustamente o que sucede cos números naturais.

O primeiro teorema, dos dous que conforman a teoría da incompletitude, establece que calquera teoría matemática coherente T que inclúa os números naturais, é incompleta. T contén proposicións S , que nin estas nin as súas negacións se poden demostrar en T . A existencia dun sistema incompleto non é particularmente sorprendente, isto pode significar simplemente que non se descubriron todos os axiomas necesarios. Gödel demostrou que na maioría dos casos non se pode atopar o conxunto completo de axiomas, xa que cada vez que engadamos un novo axioma á teoría, quedará outro fora do noso alcance. Ademais cando utilizamos un número infinito de axiomas, dada unha afirmación, non saberemos se é un axioma do sistema ou non. Parafraseando este primeiro

teorema, o que di é que nunca se poderá atopar un sistema axiomático capaz de demostrar todas as verdades matemáticas e ningunha falsidade.

O segundo teorema afirma que a teoría T non pode conter a demostración da súa propia coherencia, pero esta si se pode demostrar noutra teoría maior, pero para demostrar esta nova teoría precisaríamos outra aínda maior, dando así lugar a unha sucesión infinita de teorías. Tamén podemos parafrasear este teorema dicindo que: se nun sistema axiomático se pode demostrar que é consistente a partir de si mesmo, entón ese teorema será inconsistente.



David Hilbert e o formalismo

Entre 1928 e 1900 o matemático alemán David Hilbert propuxo que toda teoría T , debería ter uns fundamentos lóxicos sólidos, é dicir, un teorema dunha teoría T é unha proposición deducible a

partir de un conxunto de axiomas, simplemente aplicando múltiples regras da lóxica. Este é o método denominado formalismo, que tentaba establecer coherencia e integridade de toda teoría T e decidir mediante algoritmos se unha proposición dada é un teorema de T , así as matemáticas reduciríanse a un proceso mecánico. Hilbert tivo éxito para casos sinxelos, pero Kurt Gödel demostrou que os primeiros obxectivos de Hilbert non se poden acadar para toda teoría T .

Moitos lóxicos pensan que os teoremas de incompletitude de Gödel asestaron son un mazazo fatal ao formalismo de Hilbert. A postura aceptada é que o segundo teorema do teorema da incompletitude foi o encargado de dar este golpe de graza. Algúns sen embargo pensan que foi o primeiro teorema o que asestou este golpe, e incluso hai quen pensa que ningún destes teoremas o fixo.

Sistema utilizado por Gödel no seu teorema

Mediante un enxeñoso sistema de numeración, Gödel traducía as proposicións sobre T como "esta proposición non ten demostración en T " a expresións numéricas en T . Se a proposición se podía demostrar en T , entón a susodita proposición sería falsa, contradicindo así a coherencia de T . Polo tanto, a proposición non é demostrable, e así, a proposición será certa.

Polo mesmo razoamento, a proposición non se pode demostrar, xa que se se puidese demostrar esta sería falsa. E así, T é incompleta. Ademais, a coherencia de T non se pode demostrar dentro de T , se isto fose posible, o razoamento anterior demostraría a proposición, e isto