



# Planificación

1	Introducción .....	2
2	Cadro de prelacións e matriz de encadeamento .....	3
3	Representación dos grafos parciais .....	5
4	Construcción do grafo PERT .....	7
5	Matriz de Zaderenko para determinación de tempos Early e Last .....	8
6	Camiño crítico e determinación das folguras.....	10
7	Representación do cronograma do proceso .....	12



# 1 INTRODUCCIÓN

A continuación descríbese a metodoloxía PERT empregada para a planificación, programación e control da produción na industria.

Esta técnica desenvolveuse inicialmente con unha finalidade bélica, aínda que, posteriormente, atopouse unha grande aplicación no campo da economía da empresa, onde é de uso frecuente.

O método PERT é unha derivación da teoría de grafos ou redes. Un grafo é un conxunto de elementos ligados por relacións orientadas. É un instrumento ó servizo da toma de decisións que permite a planificación, execución e control de procesos que requiren a coordinación dun grande número de actividades, entre as que existen relacións de precedencia e que se deben realizar nun tempo limitado.

As siglas PERT proveñen de *Program Evaluation and Review technique*. Así foi como se denominou a esta técnica inicialmente, no proxecto no que foi ideada e desenvolta. A necesidade xurde coa construción de submarinos atómicos armados con proxectís "Polaris". Era un proxecto conxunto, realizado pola mariña norteamericana, a empresa aeronáutica *Lockheed* e os consultores de Chicago *Booz-Allen&Hamilton*. A idea comezou a poñerse en marcha no ano 1957 e a finais de 1958 aplicouse ó programa de mísiles da armada, conseguíndose un adianto de dous anos sobre as previsións iniciais (5 anos).

A idea fundamental na que se basea o método PERT é a da interrelación temporal existente entre as distintas tarefas, actividades ou fases dun proceso complexo.

O PERT debe partir das decisións de planificación. A planificación estratéxica dos recursos enfrontase con unha variedade de estratexias entre as que se debe elixir un programa ou proceso. No PERT, o proceso en cuestión ven dado e o que se debe estudar é a forma de realizalo mais economicamente posible.

Os obxectivos do PERT son:

- Anticipa-la duración mínima do proceso.
- Determinar que actividades son críticas, é dicir, que actividades deben ser obxecto dun maior control por ser actividades que se sofren demoras poden provocar un aprazamento na conclusión do proceso.

Ademais deses dous obxectivos, o PERT é unha ferramenta que ten outras aportacións, e por eso converteuse nun instrumento popular de xestión científica:

- Producción de planes realistas, detallados, e de fácil difusión, que incrementan as posibilidades de acadar-los obxectivos do proceso.
- Predicción das duracións e o grafo de verosimilitude das mesmas.
- Centra-la atención nas partes do proceso que son susceptibles de impedir ou demorar a súa realización.
- Informar da incompleta utilización dos recursos.
- Simulación sinxela de alternativas.
- Obtención de informes completos e frecuente do estado do proceso.

Dado que o PERT é un instrumento de programación temporal, require:

- Relaciona-lo conxunto de actividades que se deben realizar.
- Estima-lo tempo que requiren cada unha delas.
- Determina-la orde na que deben realizarse as actividades, é dicir, determina-las relacións de precedencia que existen entre elas, e sinalar cales deben preceder a outras.



## 2 CADRO DE PRELACIÓNS E MATRIZ DE ENCADEAMENTO

O método PERT, como se dixo anteriormente, parte da descomposición do proceso nunha serie de actividades. Enténdese por actividade a execución dunha tarefa que existe para a súa realización a utilización de recursos tales como: man de obra, maquinaria, materiais, etc.

Despois do concepto de actividade, o método PERT establece o concepto de suceso. Un suceso é un acontecemento, un punto no tempo, unha data no calendario. O suceso non consume recursos, so indica o principio ou fin dunha actividade ou dun conxunto de actividades. O primeiro paso na aplicación do PERT é a identificación das actividades e a determinación das relacións de precedencia existentes.

*Supoñamos o exemplo da elaboración dun produto nunha industria cárnica, coas seguintes actividades e a súa relación entre elas:*

- A actividade **A** precede ás actividades **B, C e D**.
- A actividade **B** precede a **G e E**
- A actividade **C** precede a **H**
- A actividade **D** precede a **F, J e K**
- As actividades **E e F** preceden a **H**
- A actividade **G** precede a **I**
- As actividades **H, I, J, K** preceden a **L**

A duración de cada actividade é a seguinte:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
15	4	2	7	10	11	6	9	5	2	8	5

Para representar estas prelacións pódese empregar o cadro de prelacións ou a matriz de encadeamento. No primeiro caso constrúese unha táboa na que se escriban as actividades na columna da esquerda e se indiquen na columna da dereita as actividades que preceden á correspondente na mesma fila. No caso do exemplo anterior, o cadro de prelacións é:

ACTIVIDADES	PRECEDENTES
A	-
B	A
C	A
D	A
E	B
F	D
G	B
H	E, E, F
I	G
J	D
K	D
L	H, I, J, K



A actividade inicial do proceso recoñécese no cadro de prelacións por non ter ningunha actividade precedente (no exemplo anterior: actividade A). A actividade ou actividades fin do proceso recoñécense no cadro de prelacións por non aparecer na segunda columna (no exemplo anterior: actividade L).

Outra posibilidade para representa-las prelacións é a matriz de encadeamento. A matriz de encadeamento consiste nunha matriz cadrada con unha dimensión igual ó número de actividades nas que foi descomposto o proceso.

Cando un elemento desa matriz aparece marcado, por exemplo, con un X, esto indica que para poder iniciar a actividade que corresponde á fila que cruza ese elemento é necesario ter rematado previamente a actividade que corresponde á columna que cruza dito elemento.

Así, a matriz de encadeamento para o exemplo anterior é:

		ACTIVIDADES PRECEDENTES											
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
ACTIVIDADES SEGUINTE	A												
	B	<b>X</b>											
	C	<b>X</b>											
	D	<b>X</b>											
	E		<b>X</b>										
	F				<b>X</b>								
	G		<b>X</b>										
	H			<b>X</b>		<b>X</b>	<b>X</b>						
	I							<b>X</b>					
	J				<b>X</b>								
	K				<b>X</b>								
	L								<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>	<b>X</b>	

É interesante observar que aquelas filas da matriz nas que non aparece ningún X nons indican as actividades que non teñen precedentes, é dicir, o suceso inicial. Por outra parte, as columnas nas que non aparece ningún X nos indican as actividades que non teñen nada despois, polo tanto serían as actividades finais.

A partir da matriz de encadeamento ou do cadro de prelacións, indistintamente, pódese construír facilmente o grafo PERT. A utilización do cadro ou da matriz dependerá do número de actividades, sendo preferible a matriz cando se dispoña de moitas actividades.



### 3 REPRESENTACIÓN DOS GRAFOS PARCIAIS

Para representa-las diferentes actividades nas que se descompón un proceso, así como os seus correspondentes sucesos, utilízase unha estrutura de grafo.

Os nodos ou vértices representan estados ou situacións, en concreto representan o remate das actividades precedentes e o comezo das seguintes, definidas polo seu sentido e orientación. Os arcos ou frechas representan as actividades do proceso.

Cada actividade désígnase por un par de números (i,j) que se corresponden cos números dos nodos de comezo e termino da mesma. Compre sinalar que a lonxitude da frecha non ten por que estar relacionada coa duración da actividade á que representa. O valor do arco no PERT representa a variable tempo de execución da actividade correspondente.

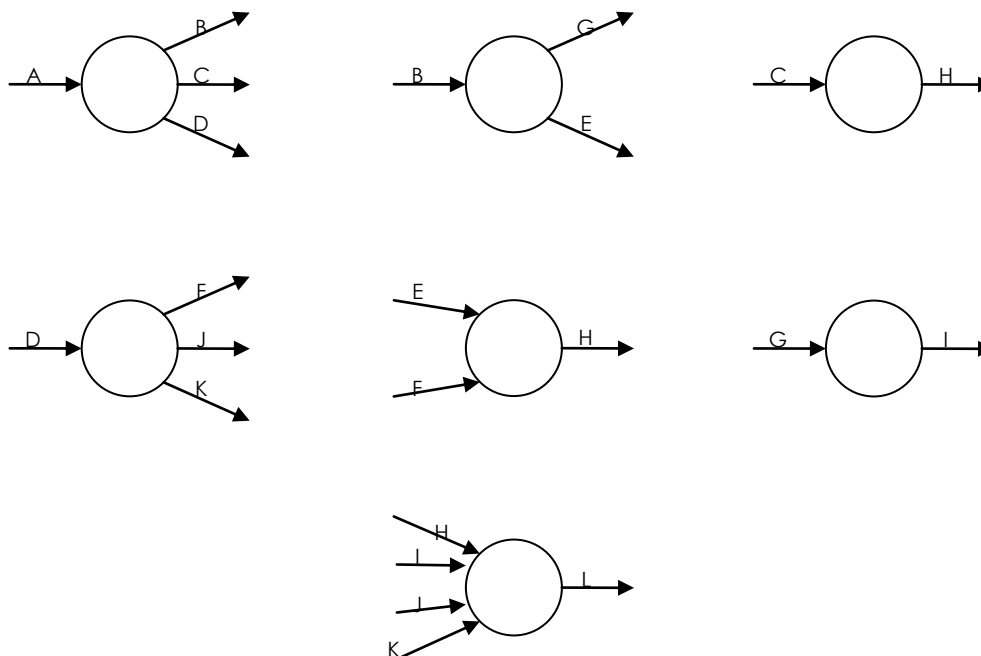
O primeiro nodo representa o estado de comezo do proceso. Deste primeiro nodo parten as frechas que representan ás actividades iniciais, é dicir, aquelas que non estaban precedidas por ningunha. De igual xeito, o último nodo representa a situación na que se ten rematado o proceso e no que teñen destino as frechas que representen a tódalas actividades que non preceden a ningunha outra.

Cada arco ou frecha, pola súa parte, tamén ten que ter un nodo de orixe e outro de destino. O nodo de orixe representa a situación na que se teñen rematado as actividades precedentes e, polo tanto, pode comezar a actividade en cuestión.

O nodo de destino representa a situación na que se ten finalizado a actividade en cuestión e, polo tanto, poden comezar as que lle seguen, na orde secuencial segundo o cadro de precedencias.

Antes de realiza-la representación do grafo PERT pode ser de grande axuda a representación dos grafos parciais, que se deducen da matriz de encadeamento ou do cadro de prelacións.

No exemplo anterior os grafos parciais serían:





Hai catro tipos de prelacións:

- Praelacións lineais, que son as que se presentan cando, para poder iniciar unha determinada actividade, é necesario que se teña finalizado previamente unha única actividade.
- Praelacións de converxencia, que se producen cando para poder iniciar certa actividade é necesario que se teñan finalizado previamente dúas ou máis actividades.
- Praelacións de diverxencia. Son as que aparecen cando para que podan iniciarse dúas ou máis actividades é necesario que se teña rematado anteriormente unha única actividade.
- Praelacións mixtas, que dan lugar a unha converxencia e unha diverxencia. Son aquelas que aparecen cando para que se podan iniciar un conxunto de dúas ou máis actividades, é preciso que se teñan rematado previamente máis de unha actividade.



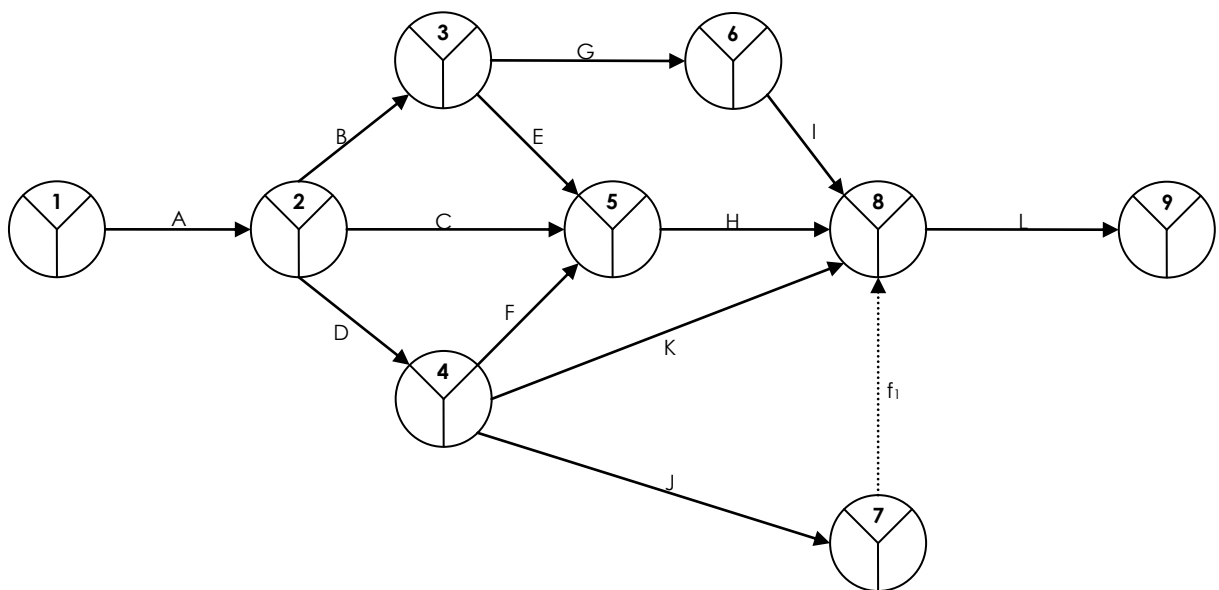
## 4 CONSTRUCCIÓN DO GRAFO PERT

Unha vez que se teñen representado os grafos parciais, hai que compoñelos para obte-lo grafo PERT. Tamén é necesario numerar os nodos, seguindo unha orde cronolóxica, de menor a maior.

Para a construción do grafo PERT compre respecta-los seguintes principios:

- Principio de designación sucesiva, que prohibe, ó ir asignando sucesivamente un número ós vértices, numerar un nodo se se atopa sen numerar algún dos nodos dos que parten frechas que finalizan nel.
- Principio de unicidade do estado inicial e do estado final, que prohibe a existencia de mais de un nodo de comezo e mais dun nodo final, pois so pode existir unha situación de inicio do proceso e unha situación de finalización do mesmo.
- Principio de designación unívoca, que prohibe a existencia de dúas ou mais frechas que salgan do mesmo nodo e que teñan o mesmo nodo de destino. Unha actividade pode caracterizarse polo par de números correspondentes ó do nodo do que parte a súa frecha e ó nodo no que finaliza. Se dúas ou mais actividades son representadas con frechas que tivesen o mesmo nodo de orixe e de destino, recibirían a mesma denominación. Esto evitaríase se se cumpre o principio de designación unívoca. Para que se cumpra o principio de unicidade será necesario utilizar actividades ficticias. As actividades ficticias son enlaces lóxicos que permiten reflectir formalmente as prelacións existentes entre as diferentes actividades que forman o proceso. Caracterízanse porque non consumen tempo nin recursos. A actividade que enlazará directamente co nodo de destino será a que teña tempo máis longo, mentres que a actividade que se complementa con unha actividade ficticia será a máis curta. Nun grafo PERT nunca deben usarse máis actividades ficticias que as estrictamente necesarias.

O grafo PERT correspondente ó exemplo anterior sería:



Na representación dos nodos divídese o vértice en 3 partes. Na parte superior indícarase o número de nodo. As dúas partes inferiores están reservadas, na parte da esquerda, para o tempo early, mentres que a parte da dereita, para o tempo last dese nodo.



## 5 MATRIZ DE ZADERENKO PARA DETERMINACIÓN DE TEMPOS EARLY E LAST

O tempo early dun nodo é o número mínimo de unidades de tempo necesarias para acadar a situación representada por ese nodo. Defínese *camiño* como un conxunto de actividades sucesivas. Así, o tempo early dun nodo é a duración do camiño máis longo que conduce dende o nodo inicial ata ese nodo.

O tempo last dun nodo é o momento máis tardío no que é admisible chegar á situación descrita por ese nodo, sen que se retrase a execución do proceso sobre o mínimo imprescindible. Os tempos last calcúlanse de xeito inverso ós early.

O tempo last do último nodo debe ser igual ó tempo early, pois ese nodo representa a finalización do proceso, e non é admisible que se remate máis tarde do tempo mínimo.

Nembargantes, o procedemento de cálculo dos tempos early e last é tanto máis complexo canto máis grande é o grafo. Así, en grafos formados por numerosas actividades é recomendable seguir a metodoloxía proposta por Zaderenko.

En primeiro lugar constrúese unha matriz cadrada, con unha dimensión igual ó número de vértices que posúe o grafo. No exemplo anterior sería unha matriz de 9 por 9. Os elementos desa matriz indican os tempos PERT das actividades que nacen no vértice que corresponde á fila que cruza ese elemento e remata no vértice que corresponde á columna de dito elemento.

j \ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		15	-	-	-	-	-	-	-
2			4	7	2	-	-	-	-
3				-	10	6	-	-	-
4					11	-	2	8	-
5						-	-	9	-
6							-	5	-
7								0	-
8									5
9									

Para calculalos tempos early comézase por engadir unha columna adicional, na que se irán escribindo os valores dos tempos early. O primeiro elemento desa columna é cero, xa que este é o valor do tempo early do suceso inicio do proceso. Para calculalos tempos early dos demais sucesos opérase do seguinte xeito: súmanse os elementos da columna que corresponde ó suceso que estamos calculando ós elementos da columna adicional, na altura da fila que lle corresponda. No caso de que se teñan varios valores, elixírase a suma con maior valor total.

Para calculalos tempos last engádesse unha fila adicional na parte inferior da matriz, na que se irán escribindo os valores dos respectivos tempos. O primeiro elemento da lista, comezando pola dereita é o mesmo valor que o tempo early correspondente, xa que, como se dixo anteriormente, no último suceso os tempos early e last coinciden. Os tempos last dos demais sucesos calcúlanse restando os elementos da fila que corresponde ó suceso que estamos calculando ós elementos da fila adicional que estean na posición vertical do tempo considerado. No caso de ter varios valores escóllese o que teña menor valor (despois de facela diferenza).

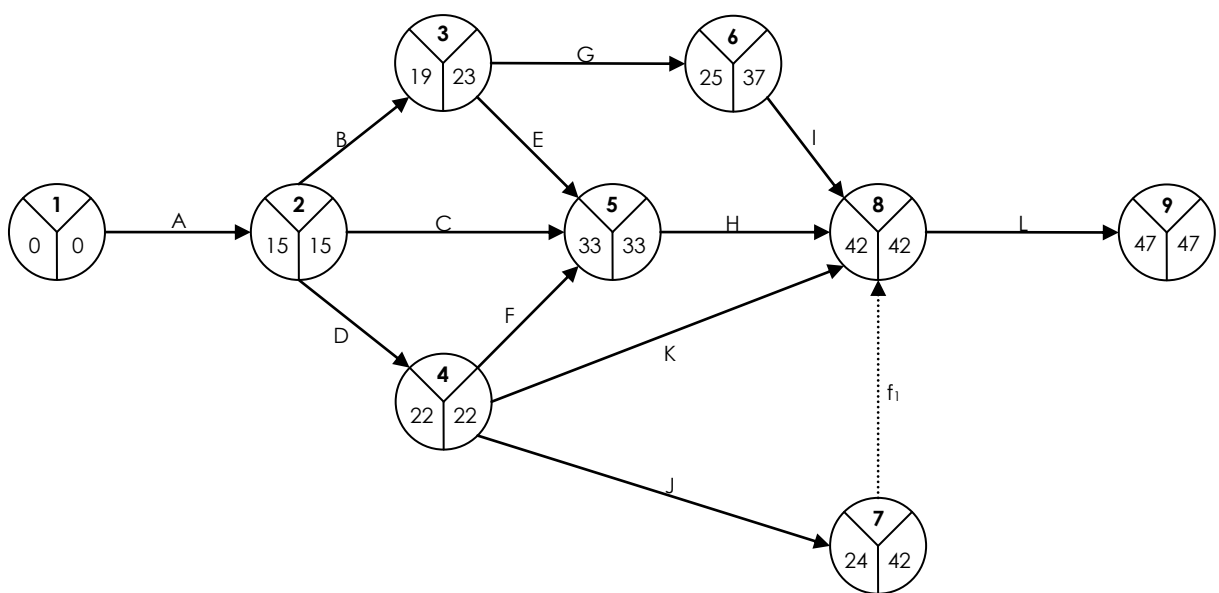


Así, por exemplo, no noso caso os tempos early e last son:

<i>i</i> \ <i>j</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	<i>t</i>
1		15	-	-	-	-	-	-	-	0
2			4	7	2	-	-	-	-	15 = 0 + 15
3				-	10	6	-	-	-	19 = 15 + 4
4					11	-	2	8	-	22 = 15 + 7
5						-	-	9	-	33 = 15 + 2 = 19 + 10 = 22 + 11
6							-	5	-	25 = 19 + 6
7								0	-	24 = 22 + 2
8									5	42 = 22 + 8 = 33 + 9 = 25 + 5 = 24 + 0
9										47 = 42 + 5

<i>f*</i>	0	15	23	22	33	37	42	42	47
-----------	---	----	----	----	----	----	----	----	----

$15 - 15 =$   
 $23 - 4 =$   
 $22 - 7 =$   
 $33 - 2 =$   
 $33 - 10 =$   
 $37 - 6 =$   
 $33 - 11 =$   
 $42 - 2 =$   
 $42 - 8 =$   
 $42 - 9 =$   
 $42 - 5 =$   
 $42 - 0 =$   
 $47 - 5 =$





## 6 CAMIÑO CRÍTICO E DETERMINACIÓN DAS FOLGURAS

A información que proporciona o coñecemento dos tempos early e last dos diferentes sucesos non é, en si mesma, demasiado importante, coa excepción do tempo early ou last do suceso inicio e fin do proceso, que representan a duración total do proceso. Agora ben, a verdadeira importancia dos tempos early e last é que constitúen a base para o cálculo das folguras, que son a peza fundamental en todo o proceso de análise do método PERT.

A folgura dun suceso, representada por  $H_i$ , defínese como a diferenza entre os tempos last e early de dito suceso, é dicir:

$$H_i = t_i^* - t_i$$

A folgura dun suceso indica o número de unidades de tempo que pode retrasarse a consecución do mesmo, de xeito que a duración total do proceso non experimente ningunha demora.

A folgura total dunha certa actividade, representada por  $H_{ij}^T$ , defínese como o tempo que resulta de restar ó tempo last do suceso final, o tempo early do suceso inicial e a duración da actividade:

$$H_{ij}^T = t_j^* - t_i - t_{ij}$$

A folgura total dunha actividade indica o número de unidades de tempo que pode retrasarse a realización da actividade con respecto ó tempo previsto, de xeito que a duración do proceso non experimente demora.

É moi importante o feito de que se unha actividade consume a totalidade ou parte da súa folgura total, pódese producir unha diminución na folgura total da actividade seguinte.

As actividades que teñan como folgura total cero unidades serán consideradas críticas. Unindo tódalas actividades críticas fórmase un camiño que vai dende o vértice que representa o suceso inicial ata o suceso final. Este camiño recibe o nome de camiño crítico e resulta esencial para o control do proceso, pois nesas actividades non se poderá admitir ningunha demora, xa que sempre afectará ó resultado final do proceso. No grafo PERT debe indicarse con outro tipo de liña as actividades que formen parte do camiño crítico. Nun grafo PERT pode existir mais de un camiño crítico.

Por outra parte, o responsable do control do proceso non debe desatende-las actividades que non son críticas, pois un retraso excesivo na súa execución pode chegar a convertelas en críticas, cambiando a estrutura do camiño crítico do grafo.

Outra folgura interesante é a folgura libre,  $H_{ij}^L$ , definida como o tempo que resulta de restar ó tempo early do suceso final, o tempo early do suceso inicial e a duración da actividade, é dicir:

$$H_{ij}^L = t_j - t_i - t_{ij}$$

A folgura libre non é un cálculo propio do método PERT, senón que pertence ó método CPM. Sen embargo, a información que proporciona é moi útil. A folgura libre dunha actividade representa a cantidade de folgura dispoñible despois de ter realizada esa actividade se tódalas actividades restantes teñen comezado nos seus tempos early; é dicir, o tempo de folgura que pode ser consumido nesa actividade sen prexudicar ás actividades seguintes.

A folgura libre dunha actividade é sempre menor ou igual que a súa folgura total.

Finalmente, a folgura independente dunha actividade,  $H_{ij}^I$ , defínese como o tempo que resulta de restar ó tempo early do suceso final, o tempo last do suceso inicial e a duración da actividade:

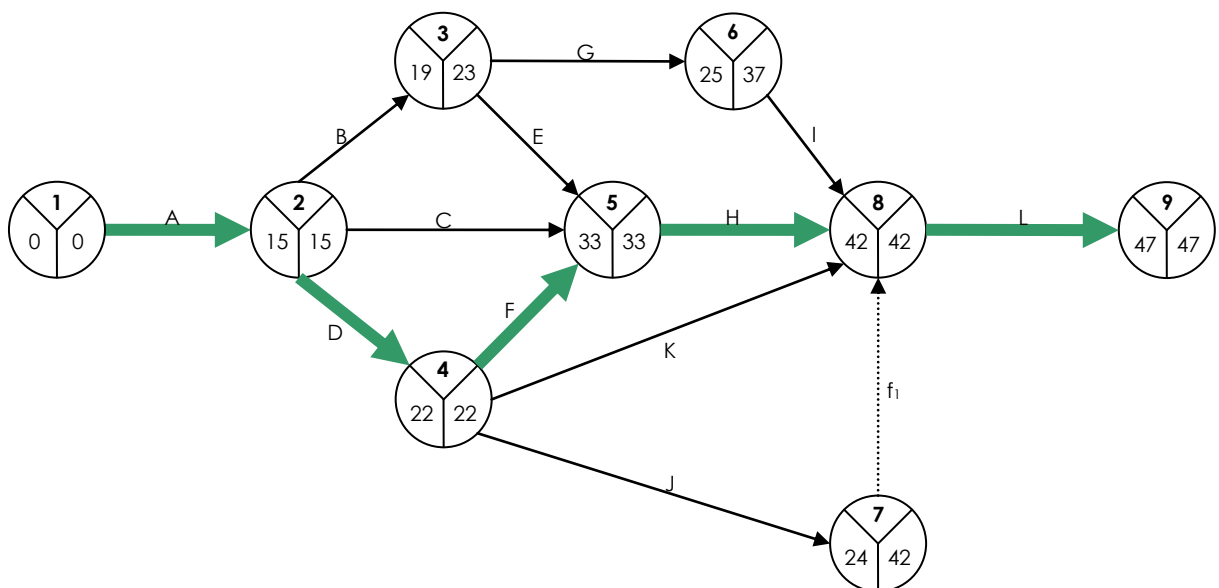
$$H_{ij}^I = t_j - t_i^* - t_{ij}$$

Esta folgura indica a cantidade de folgura dispoñible despois de ter realizado a actividade, se tódalas actividades do proxecto comezaron nos seus tempos last. Esta folgura é escasa e, as veces, negativa.



Para o exemplo anterior, as folguras son:

	Actividade	Duración $t_{ij}$	Suceso inicial		Suceso final		Folgora Total $H^T_{ij}$	Folgora Libre $H^L_{ij}$	Folgora Independente $H^I_{ij}$
			Early $t_i$	Last $t_i^*$	Early $t_j$	Last $t_j^*$			
Camiño crítico	A	15	0	0	15	15	0	0	0
	B	4	15	15	19	23	4	0	0
	C	2	15	15	33	33	16	16	16
Camiño crítico	D	7	15	15	22	22	0	0	0
	E	10	19	23	33	33	4	4	0
Camiño crítico	F	11	22	22	33	33	0	0	0
	G	6	19	23	25	37	12	0	-4
Camiño crítico	H	9	33	33	42	42	0	0	0
	I	5	25	37	42	42	12	12	0
Camiño crítico	J	2	22	22	24	42	18	18	0
	K	8	22	22	42	42	12	0	12
Camiño crítico	L	5	42	42	47	47	0	0	0





## 7 REPRESENTACIÓN DO CRONOGRAMA DO PROCESO

A información calculada anteriormente pode ser representada facilmente nun calendario de execución do proceso. Neste calendario establécense catro datas para cada unha das actividades:

- Data de comezo mais cedo. Indica o mais pronto que se pode comezar con unha actividade. Obviamente esta data corresponde co tempo early:

$$\Delta_{ij} = t_i$$

- Data de comezo mais tarde. Indica o mais tarde que pode comezarse unha actividade de xeito que a duración prevista do proxecto non se demore:

$$\Delta_{ij}^* = t_i + H_{ij}^T = t_i + \left( -t_i - t_{ij} \right) = t_j^* - t_{ij}$$

- Data de remate mais cedo. Representa o mais pronto que se pode rematar unha actividade se comeza no momento previsto:

$$\nabla_{ij} = t_i + t_{ij}$$

- Data de remate mais tarde. É a data tope na que pode finalizarse a actividade de xeito que non afecte ó resto do proxecto:

$$\nabla_{ij}^* = t_j^*$$

As datas de comezo mais cedo e mais tarde coinciden cando a actividade é crítica. O mesmo ocorre coas datas de remate.

Actividade	$\Delta_{ij}$	$\Delta_{ij}^*$	$\nabla_{ij}$	$\nabla_{ij}^*$
A	0	0	15	15
B	15	19	19	23
C	15	31	17	33
D	15	15	22	22
E	19	23	29	33
F	22	22	33	33
G	19	31	25	37
H	33	33	42	42
I	25	37	30	42
J	22	40	24	42
K	22	34	30	42
L	42	42	47	47



A partir das datas anteriores pódese establecer facilmente un calendario de execución do proceso. Na parte superior represéntase o camiño crítico, que non é susceptible de demoras. No resto das actividades indícanse as posibles modificacións nas datas.

