ECUACIONES E INECUACIONES.

Definiciones.

Las SOLUCIONES o RAÍCES de una ecuación son los valores que al sustituirlos en la ecuación hacen que la igualdad sea cierta.

Las ecuaciones se clasifican según su número de letras o incógnitas y según el término de mayor grado.

Ecuaciones de Primer Grado.

Una ecuación de primer grado con una incógnita se va a entender cuando después de eliminar paréntesis, denominadores y simplificar términos semejantes se llega a un expresión del tipo $ax + b = 0$, donde a, b son nº reales. Entonces: $x = \frac{-b}{a}$

Ejemplo: $4x + \frac{1}{2}x = 27 \Rightarrow \frac{8x}{2} + \frac{x}{2} = \frac{54}{2} \Rightarrow 8x + x = 54 \Rightarrow 9x - 54 = 0 \Rightarrow 9x = 54 \Rightarrow x = \frac{54}{9} \Rightarrow x = 6$

Pasos a seguir:

1. Quitar paréntesis.
2. Quitar denominadores. Se puede hacer multiplicando la ecuación:
   a. Por el producto de los denominadores, o
   b. Por el m.c.m. de los denominadores.
3. Suprimir los términos iguales de ambos miembros.
4. Pasar a un lado los términos en x y al otro los numéricos.
5. Reducir términos semejantes y operar.
6. Despejar la incógnita.

Ecuaciones de Segundo Grado.

Es una ecuación en la que la incógnita aparece elevada a dos. La forma general es: $ax^2 + bx + c = 0$

La solución es: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

* Las ecuaciones incompletas se presentan cuando al menos uno de los coeficientes b o c es nulo.

→ Si b = 0 : $ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

→ Si c = 0 : $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a} \end{cases}$

→ Si b = c = 0 : $ax^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

* $\sqrt{b^2 - 4ac}$: se le llama discriminante a la expresión $b^2 - 4ac$

→ Si $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ Existen dos soluciones: $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

→ Si $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ Existe una solución doble real: $\frac{-b}{2a}$

→ Si $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ No existe solución real.

* Si las soluciones son x_1 y x_2 : $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Además podemos factorizar la ecuación de la forma: $a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$

* Factorizar un polinomio significa ponerlo como producto de polinomios de menor grado, para ello tenemos que conocer alguna o todas sus raíces. La factorización es muy útil a la hora de calcular soluciones, ya que si el producto de varios factores es cero, uno de ellos tiene que ser cero.

Ejemplo: $(x^2-3x+2)\cdot(7x+11)\cdot(x^4-8x^2-9)=0$

$$\left.\begin{array}{l} x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=2 \\ 7x+11=0 \Rightarrow x_3=-11/7 \\ x^4-8x^2-9=0 \Rightarrow x_4=3, x_5=-3 \end{array}\right\}$$

Ecuación Bicuadrada.

La forma es: $ax^4+bx^2+c=0$. Los pasos a seguir para resolverla son:

1. Cambio de variable: $x^2=y$, por lo que la ecuación pasa a ser $ay^2+by+c=0$.
2. Resolvemos la ecuación de segundo grado resultante del paso anterior y obtenemos las soluciones y_1, y_2.
3. Deshacemos el cambio: $x^2=y_1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y_1}$

   $x^2=y_2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y_2}$

Ecuaciones de grado superior a dos.

Estas ecuaciones las intentamos resolver por el método de Ruffini. Recordemos que las posibles soluciones enteras son divisores del término independiente del polinomio.

Ecuaciones Racionales.

Son aquellas en las que aparecen fracciones polinómicas. Para resolverlas, se multiplican ambos miembros de la ecuación por el polinomio necesario (q es el m.c.m. de los denominadores) para que resulte una ecuación entera.
Es necesario COMPROBAR las soluciones que se produzcan.
Ejemplo:

$\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{x^2-4}$;Se multiplican sus dos miembros por el m.c.m. de los denominadores, q es x^2-1, y resulta :

$\dfrac{x+2}{x^2-4}+\dfrac{x-2}{x^2-4}=\dfrac{1}{x^2-4} \Rightarrow x+2+x-2=1 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ y la comprobamos en la ecuación de partida.

Ecuaciones Irracionales.

Son aquellas en las que aparece la incógnita bajo el signo de la raíz en alguno de sus términos.

Ejemplo: $x-\sqrt{x}=2$

Pasos a seguir para resolverlas:

1. Se aísla UN término radical en uno de los miembros, pasando los restantes términos (radicales y no radicales) al otro miembro.

   $x-2=\sqrt{x}$
2. Se elevan al cuadrado los miembros:

   $(x-2)^2=(\sqrt{x})^2 \Rightarrow (x-2)^2=x$
3. Si existe todavía algún radical se repite el proceso tantas veces como sea necesario.
4. Se resuelve la ecuación obtenida y se COMPRUEBAN si las soluciones obtenidas verifican la ecuación dada.

$$x^2-4x+4=x \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=4; & 4-\sqrt{4}=4-2=2 \\ x_2=1; & 1-\sqrt{1}=1-1=0 \end{cases}$$ La solución es 4.

Resolución de Sistemas de Ecuaciones.

<u>MÉTODO DE SUSTITUCIÓN</u>: consiste en despejar una incógnita en una ecuación y sustituir su expresión en la otra ecuación.
<u>MÉTODO DE IGUALACIÓN</u>: Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones y se igualan la expresiones resultantes.
<u>MÉTODO DE REDUCCIÓN</u>: Se opera con las dos ecuaciones para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas. Después se restan miembro a miembro y se obtiene una ecuación de una sola incógnita.

Inecuaciones con una incógnita.

Una inecuación es una desigualdad entre expresiones algebraicas. Las soluciones son los valores que verifican esa desigualdad.
Inecuaciones de primer grado: Se aplican las reglas de equivalencia hasta obtener a un lado los términos en x y en el otro los números y se despeja la x. Recuerda que si multiplicamos por un nº negativo la desigualdad cambia de sentido.
Inecuaciones reducibles a las de primer grado: P (x) < 0 (ó P (x) >0)

1. Tenemos que factorizar el polinomio en función de sus raíces: (x – a)(x –b) < 0
2. Para que el producto de dos números sea negativo se tiene que verificar A LA VEZ que uno es positivo y el otro negativo. Si la desigualdad es la contraria (mayor que cero) entonces los dos números tienen que ser ambos positivos ó ambos negativos.
3. Representamos en la recta real el signo de los valores numéricos que toma cada factor al variar x a lo largo de la misma. La raíz de cada factor es el punto de separación entre los valores que toma: negativo a la izquierda y positivo a la derecha.

Este proceso sirve tb para las inecuaciones dadas en forma de cociente.
Si uno de los factores toma siempre valores positivos se puede suprimir, ya que no varía el resultado.

Sistema de inecuaciones lineales con una incógnita.

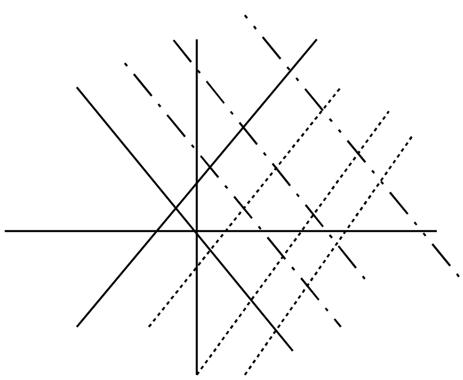
Se resuelven las distintas inecuaciones del sistema y se considera la solución que verifica las dos a la vez, por tanto la solución puede ser un intervalo, finito o infinito, o puede no tener solución.

Inecuaciones lineales con dos incógnitas: ax + by + c < 0

El conjunto de soluciones es el semiplano que está a uno de los lados de la recta $ax + by + c = 0$,
Cuando en la desigualdad está incluido el 'igual', entonces los puntos de la recta son tb soluciones.
Para resolverlas, se pinta la recta $ax + by + c = 0$ en el plano; cogemos un punto del plano y vemos si verifica la desigualdad para saber cual es el semiplano solución.

Sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas

Se resuelve cada una de las inecuaciones y la solución es la zona del plano común a ambas.



$$y + x \geq 0$$
$$y - x \leq 1$$