$1 + 2 + 3 + 4 = 10$

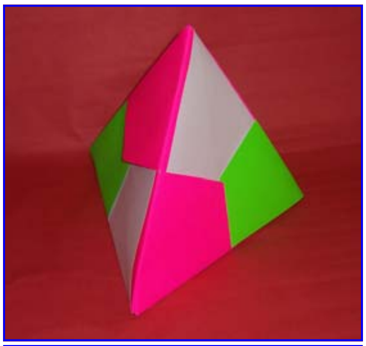
# TETRACTIS

BOLETÍN DE DIVULGACIÓN MATEMÁTICA    IES MONELOS — A CORUÑA

*Ano III. Boletín nº 27*    *Depósito legal: C 2766-2006*    *Novembro, 2008*

# POLIEDROS REGULARES EN PAPIROFLEXIA

*Elaborados por*
*Alicia Pedreira Mengotti*



TETRAEDRO

OCTAEDRO

ICOSAEDRO

CUBO OU HEXAEDRO

DODECAEDRO

CAIXA ICOSAÉDRICA, na páxina 3

## NÚMEROS AMIGOS E NÚMEROS PERFECTOS

### NÚMEROS AMIGOS

Dos números amigos son os enteiros positivos **a** e **b**, tales que **a** é a suma dos divisores propios de **b** é **b** é a suma dos divisores propios de **a** (*a unidade considérase divisor propio, pero no o mesmo número*).

### UN POUCO DE HISTORIA

Conta a lenda que ao ser preguntado que é un amigo, Pitágoras respondeu "*O que é o outro e o mesmo, coma o 220 e 284*".

Así Pitágoras descobre a primeira parella de números (540 a.C.) e comeza a estudalos, sen embargo durante moitos séculos non se coñecerían máis números amigos.

Arredor do ano 850, *Tabit ibn Qurra* (826-901) descobre a formula xeral para achar números amigos:

$$P = 3 \cdot 2^{n-1} - 1 \qquad Q = 3 \cdot 2^{n} - 1 \qquad R = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$$

onde *n* é un número enteiro maior que 1 e P, Q, R son números primos, entón diremos que:

$2^n \cdot P \cdot Q$ e $2^n \cdot R$ son un par de números amigos.

Se comprobamos esta formula para *n=2* sería:

$P = 3 \cdot 2^{2-1} - 1 = 5$ que é un número primo

$Q = 3 \cdot 2^{2} - 1 = 11$ que é un número primo

$R = 9 \cdot 2^{2 \cdot 2-1} - 1 = 71$ que é un número primo

Entón: $2^n \cdot P \cdot Q = 2^2 \cdot 5 \cdot 11 = 220$

$2^n \cdot R = 2^2 \cdot 71 = 284$

Así 220 e 284 son números amigos.

Os divisores de:

220 son: 1-2-4-5-10-20-11-22-44-55-110 e suman 284

284 son: 1-2-4-71-142 e suman 220

# NÚMEROS AMIGOS E NÚMEROS PERFECTOS

**FERMAT**

Para $n=4$: $P = 3\cdot 2^{4-1}-1 = 23$

$Q = 3\cdot 2^{4} -1 = 47$

$R = 9\cdot 2^{2\cdot 4-1}-1 = 1151$

$2^{n}\cdot P\cdot Q = 2^{4}\cdot 23\cdot 47 = 17296$

$2^{n}\cdot R = 2^{4} \cdot 1151 = 18461$

Con esta formula pódense xerar distintos pares: (220, 284), (1184, 1210), (17296, 18416) e (9 363 284, 9 437 056) pero hai outros números amigos que non se poden achar pola formula anterior (Ex: 6232, 6368).

Os números amigos 17 296 e 18 461 foron descobertos por Fermat en 1636.

En 1636, Fermat descobre que os números 17 296 e 18 416 tamén o son.

En 1638, foi Descartes quen atopou a terceira parella 9 363 584 e 9 437 056.

| $N^{os}$ Amigos | |
|---|---|
| 220 | 284 |
| 1184 | 1210 |
| 2620 | 2924 |
| 5020 | 5564 |
| 6232 | 6308 |
| 10744 | 10856 |
| 12285 | 14595 |
| 17296 | 18416 |
| 63020 | 76084 |
| 66928 | 66992 |

En 1750, Euler xeneraliza a formula de Tabit e publica unha lista de sesenta pares.

Como dato anecdótico o segundo par en orden crecente: 1184 e 1210 foi descuberto por Paganini en 1866 con 16 anos de idade.

Un dos últimos pares foi atopado no ano 2003 e posúe mas de 900 cifras. Actualmente séguense buscando máis.

*Se un número é amigo de si mesmo recibe o nome de número perfecto.*

## NÚMERO PERFECTO

Un enteiro positivo **n** dise que é un número perfecto se é igual á suma de todos seus divisores positivos diferentes de si mesmo.

Por exemplo 6 é un número perfecto porque os seus divisores propios son: 1, 2, 3 e a suma deles é 6.

### UN POUCO DE HISTORIA

Os números perfectos xa foron estudados por Pitágoras e os seus seguidores de maneira mística. Así Deus tardou 6 días en crear o mundo, e a Lúa tarda 28 días en dar unha volta á Terra e estes dous números son perfectos.

Os catro números perfectos 6, 28, 496 e 8128 son coñecidos dende a antigüidade pero non hai datos:

$$28=1+2+3+4+7+14$$

$$496=1+2+4+8+16+31+62+124+248$$

Nicómaco de Gerasa fixo, arredor do ano 100 d.C., unha clasificación de números: superabundantes, deficientes e perfectos.

Os primeiros coñecementos matemáticos sobre os números perfectos proporcionaos Euclides (300 a.C.) que descobre que os catro primeiros números perfectos veñen dados pola seguinte formula:

$2^{n-1}\cdot (2^{n}-1)$, onde $2^{n}-1$ ten que ser primo.

Antigamente fixéronse suposicións erróneas coma:

- Que os catro primeiros números perfectos facíanse cos catro primeiros números primos (n = 2, 3, 5, 7), e o quinto número perfecto sería con $n = 11$.
  Así: $2^{11-1}\cdot (2^{11}-1) = 2047$
  Pero, sen embargo, non é primo xa que: 2047:23 = 87.
- O quinto número perfecto tería cinco díxitos xa que os catro primeiros teñen 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Sen embargo o quinto número perfecto é o 33550336 descuberto nun manuscrito no ano 1461.
- Os números perfectos terminan alternativamente en 6 e 8. Non obstante, o sexto número tamén termina en 6 sendo o 8 589 869 056.

Hoxe os números primos xerados pola formula $M_n=2^{n}-1$ se lles coñece como *primos de Mersenne* na honra do monxe que viveu no século XVII, Marin Mersenne.

Sen embargo non todo número de Mersenne é primo cando $n$ é primo. Así $M_n$ é primo para n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257.

Comprobando:

n=2 $2^{2}- 1 = 3$ Primo de Mersenne

n=3 $2^{3}- 1 = 7$ Primo de Mersenne

n=5 $2^{5}- 1 = 31$ Primo de Mersenne

aínda que cometeu cinco erros pois $M_{61}$, $M_{89}$, $M_{107}$, son primos e $M_{67}$, $M_{257}$ son compostos.

A data de hoxe, só se coñecen 46 números primos de Mersenne, sendo o maior deles

$$\boxed{M_{43\,112\,609} = 2^{43\,112\,609}-1}$$

Euler demostrou no século XVIII que todos os números perfectos pares xéranse a partir da fórmula que descubriu Euclides.

Na actualidade coñécense 39 números perfectos, a maioría calculados con potentes ordenadores xa que moitos deles ocuparían centos de páxinas.

Por outra parte non se atopou nengún perfecto impar e é posible que non exista.

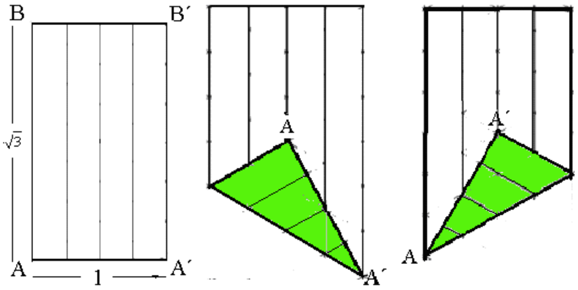
**José Antonio García Muñiz.**
**1º bach B**

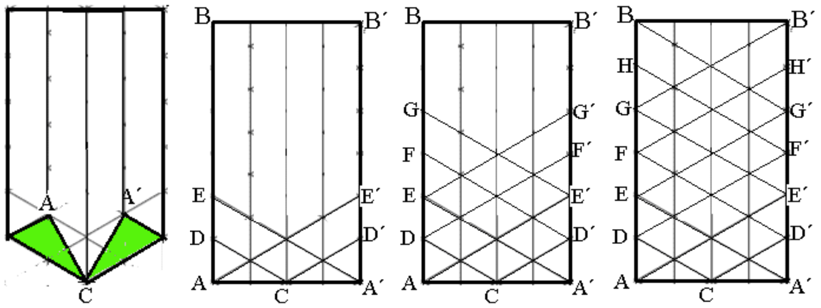
# XEOMETRÍA DE PAPEL: CAIXA ICOSAEDRO

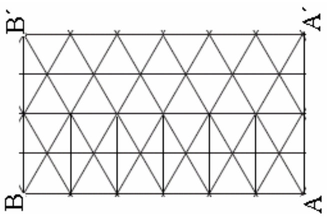
*Alicia Pedreira Mengotti*

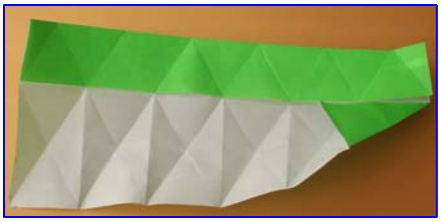
### *MATERIAL*:

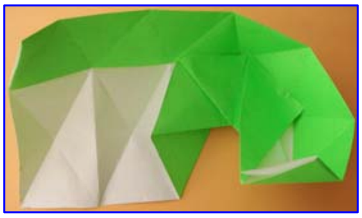
Dúas follas rectangulares en formato 1x√3

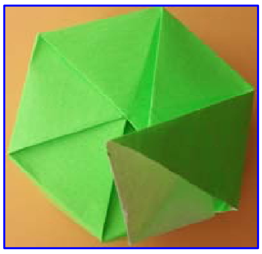






### *INSTRUCIÓNS:*

Trátase de facer unha trama de triángulos equiláteros, para o cal :

1. Levamos AB sobre A´B´ ,e desdobramos, obtendo así a mediana do lado AA´; logo levamos AB e A´B´ sobre a mediana , quedando a folla dividida en catro rectángulos.
2. Levamos o vértice A desde A´sobre a liña media e desdobramos (liña A´E)
3. A´sobre a liña media desde A e desdobramos (liña AE´)
4. A e A´sobre os cuartos desde C e desdobramos (DC, D´C)
5 BE sobre EA´, B´É´ sobre E´A, BD sobre DC , B´D´ sobre D´C (EG´, E´G, DF´, D´F)
6. BF sobre FD´, BG sobre GE´ (FH´, GB´), e continuamos do mesmo modo a trama ata rematar.
8. Diagonais maiores dos rombos, parte branca en montaña.
9. A´B´ sobre a mediana e volvemos a marcar ben os triángulos equiláteros verdes.

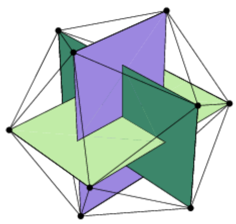
10,11,12,13,14. Para facer o que vai ser o fondo da caixa, pregamos as diagonais dos rectángulos inferiores en val e rombos en montaña de un en un, de maneira que se vai pechando sobre si mesma.

15.Dámoslle a volta á figura, e o pico que queda solto metémolo cara dentro.

16,17. Queda como unha caixa aberta de base hexagonal.

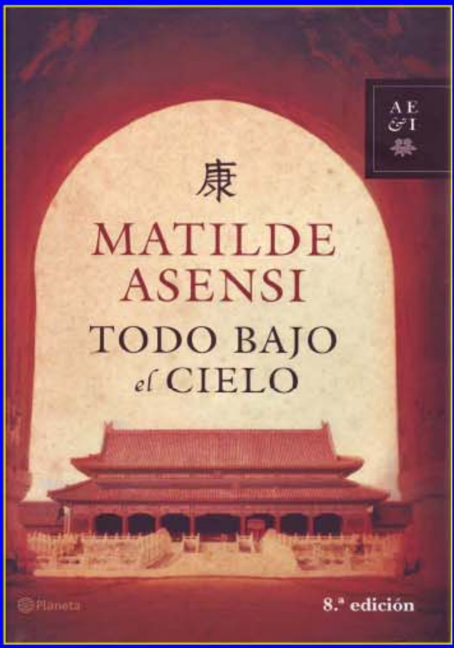
18,19. Agora como no icosaedro concorren nun vértice 5 caras, sobrepoñemos á que sobra e encaixámola por dentro da solapa. Así temos unha das pezas da caixa, que é un icosaedro ao que lle faltan 5 caras.

Facemos as dúas pezas iguais e despois encaixamos unha na outra.



*Nótese que os vértices dun icosaedro forman grupos de tres rectángulos áureos ortogonais entre si. O icosaedro contén no seu interior 15 rectángulos áureos: cada rectángulo contén a dúas arestas opostas. Isto débese a que dous lados do rectángulo son arestas do icosaedro, e os outros dous son as diagonais de dous pentágonos regulares paralelos virados 180 grados. A diagonal do pentágono regular está en proporción áurea co lado do pentágono, que neste caso é a aresta do icosaedro.*

*O icosaedro, malia estar formados por 20 triángulos equiláteros, pódese considerar como a unión de 10 pentágonos regulares. Os cortes dos pentágonos entre si orixinan os 20 triángulos que conforman o icosaedro.*




## TODO BAJO EL CIELO

**Matilde Asensi**

**Editorial Planeta**

*Novela de aventuras*

### INTERESE MATEMÁTICO

TÉCNICAS DE RECONTO
PERMUTACIÓNS
VARIACIÓN CON REPETCIÓN
CRIPTOGRAMAS
HEXAGRAMAS
ORIENTACIÓN
PUNTOS CARDINAIS
CADRADOS MÁXICOS: 3x3,...9x9

Elvira, unha pintora española afincada no París dos anos vinte, recibe a noticia de que o seu marido morreu na súa casa de Shanghai. Acompañada pola súa sobriña, parte desde Marsella en barco para recuperar o cadáver de Rémy. Ao pisar por fin terra firme despois dunha travesía interminable, comezará para Elvira e Fernanda a maior peripecia que xamais houberan imaxinado vivir. Sen tempo para reaccionar, veranse perseguidas polos eunucos imperiais e os sicarios da Banda Verde, que queren roubarlles o "cofre das cen xoias".

Foxen nunca viaxe apaixonante polo corazón de China ata Xi'an, onde, coa axuda do anticuario Lao Jiang, a sabedoría oriental do mestre Jade Rojo e a intelixencia do pequeno Biao, poderán descifrar as claves e superar as riscadas probas para atopar a tumba do Primeiro Emperador e a derradeira peza do segredo mellor gardado da historia da Humanidade.

O grupo chega ao Monasterio taoísta de Wudang na busca duhna das pezas necesarias para descifrar o mapa onde se atopa o tesouro e mausoleo do Primeiro Emperador. O abade proponlles que para conseguir esa peza terán que ordear os catro caracteres fundamentais do taoísmo de Wudang.

Estes son os catros ideogramas que representan aos catro caracteres toístas:

| SAÚDE | PAZ | LONXEVIDADE | FELICIDADE |
|---|---|---|---|
| K'ANG | AN | SHOU | FU |

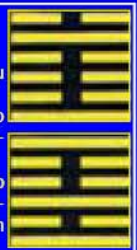

As posibles ordenacións destes ideogramas resultan ser:

**24 posibilidades**

Xa que, son as permutacións de catro elementos:

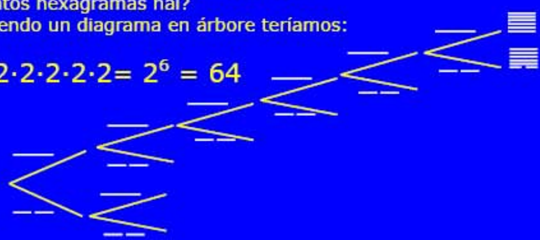
$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

### HEXAGRAMAS DE I CHING



Os hexagramas son seis liñas horizontais (enteiras ou partidas en dúas) formando un cadrado perfecto.
Utilízanse, entre outras cousas, para predecir o futuro e cada un ten un nome e expresa diferentes cualidades.
Por exemplo, o hexagrama Ming I, "O oscurecemento da luz", alude ao Sol que se oculta baixo a Terra, provocando a oscuridade total. Aínda que despois teñen interpretacións a modo de horóscopo.
Cantos hexagramas hai?
Facendo un diagrama en árbore teríamos:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$$



Ou tamén, variacións con repetición de 2 elementos tomados en grupos de 6, é decir:

$$VR_2^6 = 2^6 = 64 \text{ hexagramas}$$

### CADRADOS MÁXICOS

Cando o grupo chegou as portas do Mausoleo, o mapa indicaba o sistema de apertura: "***candado especial que abre con maxia***".

Atoparon 81 cilindros de pedra numerados e no chan un taboleiro 9x9 = 81 cadrados cun burato no medio do tamaño dos cilindro de pedra.

Era un **cadrado máxico**, é decir, *un cadrado onde os números colocados no seu interior suman o mesmo, tanto en horizontal, coma en vertical, coma en diagonal*. En China hai unha tradición moi antiga que relaciona a maxia cos números e os cadrados máxicos son unha expresión milenaria desa relación.

Unha antiaga lenda di que o primeiro cadrdao máxico atopouno o emperador Yu no caparazón dunha tartaruga.

**CADRADO MÁXICO DE ORDE 3**

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

Aparece no libro asociado a unhas columnas cadradas numeradas e, onde a numeración, indica os puntos cardinais:

9 - Norte 7 - Este 3 – Oeste
1– Sur 2 - Nordeste ...

A suma de filas. Columnas e diagonais é 15, xa que 15 é a suma do 1 ao 9, dividido entre 3:

$$45/3 = 15$$

**CADRADO MÁXICO DE ORDE 9**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 34 | 26 | 73 | 67 | 2 | 48 | 62 | 46 |
| 78 | 50 | 33 | 21 | 55 | 28 | 57 | 27 | 20 |
| 1 | 32 | 66 | 42 | 22 | 68 | 19 | 61 | 58 |
| 72 | 30 | 69 | 49 | 6 | 38 | 35 | 31 | 39 |
| 9 | 64 | 81 | 41 | 45 | 52 | 16 | 43 | 18 |
| 54 | 4 | 36 | 12 | 63 | 29 | 76 | 25 | 70 |
| 60 | 53 | 40 | 47 | 71 | 3 | 24 | 56 | 15 |
| 7 | 65 | 10 | 5 | 17 | 75 | 80 | 51 | 59 |
| 77 | 37 | 8 | 79 | 23 | 74 | 14 | 13 | 44 |

Suma dos 81 primeiros números, mediante a suma dunha progresión arimética:

$$S = (1 + 81) \cdot 81/2 = 3321$$

Cada fila o columna terá que sumar:

$$3321/9 = 369$$