

2º BACH. A/B Exame 3ª av 18-5-2010	NOME:	NOTA
------------------------------------------	-------	------

¡ Elíxase unha única opción para facer as súas catro preguntas !

OPCIÓN A

1. a) Enuncia (0,5 ptos) e interpreta xeométricamente (0,5 ptos) o *Teorema de Bolzano*.

b) Dada a función $f(x) = e^x + 3x \cdot \ln(1+x^2)$, xustifica se podemos asegurar que a súa gráfica corta ó eixe OX nalgún punto do intervalo $[-1, 0]$. (1,5 ptos)

2. a) Enunciado da *Regra de Barrow*. (0,5 ptos)

b) Demostra que a función f dada por $f(x) = \frac{4}{x^2 + 2x + 2}$ é estrictamente positiva en todo \mathbb{R}

(0,5 ptos) e acha a área da rexión determinada pola gráfica de f , o eixe de abscisas e as rectas $x=-1$ e $x=0$. (1,5 ptos)

3. a) Da función G sabemos que $G'''(x) = 2x$ e que $G(0) = 0$, $G(1) = -1/4$, $G(2) = 2/3$. Áchaa. (1 pto)

b) Sexa $y = Ax - x^2$. Determina o valor de A para que a área entre a curva e o eixe de abscisas sexa 36 u^2 . (1,5 ptos)

4. a) Enunciado (0,5 ptos) e interpretación xeométrica (0,5 ptos) do *Teorema fundamental do cálculo integral*.

b) Dada a función $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} \cdot dt$, ¿ten $F(x)$ puntos de inflexión? Xustifica a resposta. (1,5 ptos)

OPCIÓN B

- 1. a)** Enunciado (0,5 ptos) e interpretación xeométrica (0,5 ptos) do *Teorema de Rolle*.
- b)** Sexa a función $f(x) = 4 + \sqrt[3]{x^8}$ definida en $[-1,1]$. Comproba se é aplicable o *Teorema de Rolle* a $f(x)$ en dito intervalo. (1 pto)
- c)** Sendo f continua e derivable en todo \mathbb{R} , entre dúas raíces consecutivas de f' , ¿cantas pode haber de f ? (0,5 ptos)
- 2. a)** Sexa $f(x) = e^x \cdot (2x - 1)$. Calcula os intervalos de crecemento e decrecemento (0,5 ptos) e a ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto de abscisa $x=0$ (1 pto).
- b)** Calcula $\int_0^1 e^x \cdot (2x - 1) \cdot dx$. (1 pto)
- 3. a)** Acha a área limitada pola curva $y=3-2x-x^2$ e as súas tanxentes nos puntos de intersección co eixe OX. (1,5 ptos)
- b)** Calcula $\int_{-1}^0 L(x^2 + x + 1) \cdot dx$. (1 pto)
- 4. a)** Enunciado da *Regra de L'Hôpital*. (0,5 ptos)
- b)** Calcula o seguinte límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \arctan x + 2x \cdot \ln(1 + x^2) - 4x}{x^2}$. (1 pto)
- c)** Sexa f derivable nun entorno de $x=0$ tal que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$. Calcula $f(0)$, $f'(0)$ e $f''(0)$. (1 pto)

2º BACH. A/B Recup. 3ª av 24-5-2010	<u>NOME:</u>	NOTA
-------------------------------------------	--------------	------

¡ Elíxase unha única opción para facer as súas catro preguntas !

OPCIÓN A

- 1. a)** Enunciado do *Teorema de Weierstrass*. (0,5 ptos)
- b)** Se unha función $f(x)$ é continua en $[a,b]$ e é estritamente decrecente nese intervalo, ¿onde alcanza a función o máximo e o mínimo absoluto? (0,5 ptos)
- c)** Acha a ecuación da recta tanxente á curva $y=x^3-6x^2+16x-11$ no seu punto de inflexión. (1,5 ptos)

2. a) Enuncia (0,5 ptos) e interpreta xeometricamente (0,5 ptos) o *Teorema do valor medio do cálculo diferencial*.

b) Dada $g(x) = ax^4+bx+c$, calcula os valores de a , b , c para que $g(x)$ teña no punto $(1, -1)$ un extremo relativo e a recta tanxente á gráfica de $g(x)$, en $x = 0$, sexa paralela á recta $y=4x$. (1,5 ptos)

3. a) Asíntotas, se as ten, da función: $y = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$. (1,5 ptos)

b) Calcula o seguinte límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot \text{sen}x - x}{2x^2 + x^4}$. (1 punto)

4. a) Calcula a seguinte integral indefinida: $\int \frac{x - 12}{6 - x - x^2} \cdot dx$. (1 punto)

b) Área comprendida entre as curvas $y=x^2-x^3$, $y=-2x$. (1,5 ptos)

OPCIÓN B

1. a) Definición (0,5 pts) e interpretación xeométrica (0,5 pts) da derivada dunha función nun punto.

b) Dúas cidades, A e B, distan 6 km e 8 km da orella dun río, que podemos considerar rectilínea, e queren construír mancomunadamente un depósito de auga na beira do río para abastecer ás dúas cidades, as cales distan entre si $\sqrt{409}$ km. ¿En que punto da orella deben facer o depósito para que a lonxitude do cano de conducción sexa mínima? (1,5 pts)

2. a) Acha a recta tanxente á curva $y = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$ no punto de abscisa $x_0 = \ln 2$. (1 punto)

b) Calcula a seguinte integral indefinida: $\int \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \cdot dx$. (1 punto)

c) Calcula a área debaixo da curva $y = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$ desde $x=0$ ata $x=\ln 2$. (0,5 pts)

3. a) Calcula o seguinte límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot e^x}{\cos^2 x - 1}$. (1 punto)

b) Calcula a seguinte integral indefinida: $\int \frac{2x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} \cdot dx$. (1,5 pts)

4. a) Enuncia (0,5 pts) e interpreta xeometricamente (0,5 pts) o *Teorema do valor medio do cálculo integral*.

b) Área comprendida entre as curvas $y=6x-x^2$ e $y=x^2-2x$. (1,5 pts)

¡¡ Elíjase una pregunta de cada uno de los bloques. En caso de hacer las dos preguntas de un bloque, se corregirá la primera !!

BLOQUE A (4 puntos)

1. a) Enunciado (0,5 pts) e interpretación geométrica (0,5 pts) del *Teorema de Rolle*.
b) Sea $f(x)$ derivable. Siendo f par, ¿existe un a real tal que $f'(a)=0$? (1 punto)
c) ¿Es posible aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x)=L(1+x^2)$ en el intervalo $[-1,1]$?
Interprétalo geoméricamente. (1 punto)
d) Entre dos raíces consecutivas de f' , ¿cuántas puede haber de f ? (1 punto)
2. a) Enunciado de la *Regla de L'Hôpital* (0,5 pts).
b) Calcula la relación entre a y b para que sea continua en toda la recta real la función

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ definida por: } f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax} - 1}{2x}, & \text{si } x \neq 0 \\ b, & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (1,5 \text{ pts})$$

c) Calcula: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{arc tag } 1/x}{L(1 + 1/x)}$ (1 punto).

d) Calcula: $\int \frac{2x - 1}{x(x + 1)^2} dx$ (1 punto).

BLOQUE B (3 puntos)

3. a) Enunciado (0,5 pts) y demostración (1 punto) de la *Regla de Barrow*.
b) Halla el área de la región del plano comprendida entre la curva $y=3x^3-3x^2+x+6$ y su tangente en el punto de abscisa $x=1$ (1,5 pts).
4. a) Enunciado (0,5 pts) e interpretación geométrica (0,5 pts) del *Teorema del valor medio del cálculo integral para funciones continuas*.
b) Sea $f: [-2,2] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[-2,2]$ tal que $\int_{-2}^{-1} f(t) dt = \int_1^2 f(t) dt$, ¿se puede asegurar que existen b y c en $[-2,2]$ tales que $b \leq -1$, $c \geq 1$ y $f(b)=f(c)$?. Justifica la respuesta (2 pts).

BLOQUE C (3 puntos)

5. a) Enunciado (0,5 ptos) e interpretación geométrica (0,5 ptos) del *Teorema Fundamental del Cálculo Integral*.
- b) Determina las dos coordenadas (abscisa y ordenada) de los puntos de inflexión de la curva de ecuación: $y = 1 + \int_0^x t \cdot e^t \cdot dt$ (2 ptos).

6. Un punto se desplaza sobre el eje OX sometido a una fuerza F que, en función de su posición

x, toma la expresión:
$$F(x) = \begin{cases} \frac{4}{x^2 + 4}, & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Se pide:

- a) Analizar si la fuerza F es una magnitud continua (1 punto) y si es derivable (0,5 ptos). ¿En algún punto tiene un máximo? (0,5 ptos)
- b) Si el desplazamiento se inicia en el punto de abscisa $x_0 = -1$, expresar el trabajo que se realiza entre dicho punto y un punto arbitrario x (**NOTA:** recuérdese que el trabajo desarrollado por una fuerza F a lo largo de un camino entre los puntos a y b viene dado

por la expresión: $W = \int_a^b F(x) \cdot dx$ (1 punto)

Examen recup. 3ª ev. Mat. II, 2º Bach. A 19-5-08, 11:30-12:30	NOMBRE:	espacio para la nota
---------------------------------------------------------------------	---------	----------------------

¡¡ Elíjase una pregunta de cada uno de los bloques. En caso de hacer las dos preguntas de un bloque, se corregirá la primera !!

BLOQUE A (4 puntos)

1. a) Enunciado (0,5 ptos) e interpretación geométrica (0,5 ptos) del *Teorema de Bolzano*.
 b) Demuestra que las gráficas de las funciones $y=e^x$, $y=x+3$, tienen un punto común en el eje positivo. ¿Es único? (1 punto)

- c) Calcula: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{2 \text{tag}x} \cdot (1 + \text{tag} 2x)^{4/x}$. (1 punto) d) Calcula: $\int x \cdot e^{-x} \cdot dx$. (1 punto)

2. a) Calcula los valores de a y b para que la gráfica de $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ tenga un mínimo relativo en el punto $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ (1,5 ptos). Para estos a y b , calcula las asíntotas (1 punto).
 b) Halla el área limitada por las curvas $y=Lx$, $y=2$ y los ejes coordenados (1,5 ptos).

BLOQUE B (3 puntos)

3. a) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de $f(x)=(x^2+x-1) \cdot e^x$ (1,5 ptos).
 b) La función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiene un punto de inflexión para $x=1$, y la recta tangente a la gráfica de f en ese punto es $y=2x-3$. Con estos datos, determínese a , b , c (1,5 ptos).

4. a) Enunciado (0,5 ptos) e interpretación geométrica (0,5 ptos) del *Teorema del valor medio del cálculo diferencial*.
 b) En el segmento de parábola $y=x^2$ comprendido entre los puntos $A(1,1)$ y $B(3,9)$ halla un punto en el que la tangente sea paralela a la cuerda AB (1 punto).
 c) Busca el punto de la parábola $y=x^2$ que está a distancia mínima de la recta $x+y+4=0$ (1 punto).

BLOQUE C (3 puntos)

5. a) Enunciado (0,5 ptos) y demostración (1 punto) de la *Regla de Barrow*.
 b) Calcula el número positivo k tal que el valor del área de la región limitada por la recta $y=k$ y la parábola $y=(x-2)^2$ sea $36 u^2$ (1,5 ptos).

6. a) Enunciado (0,5 ptos) e interpretación geométrica (0,5 ptos) del *Teorema del valor medio del cálculo integral para funciones continuas*.
 b) Sea $f: [-2,2] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[-2,2]$ tal que $\int_{-2}^{-1} f(t) dt = \int_1^2 f(t) dt$, ¿se puede asegurar que existen b y c en $[-2,2]$ tales que $b \leq -1$, $c \geq 1$ y $f(b)=f(c)$?. Justifica la respuesta (2 ptos).

BLOQUE I

1. *Teorema de Rolle*: enunciado (0,5 ptos), demostración (1 pto), interpretación geométrica (0,5 ptos) y ejemplo (0,5 ptos).

2. Enunciado (0,5 ptos) e interpretación geométrica del *teorema de Bolzano*. (1 pto)
¿Se puede asegurar, utilizando el teorema de Bolzano, que la función $f(x)=\operatorname{tag}x$ tiene una raíz en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$? Razona la respuesta y esboza la gráfica de f en ese intervalo. (1 pto)

BLOQUE II

3. Enunciado (1 pto) e interpretación geométrica (0,5 ptos) del *Teorema Fundamental del Cálculo Integral* para funciones continuas.

Dada la función $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2) \cdot dt$, halla los extremos relativos de F en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Halla también $F''(x)$. (1 pto)

4. Enunciado (0,5 ptos) e interpretación geométrica (0,5 ptos) del *teorema del valor medio del cálculo integral* para funciones continuas.

Sea $y=f(x)$ una f. r. de v. r. continua en $[-2,2]$, tal que $\int_{-2}^{-1} f(t) \cdot dt = \int_1^2 f(t) \cdot dt$. ¿Se puede asegurar que existen b y c en $[-2,2]$ tales que $b \neq -1$, $c \neq 1$ y $f(b)=f(c)$. Justifica la respuesta (1,5 ptos).

BLOQUE III

5. Determina el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)=x^2+x+5$, el eje OX y las rectas $x=-1/2$ e $y=x+6$. (2,5 ptos)

6. Representa gráficamente la región limitada por las gráficas de $f(x)=4-x^2$ y $g(x)=x^2-4$. Calcula su área. (2,5 ptos)

BLOQUE IV

7. Un barco B y dos ciudades A y C de la costa forman un triángulo rectángulo en C . Las distancias del barco a las ciudades A y C son 13 km y 5 km, respectivamente. Un hombre situado en A desea llegar hasta el barco B . Sabiendo que puede nadar a 3 km/h y caminar a 5 km/h, ¿a qué distancia de A debe abandonar la costa para nadar hasta B si quiere llegar lo antes posible? (2,5 ptos)

8. Calcula: $\int \frac{5x^2 + 6x + 16}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8} \cdot dx$ (1 pto), $\int \frac{3x - 2}{x^2 + x + 1} \cdot dx$ (1,5 ptos).

BLOQUE I

1. a) *Teorema de Bolzano*: enunciado e interpretación geométrica. (1 punto)
b) ¿Qué se puede decir de la gráfica de una función derivable cuya derivada es positiva en todo punto del dominio? (0,5 pts)
c) Demuestra que la ecuación $x^5 + x^3 + x + 1 = 0$ tiene una única raíz dentro del intervalo $[-1, 0]$. (1 punto)

2. a) *Interpretación geométrica de la derivada*. (1 punto)

- b) Halla el valor de la constante c para que la recta que une los puntos $(0, 3)$ y $(5, -2)$ sea tangente

a la curva $y = \frac{c}{x+1}$. (0,5 pts)

BLOQUE II

3. a) *Regla de Barrow*: enunciado y demostración. (1 punto)

- b) La parábola $y = a(x^2 - 2x)$, para $a > 0$, delimita con el eje OX un recinto de 12 unidades de superficie. Halla el valor de a . (1,5 pts)

4. a) *Regla de Barrow*: enunciado y demostración. (1 punto)

- b) Representa gráficamente la región limitada por las gráficas de $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = x + 2$. Calcula su área. (1,5 pts)

BLOQUE III

5. *Teorema fundamental del cálculo integral*: enunciado, demostración e interpretación geométrica. (2,5 pts)

6. Halla la ecuación de la tangente a la elipse $x^2 + 2y^2 = 4$ en el punto en donde corta a la bisectriz del primer cuadrante. (2,5 pts)

BLOQUE IV

7. a) Dada la función $f(x) = 2 + \frac{x}{x+1}$, estudia el crecimiento y decrecimiento, concavidad y

convexidad y asíntotas. Representa gráficamente $f(x)$. (1,5 pts)

- b) ¿Existe algún punto de la gráfica en el que la pendiente de la recta tangente sea $1/4$? (1 punto)

8. Calcula las siguientes integrales: $\int \frac{3x-2}{x^2+x+1} \cdot dx$, $\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2} \cdot dx$, $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} \cdot dx$.