VII CONCURSO CANGURO MATEMÁTICO 2000

NIVEL 6: 2º DE BACHILLERATO LOGSE Y C.O.U.

No se permite el uso de calculadoras. Cada pregunta mal contestada se penaliza con 1/4 de los puntos que le corresponderán si fuera correcta. Las preguntas no contestadas no puntúan. Inicialmente tienes 30 puntos. Tiempo : 1h15min

Los problemas 1 a 10 valen 3 puntos cada uno.

1 Un conductor comienza su viaje en el punto A, hace 10 km hacia el Norte, luego 10 km hacia el Este, luego 6 km hacia el Sur, luego 2 km hacia el Oeste, luego 8 km hacia el Norte, luego 4 km hacia el Oeste y luego 9 km hacia el Sur, terminando su viaje en el punto B. La mínima distancia entre A y B es igual a

A) 0 km B) 1 km C) $\sqrt{5}$ km D) 5 km E) $10\sqrt{2}$ km

2 La Liebre de Marzo (personaje de Alicia en el País de las Maravillas) siempre miente de Lunes a Miércoles y dice la verdad el resto de la semana. ¿ Qué día puede haber dicho

(1) "Mentí ayer"
(2) "Mentiré mañana"

A) Lunes B) Martes C) Jueves D) Domingo E) Esta situación es imposible

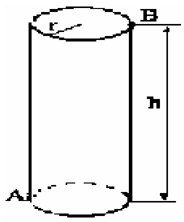
3 ¿Cuál es el resto de la división $(3^{20}. 5^{30} - 2) :15$?

A) 0 B) 2 C) 5 D) 8 E) 13

4 El padre de María es 4 años mayor que la madre, y la media de las edades de sus padres es 39. La media de las edades de María y de su padre es 23. ¿Cuántos años tiene María?

A) 5 años B) 7 años C) 11 años D) 13 años E) 15 años

5 Una hormiga va del punto A al punto B, por la superficie del cilindro. Si r=1 y h=6 , ¿cuál es la longitud del camino más corto?



A) 7 B) 8 C) $2\sqrt{10}$ D) $\sqrt{\pi^2+36}$ E) $2\sqrt{\pi^2+9}$

6 Sísifo debe llevar cada día una piedra a la cima de una montaña. El primer día tarda 7 horas en subir y bajar. Como la tarea es pesada, cada día tarda el doble que el anterior en subir y la mitad que el anterior en bajar. Si tarda 8 horas en subir y bajar el segundo día, ¿ cuántas horas tardará en subir y bajar el tercero?

A) 9 h B) 8h 30m C) 7h D) 13 h E) 10 h

7 Una nave espacial viaja de la Tierra al planeta X, que está a 2^{20} km de la Tierra. Cuando ha recorrido exactamente un cuarto del viaje, pierde contacto por radio con la Tierra. Lo recupera de nuevo en el momento en que está a 2^{19} km de la Tierra. ¿ Cuántos km viajó la nave espacial sin contacto por radio con la Tierra?

A) 2^8 km B) 2^9 km C) 2^{10} km D) 2^{18} km E) 2^{19} km

8 Los enteros positivos x e y no tienen divisores comunes mayores que 1, y se cumple que xy=300. ¿Cuál es el menor valor posible de x+y?

A) 30 B) 35 C) 37 D) 56 E) 79

9 Sea xyz un número de tres cifras con x>z>0. La primera cifra por la izquierda del número xyz – zyx es 4. Entonces la segunda y tercera cifras de esta diferencia son, respectivamente :

A) 5 y 9 B) 9 y 5 C) imposible saberlo D) 5 y 4 E) 4 y 5

10 Dado un cuadrado unidad, ¿cuántos puntos del plano están a la misma distancia de dos vértices consecutivos y además a distancia 1 de un tercer vértice?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 8 E) más de 8

Los problemas 11 a 20 valen 4 puntos cada uno.

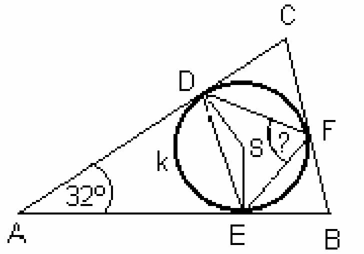
11 Diez muchachos en un campamento de verano quieren jugar al volleyball. ¿De cuántas maneras pueden repartirse en dos equipos de 5 jugadores cada uno, si Mateo quiere jugar en el equipo de Carlos y Víctor no quiere jugar en el equipo de Andrés?

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 50

12 Para un entero positivo a la suma a+2a+3a+4a+5a+6a+7a+8a+9a es un número cuyas cifras son todas iguales. ¿ Cuál es la cifra que se repite?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 9 E) no es posible

13 La figura muestra el triángulo ABC y el círculo k de centro S inscrito en el triángulo. D,E,F son los puntos donde el círculo es tangente a los lados del triángulo. Si $\angle$DAE=32°, ¿cuánto mide $\angle$DFE ?



A) 46° B) 58° C) 64° D) 74° E) no se puede determinar

14 Marcos quiere comprar un walkman, que cuesta 5400 pesetas. Cuando se le pregunta por sus ahorros, dice: *Si tuviera un quinto más de lo que tengo, me faltaría la cuarta parte menos de lo que me falta para poder pagarlo*. ¿ Cuánto dinero tiene Marcos?

A) 600 pta B) 1200 pta C) 2400 pta D) 3000 pta E) 3200 pta

15 Un polígono regular de n lados tiene 6n diagonales (una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos). ¿Cuánto vale n?

A) n=3 B) n=15 C) n=17 D) n=35 E) n=65

16 ¿Cuántos enteros tienen la siguiente propiedad: ***Su mayor divisor, distinto de ellos mismos, es 91*** (Nota: cualquier entero es divisible por él mismo y por 1)

A) 8 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

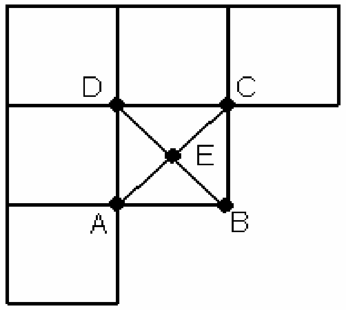
17 Si $2^{1994} + 4^{997} + 8^{665} = 16^{x}$, entonces

A) x=997 B) x=779 C) x=499 D) x=449 E) x=399

18 Se ha probado un nuevo antibiótico. La primera dosis detiene la multiplicación de las bacterias, y cada dosis adicional (a intervalos de 8 horas) mata el 50% de las bacterias restantes. Al principio del experimento había 1000000 de bacterias en la muestra. ¿Cuántas bacterias quedarán en la muestra 48 horas después de la aplicación de la primera dosis?

A) 5^3 B) $2x\ 5^6$ C) 10^3 D) $\frac{10^4}{3}$ E) $\frac{10^6}{6}$

19 En la figura hay un polígono *R* formado por 6 cuadrados iguales de área 1 cm^2. Elegimos uno de los puntos A, B, C, D, E como centro de simetría y construimos la imagen *R'* del polígono R en la simetría central de centro el punto elegido. ¿Cuál de los puntos A,B,C,D,E debe elegirse como centro de simetría si se desea que el polígono *R* U *R'* tenga un área de 8 cm^2 ?



A) A B) B C) C D) D E) E

20 ¿De cuántas maneras se puede expresar el número 447 como suma de al menos dos números naturales impares consecutivos?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Los problemas 21 a 30 valen 5 puntos cada uno.

21 Hay vuelos entre las ciudades A y B. Los vuelos tienen la misma duración de una a otra, pero, teniendo en cuenta los husos horarios en que están situadas las ciudades, el panel de salidas/llegadas (donde todas las horas son locales) es como sigue:

Salida de A a las 6 a.m. del Lunes - Llegada a B a las 2 p.m. del Martes.
Salida de B a la 1 p.m. del Jueves - Llegada a A a las 3 p.m. del Jueves.

¿ Qué hora es en B cuando son las 4 p.m. del Sábado en A?

A) 6 p.m. del Sábado B) 7 p.m. del Sábado C) 6 a.m. del Domingo \
D) 7 a.m. del Domingo E) 7 p.m. del Domingo

22 Consideremos un cubo de lado 2 y una esfera con centro en el centro del cubo. Sea K el conjunto de los puntos de la superficie del cubo y G el conjunto de los puntos de la superficie de la esfera. El conjunto K G consta de seis circunferencias si y sólo si el radio r de la esfera verifica las desigualdades

A) $1 < r \le \sqrt{2}$ B) $1 \le r < \sqrt{2}$ C) $r \le \sqrt{2}$ D) $1 < r \le \sqrt{3}$ E) $\sqrt{2} \le r < \sqrt{3}$

23 El vehículo espacial que llegó recientemente a Marte ha hecho algunos descubrimientos interesantes : Los marcianos tienen 1 m de alto, son todos rojos, verdes o azules, cada uno de ellos tiene entre 2 y 5 manos y en sus cabezas tienen entre 3 y 20 antenas. ¿ Cuántos habitantes, al menos, debe tener una población marciana, de la que sea posible elegir 11 jugadores aparentemente idénticos para jugar un partido de fútbol contra los astronautas terrestres? (Los 11 marcianos deben ser del mismo color, y tener igual número de manos e igual número de antenas)

A) 216 B) 217 C) 2160 D) 2161 E) 2375

24 El único entero n tal que $\left[\left(2^{2^N}+1\right)\left(2^{2^N}-1\right)+1\right]^{\frac{1}{2}} = 256$ está contenido en el conjunto:

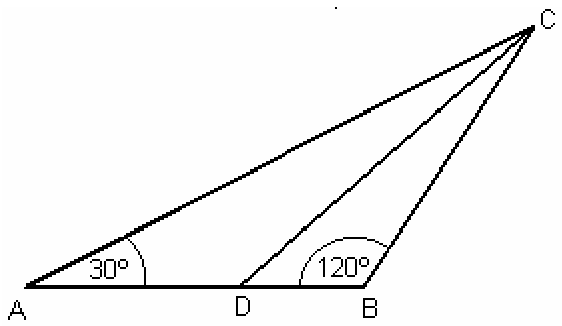
A) {1, 2, 3} B) {4, 5, 6} C) {7, 8, 9 } D) {10, 11, 12} E) {13, 14, 15}

25 Ulises, Agamenón y Héctor lanzan cuatro monedas. Si salen más caras que cruces, gana Agamenón. Si salen más cruces que caras, gana Héctor. Si salen dos caras y dos cruces, gana Ulises. Para tener más posibilidades, Agamenón lleva una moneda con dos caras, y Héctor, una con dos cruces. ¿ Qué ocurrirá si Ulises lleva dos monedas sin trucar?

A) Los tres siguen teniendo la misma probabilidad de ganar
B) Los tres tienen menos probabilidad de ganar
C) Las probabilidades de Agamenón y Héctor aumentan, pero Ulises puede ganar
D) Es seguro que gana uno de los tramposos
E) Los tramposos tienen menos probabilidades de ganar

26 En el triángulo ABC (ver la figura), se tiene: $\angle CAB = 30^\circ$. $\angle CBA=150^\circ$, CD es la bisectriz del ángulo $\angle ACB$}.

Entonces, $\frac{BC}{CD}$ es igual a :



A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

27 En una pregunta de Matemáticas Juan tiene que multiplicar dos enteros de 2 cifras. Inadvertidamente invierte el orden de las cifras de uno de los números y así obtiene un resultado que supera al correcto en 3816. ¿ Cuál sería el resultado correcto?

A) 7632 B) 5724 C) 4823 D) 1908 E) 1007

28 Sea p(n) el producto de las cifras de un número natural n. La suma p(1)+p(2)+p(3)+ ... + p(100)es igual a

A) 1560 B) 1700 C) 2050 D) 2070 E) 5050

29 En una balanza se determina el peso de un objeto colocándolo en uno de los platillos, y poniendo pesas en cualquiera de los dos hasta que se consigue el equilibrio. Para poder determinar cualquier peso entero de 1 a 10 gramos, ¿ cuál es el número mínimo de pesas necesarias?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 10

30 ABCD es un tetraedro. Determinar el número de planos cuyas distancias a A, B, C y D son iguales.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8