X CONCURSO
CANGURO MATEMÁTICO 2003

Nivel 6 (2º de Bachillerato)

Día 20 de marzo de 2003. Tiempo : 1 hora y 15 minutos

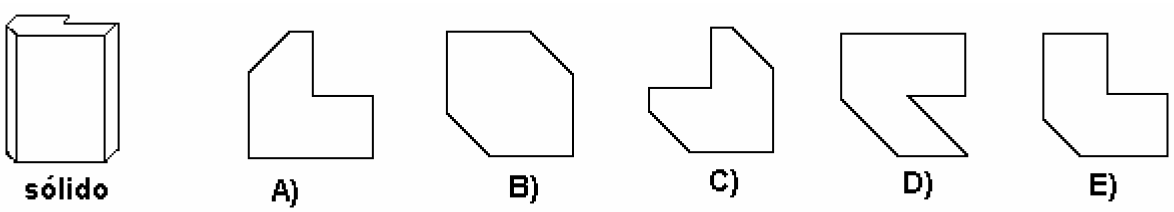
No se permite el uso de calculadoras. Hay una única respuesta correcta para cada pregunta. Cada pregunta mal contestada se penaliza con 1/4 de los puntos que le corresponderían si fuera correcta. Las preguntas no contestadas no se puntúan ni se penalizan. Inicialmente tienes 30 puntos.

Las preguntas 1 a 10 valen TRES puntos cada una.

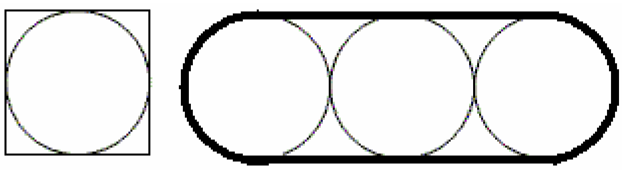
1 Viajando a Rimini en tren, Lisa se sienta en el 7º vagón (desde la cabecera), y Marco se sienta en el 2º vagón desde la cola, habiendo un vagón entre el de Lisa y el de Marco. ¿Cuántos vagones tiene el tren?

A) 15 B) 14 C) 13 D) menos de 13 E) no se puede saber

2 ¿Cuál de las formas siguientes corresponde a la cara superior del sólido de la primera figura?



3 El área del cuadrado de la figura de la izquierda es ***a,*** y el área del círculo es ***b.***
¿Cuánto vale el área encerrada por la línea gruesa en la figura de la derecha?



A) ***3b*** B) ***2a+b*** C) ***a+2b*** D) ***3a*** E) ***a+b***

4 Alberto está calculando el volumen de una esfera, pero utiliza equivocadamente el valor del diámetro en vez del del radio. ¿Qué debe hacer con el resultado obtenido para dar la respuesta correcta?

A) Dividirlo por dos. B) Dividirlo por cuatro. C) Dividirlo por seis. D) Dividirlo por ocho. E) Dividirlo por diez y seis.

5 La expresión $2^{n+2003} + 2^{n+2003}$ es igual a

A) 2^{n+2004} B) $2^{2n+4006}$ C) $4^{2n+4006}$ D) $4^{2n+2003}$ E) 4^{n+2003}

6 ¿Para cuál de los siguientes datos, existe un triángulo ABC determinado de manera única?

A) AB = 11cm, BC = 19cm, CA = 7cm
B) AB = 11cm, BC = 6cm, $\angle$BAC = 63°
C) AB = 11cm, CA = 7cm, $\angle$CBA = 128°
D) AB = 11cm, $\angle$BAC = 63°, $\angle$CBA = 128°
E) Para ninguno de ellos.

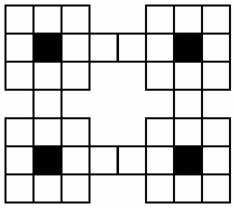
7 El promedio de estudiantes que entraron en un Instituto entre los cuatro años 1999 – 2002 fué 325 estudiantes por año. El promedio de estudiantes que entraron en ese Instituto en los cinco años 1999 – 2003 es un 20% mayor. ¿Cuántos estudiantes entraron en ese Instituto el año 2003?

A) 650 B) 600 C) 455 D) 390 E) 345

8 El conjunto de los valores del parámetro ***m*** para los que las curvas $x^2+y^2=1$ e $y=x^2+m$ tienen exactamente un punto común es:

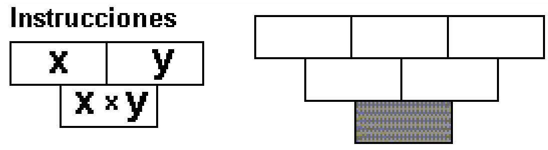
A) {-5/4, -1, 1} B) {-5/4, 1} C) {-1, 1} D) {-5/4} E) {1}

9 ¿Cuántas posibilidades hay de cubrir completamente todas las casillas blancas del tablero de la figura con piezas rectangulares 1 x 2?



A) 8 B) 16 C) 32 D) 64 E) 100

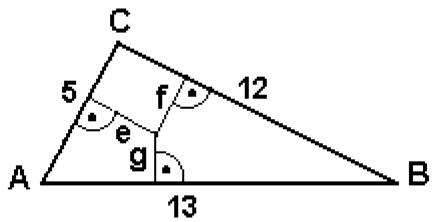
10 Construimos un triángulo numérico, con números enteros mayores que 1 en cada casilla, siguiendo las instrucciones indicadas. ¿Cuál de los números indicados en las respuestas NO puede ser situado en la casilla oscura?



A) 154 B) 100 C) 90 D) 88 E) 60

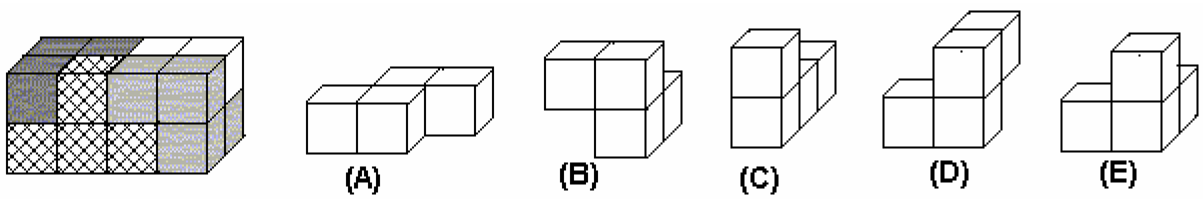
Las preguntas 11 a 20 valen CUATRO puntos cada una.

11 Sea *ABC* un triángulo de área 30. Sea *D* cualquier punto en su interior y sean *e*, *f* y *g* las distancias de *D* a los lados del triángulo. ¿Cuál es el valor de la expresión $5e + 12f + 13g$?



A) 120 B) 90 C) 60 D) 30
E) No es posible hallar su valor sin conocer la posición exacta de *D*.

12 Un paralelepípedo rectángulo se compone de 4 piezas, cada una de las cuales está formada por 4 pequeños cubos. ¿Cuál de las siguientes es la pieza blanca?



13 Dos gaviotas blancas y ocho grises están volando sobre un río. De repente, todas bajan a la orilla y se posan al azar formando una fila. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos gaviotas blancas estén una al lado de la otra?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{9}$

14 La expresión $\sqrt{1+2000\sqrt{1+2001\sqrt{1+2002\sqrt{1+2003\times 2005}}}}$ es igual a:

A) 2000 B) 2001 C) 2002 D) 2003 E) 2004

15 12, 13 y 15 son las longitudes de dos lados de un triángulo acutángulo y de la altura relativa al tercer lado (no necesariamente en este orden). Hallar el área del triángulo.

A) 168 B) 80 C) 84 D) $6\sqrt{65}$ E) El área no está determinada de manera única

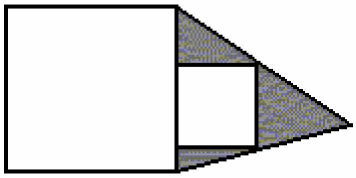
16 Un ordenador está imprimiendo la lista de las séptimas potencias de todos los números naturales, es decir, la sucesión 1^7, 2^7, 3^7, ... etc. ¿Cuántos términos de esta sucesión están comprendidos entre 5^{21} y 2^{49}?

A) 13 B) 8 C) 5 D) 3 E) 2

17 Sabemos que $10^n + 1$ es un múltiplo de 101 y que *n* es un número de dos cifras. ¿Cuál es el mayor valor posible de *n*?

A) 92 B) 94 C) 96 D) 98 E) 99

18 La figura muestra dos cuadrados: uno tiene 2m de lado y el otro 1m de lado. ¿Cuál es el área de la zona oscura?



A) $1m^2$ B) $2m^2$ C) $2\sqrt{2}$ m^2 D) 4 m^2
E) Depende de la posición de los dos cuadrados

19 La suma $100^2 - 99^2 + 98^2 - \ldots + 2^2 - 1^2$ es igual a :

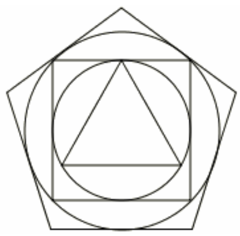
A) 2002; B) 2020; C) 4040; D) 5050; E) 8008

20 Sabiendo que $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 = 6$, y a>0, entonces $a^3+\frac{1}{a^3} =$

A) $4\sqrt{6}$ B) $3\sqrt{6}$ C) 6 D) $5\sqrt{6}$ E) $6\sqrt{6}$

Las preguntas 21 a 30 valen CINCO puntos cada una.

21 Primero dibujamos un triángulo equilátero. Luego trazamos su círculo circunscrito. A continuación circunscribimos un cuadrado a este círculo. Tras circunscribirle de nuevo un círculo, dibujamos un pentágono regular circunscrito, y así sucesivamente. Repetimos esta construcción, con nuevos círculos y nuevos polígonos regulares (cada uno con un lado más que el precedente) , hasta que dibujamos el polígono regular de 16 lados. ¿Cuántas regiones disjuntas hay dentro del ultimo polígono dibujado?



A) 232 B) 240 C) 248 D) 264 E) 272

22 Un punto P(a, b) está en la circunferencia de centro M (2,2) y radio r. Sabemos que b = r > 2 y que a, b y r son enteros positivos. ¿Cuál es el menor valor posible de a?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

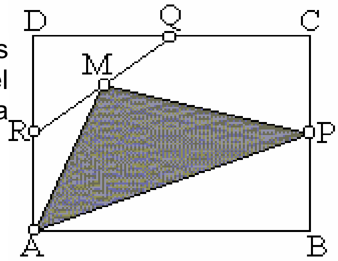
23 Sean A> B>1, enteros tales que A, B, A – B, A + B son todos primos.
Entonces S = A + B + (A – B) + (A + B)

A) es par B) es múltiplo de 3 C) es múltiplo de 5 D) es múltiplo de 7 E) es primo

24 El gerente de un almacén tiene que calcular el precio de un jersey. Los estudios de mercado le dan las siguientes informaciones: Si el precio es 75 euros, entonces 100 jóvenes comprarán el jersey. Cada vez que el precio aumenta 5 euros, 20 jóvenes menos comprarán el jersey. En cambio, cada vez que el precio baje 5 euros, se venderán 20 jerseys más. Cada jersey le cuesta al almacén 30 euros. ¿Cuál es el precio de venta que hace máximo el beneficio del almacén?

A) 85 euros B) 80 euros C) 75 euros D) 70 euros E) 65 euros

25 En el rectángulo ABCD, sean P, Q y R los puntos medios de los lados BC, CD y AD, respectivamente, y sea M el punto medio del segmento QR. ¿Qué fracción del área de ABCD representa el área del triángulo ΔAPM ?



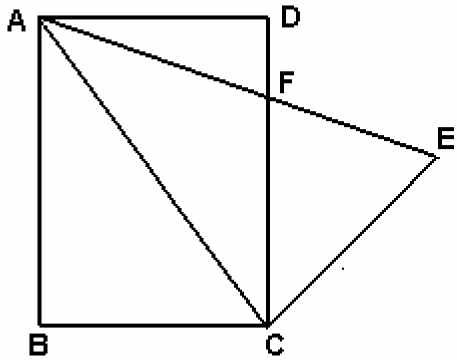
A) 1/4 B) 1/6 C) 3/8 D) 1/3 E) 5/16

26 Una sucesión (a_n) $n \geq 0$ se define de la siguiente manera : $a_0=4$; $a_1=6$ ... $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ (para $n \geq 1$).

Entonces a_{2003} es igual a:

A) 3/2 B) 2/3 C) 4 D) 1/4 E) 1/6

27 ABCD es un rectángulo con AB = 16, BC = 12. ACE es un triángulo rectángulo con $AC \perp CE$ y tal que CE = 15. Si F es el punto de intersección de los segmentos AE y CD, entonces el área del triángulo ACF es igual a



A) 75 B) 80 C) 96 D) 72 E) 48

28 Pedro pone una flecha en cada arista de un cubo, definiendo un vector. Luego suma los 12 vectores resultantes. ¿Cuántas sumas distintas de vectores se pueden obtener de esta manera (con todas las elecciones posibles)?

A) 25 B) 27 C) 64 D) 100 E) 125

29 Se dan los 6 vértices de un hexágono regular y todos los segmentos que unen dos cualesquiera de esos puntos. Llamamos a dos de esos segmentos “extraños” si no tienen ningún punto común (extremos incluidos). ¿Cuántos pares de segmentos “extraños” hay?

A) 26 B) 28 C) 30 D) 34 E) 36

30 Sea *f* un polinomio tal que $f(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2$. Determinar $f(x^2 - 1)$.

A) $x^4 - 4x^2$ B) x^4 C) $x^4 + 4x^2 - 4$ D) $x^4 - 4$ E) otra respuesta