XII CONCURSO
CANGURO MATEMÁTICO 2005

Nivel 6   (2º de BACHILLERATO)

Día 17 de marzo de 2005.   Tiempo : 1 hora y 15 minutos

No se permite el uso de calculadoras. Hay una única respuesta correcta para cada pregunta. Cada pregunta mal contestada se penaliza con 1/4 de los puntos que le corresponderían si fuera correcta. Las preguntas no contestadas no se puntúan ni se penalizan. Inicialmente tienes 30 puntos.

<u>Las preguntas 1 a 10 valen 3 puntos cada uno.</u>

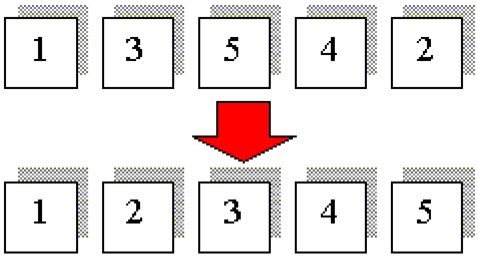
1 ¿Para cuál de los siguientes valores de x toma la expresión $\frac{x^2}{x^3}$ el menor valor?

A) 2   B) 1   C) –1   D) –2   E) –3

2 ¿Cuántos números, de 2 al 100, son el cubo de un número entero?

A) 1   B) 2   C) 3   D) 4   E) 5

3 Cinco cartas numeradas del 1 al 5 se colocan como se muestra en la figura (fila de arriba). Un movimiento consiste en intercambiar dos cartas de posición.
¿Cuál es el menor número de movimientos necesarios para ordenarlas en orden creciente (fila de abajo)?

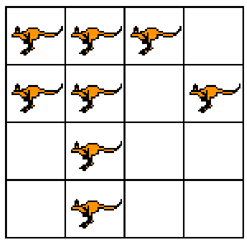


A) 1   B) 2   C) 3   D) 4   E) 5

4 ¿Si $888 \times 111 = 2 \times (2n)^2$, y n es un número entero positivo, el valor de n es:

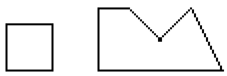
A) 8   B) 11   C) 22   D) 111   E) 444

5 Hay ocho canguros en las casillas de la tabla, como se ve en la figura de la derecha. Cada canguro puede saltar a cualquier casilla libre. Encuentra el mínimo número de canguros que tienen que saltar a otra casilla para que haya exactamente dos canguros en cada fila y dos en cada columna de la tabla.

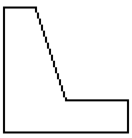
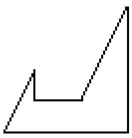
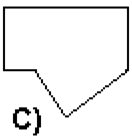
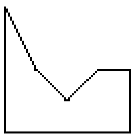
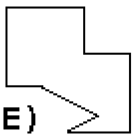


A) 1   B) 2   C) 3   D) 4   E) 5

6 Un trozo de papel con forma cuadrada se ha dividido en tres trozos. Dos de ellos son:



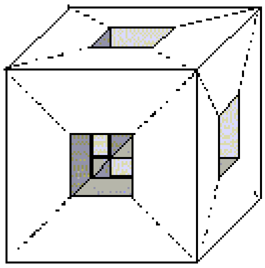
¿Qué forma tiene el tercer trozo?

A)    B)    C)    D)    E) 

7 La suma de cuatro números enteros consecutivos no puede ser igual a:

A) 2002   B) 22   C) 202   D) 222   E) 220

8 Un cubo 3×3×3 pesa 810 gramos. Se hacen tres agujeros en él, en forma de ortoedro de tamaño 1×1×3 , como se muestra en la figura. El peso del sólido restante es:

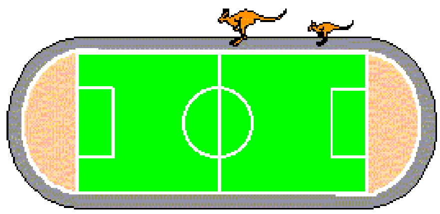


A) 540g B) 570 g C) 600 g D) 630g E) 660g

9 f(x) es una función tal que $\begin{cases} f(x+1) = 2f(x) - 2002 & \forall x \in Z \\ f(2005) = 2008 \end{cases}$. Entonces f(2004) vale:

A) 2004 B) 2005 C) 2008 D) 2010 E) 2016

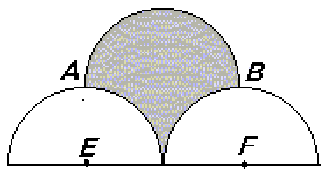
10 Mamá-canguro y su cría saltan alrededor del estadio, que tiene un perímetro de 330 m.. Ambas dan un salto por segundo, pero mientras los saltos de Mamá-canguro son de 5 metros de largo, los de la cría son de 2 metros de largo. Empiezan en el mismo instante, en el mismo sitio, y se mueven en el mismo sentido. Después de 25 segundos la cría se cansa y se para, mientras que Mamá-canguro sigue saltando. ¿Cuántos segundos pasará la cría esperando a que la alcance su madre?



A) 15 B) 25 C) 51 D) 66 E) 76

<u>Las preguntas 11 a 20 valen 4 puntos cada una</u>

11 La figura muestra tres semicircunferencias con los puntos A y B situados exactamente sobre los centros E y F de las dos semicircunferencias inferiores. Si el radio de cada semicircunferencia es 2 cm , el área en cm^2 de la región sombreada es:

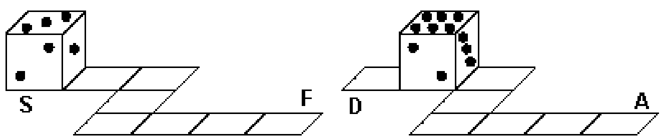


A) 8 B) 7 C) 2π D) $2\pi + 1$ E) $2\pi + 2$

12 Dos botellas de igual volumen están llenas , ambas, de agua y zumo. Las razones de los volúmenes de agua y zumo son, respectivamente 2:1 y 4:1. Echamos las mezclas de ambas botellas en una garrafa. La proporción de agua y zumo en la garrafa es:

A) 3:1 B) 6:1 C) 11:4 D) 5:1 E) 8:1

13 Las caras opuestas de un dado siempre suman 7. El dado rueda en un circuito como se presenta en la figura. Inicialmente, en D, la cara superior es un 3. ¿Cuál será la cara superior al final del recorrido, en A?

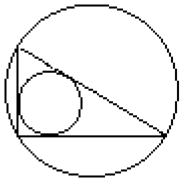


A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14 Una caja contiene 60 tarjetas. Unas son rojas, otras azules y el resto blancas. Si todas las tarjetas rojas se sustituyeran por azules, entonces habría el doble de tarjetas azules que blancas.; pero si todas las tarjetas blancas se sustituyeran por azules, entonces habría el triple de tarjetas azules que rojas. El número inicial de tarjetas azules era:

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

15 Sean a y b los catetos de un triángulo rectángulo. Si d es el diámetro de la circunferencia inscrita y D el diámetro de la circunferencia circunscrita a este triángulo, entonces d + D es igual a...



A) a+b B) 2(a+b) C) $0{,}5\cdot(a+b)$ D) $\sqrt{a\cdot b}$ E) $\sqrt{a^2+b^2}$

16 Sea M el conjunto de todos los números reales x que verifican la desigualdad $2^{4^x} < 4^{2^x}$. Entonces M es el conjunto:

A) $(-\infty,1)$ B) $(0,1)$ C) $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$ D) $(0,\infty)$ E) R

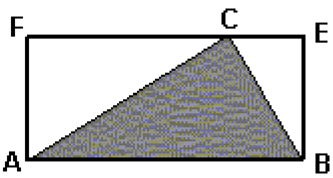
17 ¿Cuántos divisores de cuatro cifras tiene el número 102^2?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

18 Julia pinta de blanco o de negro cada cara de varios cubos, usando los dos colores en cada cubo. ¿Cuántas coloraciones distintas hay?

A) 8 B) 16 C) 32 D) 52 E) 64

19 La figura muestra un rectángulo ABEF y un triángulo ABC. Se sabe que $\widehat{ACF} = \widehat{CBE}$. Si FC = 6 y CE = 2 entonces el área de ABC es:



A) 12 B) 16 C) $8\sqrt{2}$ D) $8\sqrt{3}$ E) Otro valor

20 Carlos dice la verdad tres días a la semana durante todo el día y los cuatro restantes miente siempre. Hoy ha dicho exactamente cuatro de las siguientes frases. ¿Cuál de ellas no ha dicho hoy?

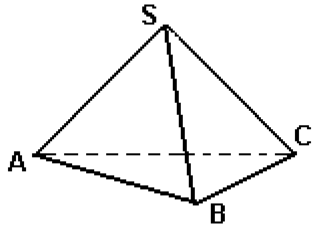
A) Entre chicos y chicas tengo un número primo de amigos.
B) Tengo tantos amigos chicos como amigas chicas.
C) 288 es divisible por 4.
D) Siempre digo la verdad.
E) Tres de mis amigos son mayores que yo.

<u>Las preguntas 21 a 30 valen 5 puntos cada una</u>

21 ¿Cuál de los siguientes números se puede escribir como el producto de cuatro enteros diferentes mayores que 1?

A) 625 B) 124 C) 108 D) 2187 E) 2025

22 En la pirámide SABC todos los ángulos planos con vértice en S miden 90º. Las áreas de las caras laterales SAB, SAC y SBC son 3, 4 y 6, respectivamente. El volumen de la pirámide es:



A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 12

23 Si la suma de las cifras del número *m* es 30 entonces la suma de las cifras de *m* + 3 no puede ser

A) 6 B) 15 C) 21 D) 24 E) 33

24 En una bolsa hay 17 bolas numeradas con los números 5 + 125 k, con k = 0, 1, ... 16 . Si elegimos varias bolas al azar, ¿cuál es el menor número de bolas que es necesario extraer para garantizar que la selección incluye al menos un par de bolas que sumen 2010?

A) 7 B) 8 C) 10 D) 11 E) 17

25 Si sabemos que $\log_{10}\left(\sqrt{2005}+\sqrt{1995}\right)=n$ ¿cuál de los siguientes números es el valor de $\log_{10}\left(\sqrt{2005}-\sqrt{1995}\right)$?

A) $n-1$ B) $1-n$ C) $\frac{1}{n}$ D) $n+1$ E) imposible determinarlo con esos datos

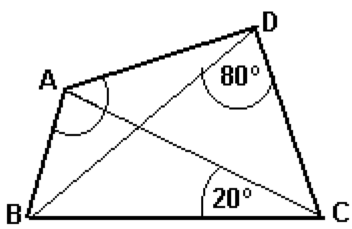
26 Enrique debe viajar desde A hasta B y planea hacerlo a una cierta velocidad. Le gustaría llegar antes de lo previsto, y observa que si viajase 5 km / h más deprisa que lo planeado, llegaría 5 horas antes, y si viajase 10 km / h más deprisa que lo planeado, llegaría 8 horas antes. ¿A qué velocidad lo planeó?

A) 10 km/h B) 15 km/h C) 20 km/h D) 25 km/h E) es imposible saberlo

27 Empezamos con un número, lo duplicamos y luego restamos 1. Después de aplicar este procedimiento 98 veces más (empezando cada vez con el resultado de la vez anterior) se obtiene $2^{100}+1$. ¿Con qué número empezamos?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 3

28 En el cuadrilátero ABCD la diagonal BD es la bisectriz del ángulo $\widehat{ABC}$ y AC = BC Si $\widehat{BDC}=80°$ y $\widehat{ACB}=20°$, entonces $\widehat{BAD}$ mide

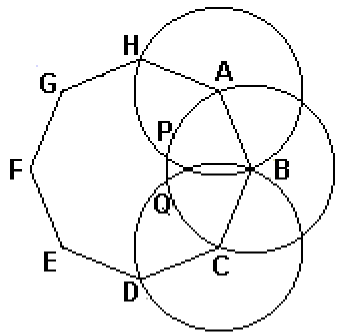


A) 90º B) 100º C) 110º D) 120º E) 135º

29 El entero A tiene exactamente dos divisores positivos y el entero B tiene exactamente 5 divisores positivos. Si A no es divisor de B, ¿cuántos divisores tiene el número A • B ?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 10 E) imposible determinarlo con esos datos

30 En la figura ABCDEFGH es un octógono regular de lado 1. Los puntos P y Q son los puntos de intersección de las circunferencias de centros A, B y C y radio 1. La medida del ángulo $\widehat{APQ}$ en radianes es



A) $\frac{19}{24}\pi$ B) $\frac{8}{11}\pi$ C) $\frac{5}{8}\pi$ D) $\frac{3}{4}\pi$ E) $\frac{7}{9}\pi$