XV CONCURSO
CANGURO MATEMÁTICO 2008

Nivel 6 (2º de Bachillerato)

Día 9 de abril de 2008. Tiempo : 1 hora y 15 minutos

No se permite el uso de calculadoras. Hay una única respuesta correcta para cada pregunta. Cada pregunta mal contestada se penaliza con 1/4 de los puntos que le corresponderían si fuera correcta. Las preguntas no contestadas no se puntúan ni se penalizan. Inicialmente tienes 30 puntos.

Las preguntas 1 a 10 valen 3 puntos cada uno.

1 Los números 3,4 y otros dos números desconocidos se escriben en las casillas de la tabla 2 × 2 Se sabe que la suma de los números en las filas son 5 y 10, y que la suma de los números en una de las columnas es igual a 9. El mayor de los números desconocidos es

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 3

2 Si $x+y=0$ y $x \neq 0$, entonces $\dfrac{x^{2008}}{y^{2008}} =$

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2^{2008} E) x/y

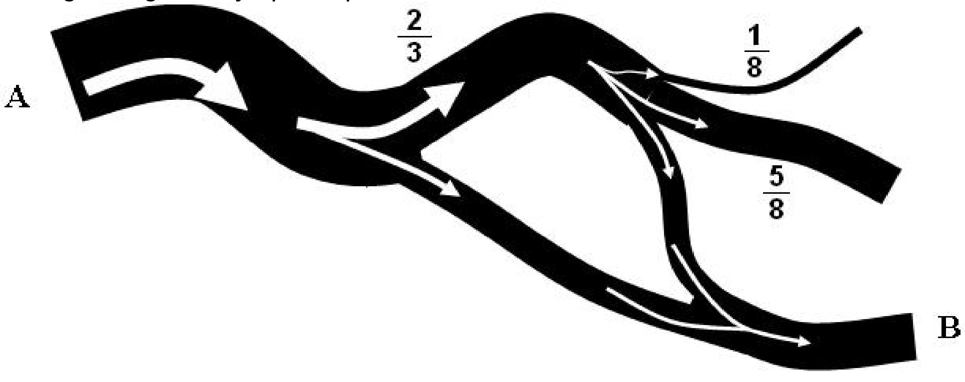
3 Una tabla contiene 21 columnas, numeradas 1, 2, … 21 y 33 filas, numeradas 1, 2, … 33. Borramos las filas cuyo número no es múltiplo de 3 y las columnas cuyo número es par. ¿Cuántas casillas de la tabla quedan, después de eso?

A) 110 B) 121 C) 115,5 D) 119 E) 242

4 ¿Cuántos números primos p tienen la propiedad de que p^4+1 es primo también?

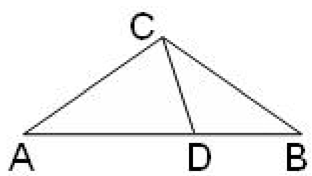
A) Ninguno B) 1 C) 2 D) 3 E) Infinitos

5 Un río empieza en el punto A y se bifurca en dos ramas. Una de ellas recoge 2/3 del agua de la corriente, y la otra el resto. Más tarde, la primera rama se divide en tres ramas una de ellas toma 1/8 del agua de la rama, la segunda 5/8 y la tercera el resto. Más adelante, esta última rama vuelve a encontrarse con la segunda de las ramas iniciales. La figura muestra la situación. ¿Qué porción del agua original fluye por el punto B?



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

6 Se da el triángulo isósceles ABC (CA = CB). Se marca el punto D sobre el lado AB de modo que AD = AC y DB = DC (ver la figura). Hallar la medida del ángulo ACB.



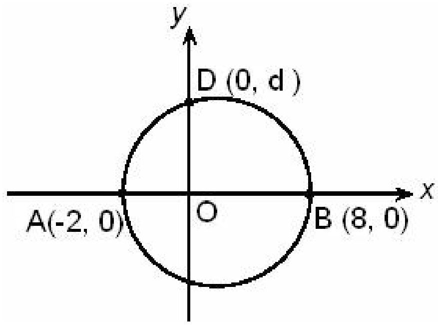
A) 98° B) 100° C) 104°
D) 108° E) 110°

7 El máximo valor de $\mathbf{f(x)} = \left| \mathbf{5\,sin\,x - 3} \right|$ para $x \in R$ es

A) 2 B) 3 C) π D) 5 π E) 8

8 La figura muestra un círculo con diámetro AB y un punto D sobre la circunferencia. Calcular OD.
.

A) 3 B) $2\sqrt{3}$ C) 4
D) 5 E) 6



9 Se tienen cinco puntos distintos A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5, situados en este orden sobre la recta (algunas de las distancias mutuas pueden ser distintas). Se sitúa en la misma recta otro punto P de modo que la suma de las distancias $PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4 + PA_5$ es mínima. Entonces el punto P es

A) A_1 B) A_2 C) A_3
D) Cualquier punto entre A_2 y A_4 E) Cualquier punto entre A_1 y A_5

10 Nora quiere colocar en los espacios vacíos del número 2 _ _ 8 dos cifras tales que el número completo sea divisible por 3. ¿Cuántas posibilidades tiene?

A) 29 B) 30 C) 19 D) 20 E) 33

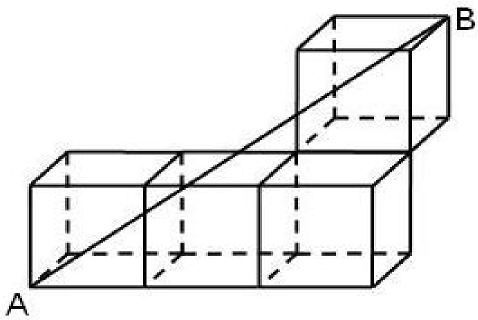
Las preguntas 11 a 20 valen 4 puntos cada una

11 Tenemos los siete números –9 ; 0 ; –5 ; 5 ; –4 ; –1 ; –3. Agrupamos 6 de ellos en grupos de 2 de modo que la suma de números de cada grupo sea la misma. ¿Qué número queda?

A) 5 B) 0 C) –3 D) –4 E) –5

12 Cada uno de los cubos de la figura tiene arista de longitud 1.
¿Cuál es la longitud del segmento AB?

A) $\sqrt{17}$ B) 7 C) $\sqrt{13}$
D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{14}$



13 Se proponen 5 problemas en un concurso matemático. Como tienen diferente nivel de dificultad, reciben diferentes puntuaciones (enteros positivos). Bill resuelve los 5 problemas y obtiene un total de 10 puntos por los dos problemas con menor puntuación y 18 puntos por los dos problemas con mayor puntuación. ¿Cuántos puntos obtuvo Bill?

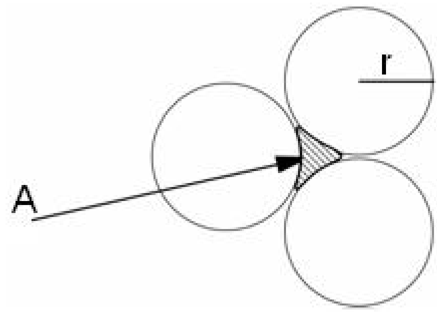
A) 30 B) 32 C) 34 D) 35 E) 40

14 Matilde dibuja 36 canguros usando 3 colores diferentes. 25 de los canguros tienen algo Amarillo, 28 tienen algo marrón y 20 tienen algo negro. Sólo 5 canguros tienen los tres colores. ¿Cuántos canguros están pintados de un solo color?

A) Ninguno B) 4 C) 12 D) 31
E) Es imposible saberlo.

15

Tres circunferencias son tangentes dos a dos, según se muestra en la figura. El radio de cada una es r.
El área de A es

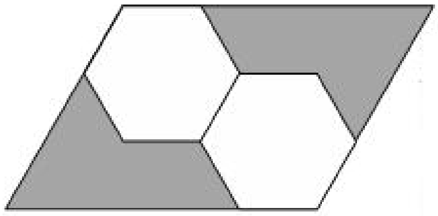


A) $\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\pi\right)r^2$ B) $\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)r^2$ C) $\frac{1}{8}\pi r^2$

D) $\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)\pi r^2$ E) $\left(\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)r^2$

16

En la figura los dos hexágonos regulares son iguales.
¿Qué fracción del área del paralelogramo está coloreada?



A) 1/2 B) 1/3 C) 2/3

D) 2/5 E) 5/12

17

El numerador y el denominador de una fracción son números negativos, y el numerador es una unidad mayor que el denominador. ¿Cuál de las siguientes proposiciones se puede aplicar a la fracción?

A) La fracción es un número menor que -1.
B) La fracción es un número entre -1 y 0.
C) La fracción es un número positivo menor que 1.
D) La fracción es un número mayor que 1.
E) No se puede saber si la fracción es positive o negativa.

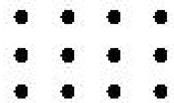
18

Supongamos que $x^2yz^3 = 7^3$ y $xy^2 = 7^9$. Entonces $xyz =$

A) 7^4 B) 7^6 C) 7^8 D) 7^9 E) 7^{10}

19

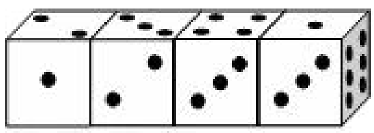
Se eligen tres puntos al azar de la siguiente configuración. ¿Cuál es la probabilidad de que estén alineados?



A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{11}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{3}{12}$

20

Cuatro dados idénticos se disponen en fila.(ver la fig.).Cada dado tiene en sus caras los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 , pero no son dados standard, es decir, la suma de puntos en las caras opuestas no vale necesariamente 7.¿Cuál es la suma total de puntos en las 6 caras tangentes de los dados?



A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

Las preguntas 21 a 30 valen 5 puntos cada una

21

Las longitudes de las aristas de un paralelepípedo rectángulo en centímetros, son números enteros y forman una progresión geométrica de razón $q = 2$. ¿Cual de los siguientes puede ser el volumen del paralelepípedo?

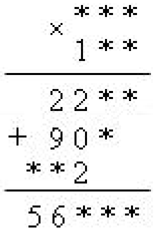
A) 120 cm^3 B) 188 cm^3 C) 216 cm^3 D) 350 cm^3 E) 500 cm^3

22

Hallar el valor de la expresión $x^2 + y^2 + z^2$, si $x + y + z = 1$ y $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Imposible saberlo.

23 En la figura cada asterisco representa una cifra. La suma de las cifras del producto vale



A) 16 B) 20 C) 26 D) 30

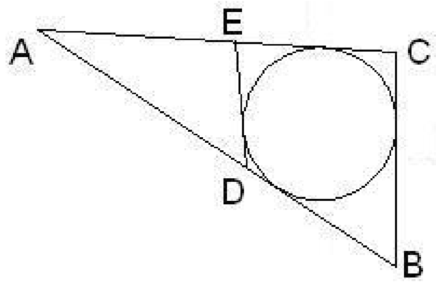
E) Otra respuesta

24 El primer elemento de una sucesión es $a_1 = 0$, y si $n \geq 1$, entonces $a_{n+1} = a_n + (-1)^n.n$.

Si $a_k = 2008$ entonces el valor de k es

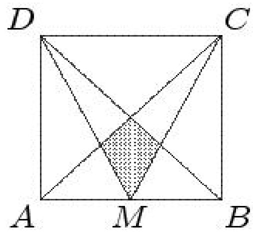
A) 2008 B) 2009 C) 4017 D) 4018 E) Otro

25 Se inscribe un círculo en el triángulo ABC (ver figura), y |AC| = 5, |AB| = 6, |BC| = 3. El segmento ED es tangente al círculo. El perímetro del triángulo ADE es



A) 7 B) 4 C) 9
D) 6 E) 8

26 El cuadrado ABCD tiene su lado de longitud 1 y M es el punto medio de AB.
El área de la región sombreada es

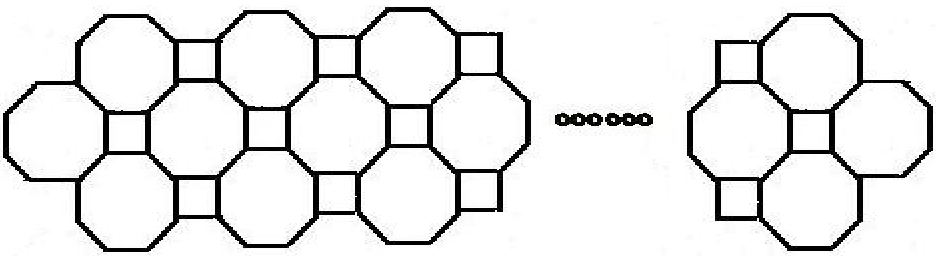


A) $\frac{1}{24}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{2}{13}$

27 ¿Cuántos números de 2007 cifras hay, tales que todo número de 2 cifras formado por dos cifras consecutivas sea divisible por 17 ó por 23?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) más de 9

28 Usamos segmentos para construir este conjunto. Si hay 61 octógonos, cuantos segmentos hemos utilizado?



A) 488 B) 448 C) 328 D) 226 E) 446

29 El número $3^{32} - 1$ tiene exactamente dos divisores que son mayores que 75 y menores que 85. ¿Cuál es el producto de esos dos divisores?

A) 5852 B) 6560 C) 6804 D) 6888 E) 6972

30 Si sen (x) + cos (x) =m entonces $\text{sen}^4(x) + \cos^4(x) =$

A) $1-\frac{(1-m^2)^2}{2}$ B) $1+\frac{(1-m^2)^2}{2}$ C) $\frac{1-(1-m^2)^2}{2}$ D) m^4 E) m^4+1