



XVI CONCURSO CANGURO MATEMÁTICO 2009



Nivel 5 (1° de Bachillerato)

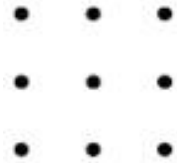
Día 24 de marzo de 2009. Tiempo : 1 hora y 15 minutos

No se permite el uso de calculadoras. Hay una única respuesta correcta para cada pregunta. Cada pregunta mal contestada se penaliza con 1/4 de los puntos que le corresponderían si fuera correcta. Las preguntas no contestadas no se puntúan ni se penalizan. Inicialmente tienes 30 puntos.

Las preguntas 1 a 10 valen 3 puntos cada una.

- 1** ¿Cuál de los siguientes números es múltiplo de 3?
 A) 2009 B) $2 + 0 + 0 + 9$ C) $(2+0) \cdot (0+9)$ D) 2^9 E) $200 - 9$

- 2** ¿Cuál es el menor número de puntos que hay que quitar de la figura para que en la figura resultante no haya ninguna terna de puntos alineados?
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 7

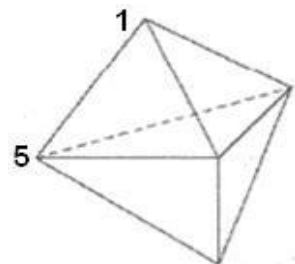


- 3** En una carrera popular han participado 2009 personas. El número de participantes a los que ha ganado Juan es el triple de los que le han ganado a él. ¿En qué lugar se ha clasificado Juan?
 A) 503 B) 501 C) 500 D) 1503 E) 1507

- 4** ¿Cuál es el valor de $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{5}{6}$ de $\frac{6}{7}$ de $\frac{7}{8}$ de $\frac{8}{9}$ de $\frac{9}{10}$ de 1000?
 A) 250 B) 200 C) 100 D) 50 E) ninguno de los anteriores

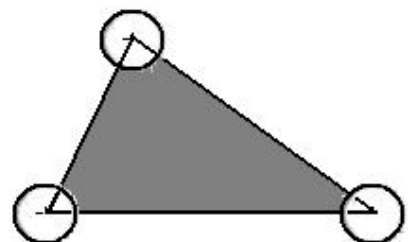
- 5** Se forma una sucesión de cifras escribiendo 2009 veces el número 2009. La suma de las cifras impares que son seguidas por una cifra par es
 A) 2 B) 9 C) 4018 D) 18072 E) 18081

- 6** La figura muestra un sólido formado por 6 caras triangulares. En cada vértice hay un número. Para cada cara, consideramos la suma de los tres números que hay en los vértices de esa cara. Si todas las sumas son iguales, y dos de los números, como se muestra en la figura, son 1 y 5, ¿cuál es la suma de los 5 números de los vértices del sólido?
 A) 9 B) 12 C) 17 D) 18 E) 24



- 7** ¿Cuántos enteros positivos tienen el mismo número de cifras en la representación decimal de sus cuadrados y sus cubos?
 A) 0 B) 3 C) 4 D) 9 E) infinitos

- 8** El área del triángulo de la figura es 80 m^2 y el radio de los círculos con centro en los vértices es 2 m. ¿Cuál es la medida, en metros cuadrados, del área sombreada?
 A) 76 B) $80 - 2\pi$ C) $40 - 4\pi$
 D) $80 - \pi$ E) 78π



9

Leonardo ha escrito una sucesión de números tal que, a partir del tercero, cada número es la suma de los dos anteriores. El cuarto número es 6 y el sexto 15. ¿Cuál es el séptimo término de la sucesión?

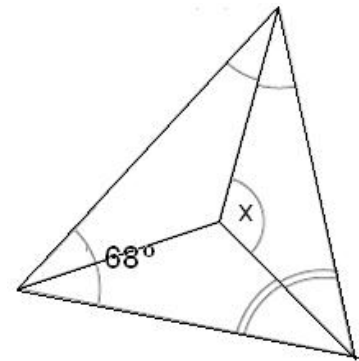
- A) 9 B) 16 C) 21 D) 22 E) 24

10

Un triángulo tiene un ángulo de 68° . Se trazan las tres bisectrices interiores

¿Cuál es la medida, en grados, del ángulo x ?

- A) 120° B) 124° C) 128° D) 132° E) 136°



Las preguntas 11 a 20 valen 4 puntos cada una

11

Un examen se puntúa con 0,1,2,3,4 ó 5 puntos. Después de 4 exámenes, la puntuación media de María es 4. Una de las proposiciones siguientes no puede ser verdad. ¿Cuál es?

- A) María siempre ha obtenido 4 puntos
 B) María ha obtenido 3 puntos exactamente dos veces
 C) María ha obtenido 3 puntos exactamente tres veces
 D) María ha obtenido 1 punto exactamente una vez
 E) María ha obtenido 4 puntos exactamente dos veces.

12

Los anillos de la Tierra Media tienen la sorprendente propiedad de que tres de ellos no pueden ser separados sin destruirlos, pero uno cualquiera de ellos puede ser separado, y los otros dos ya no están enlazados. ¿Cuál de las figuras siguientes representa los anillos de la Tierra Media?



- A) A B) B C) C D) D E) E

13

Hay 25 personas en una fila, que pueden ser veraces (dicen siempre la verdad) o mentirosos (siempre mienten). Todos, excepto la primera persona de la fila, dicen que la persona que está delante de él es un mentiroso, y la primera persona de la fila dice que todos los que están detrás de él son mentirosos. ¿Cuántos mentirosos hay en la fila?

- A) 0 B) 12 C) 13 D) 24 E) imposible saberlo

14

Si $a \heartsuit b = ab + a + b$, y $3 \heartsuit 5 = 2 \heartsuit x$, entonces x es igual a

- A) 3 B) 6 C) 7 D) 10 E) 12

15

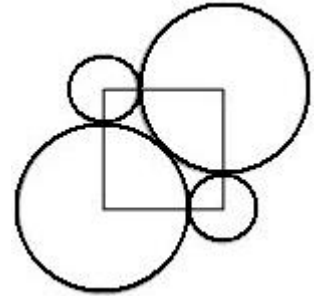
Los números \sqrt{n} y 10 se diferencian en un número menor que 1. ¿Cuántos enteros n hay que tengan esta propiedad?

- A) 19 B) 20 C) 39 D) 40 E) 41

16

Con centro en los vértices del cuadrado de la figura se han trazado círculos, dos grandes y dos pequeños. Los círculos grandes son tangentes exteriores entre sí, y ambos son tangentes exteriores a los pequeños. Si R es el radio de un círculo grande y r es el radio del círculo pequeño, entonces $\frac{R}{r}$ es igual a

- A) $\frac{2}{9}$ B) $\sqrt{5}$ C) $1 + \sqrt{2}$ D) 2,5 E) $0,8\pi$



17

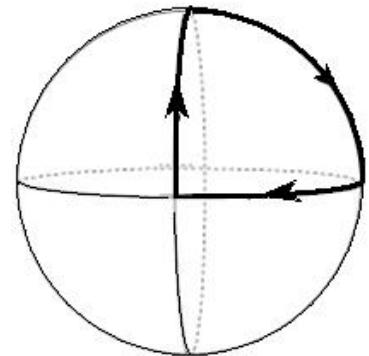
Viernes escribe en sucesión varios números naturales distintos, menores o iguales que 10. Robinson Crusoe examina esos números y observa con satisfacción que en cada par de números consecutivos (en la sucesión), uno de ellos es divisible por el otro. ¿Cuál es el número máximo de números que ha escrito Viernes?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

18

Tres arcos circulares se unen de tal manera que se cortan en ángulos rectos, como se indica en la figura. Una hormiga está en una de las intersecciones, y se mueve a lo largo de los arcos de la siguiente manera: recorre un cuarto de círculo, tuerce a la derecha 90° , recorre otro cuarto de círculo, tuerce a la izquierda 90° , y así sucesivamente. ¿Cuántos cuartos de círculo recorrerá antes de volver al punto de partida por primera vez? (La figura no refleja el enunciado)

- A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18



19

¿Cuántos ceros hay que poner en lugar del asterisco en el número decimal $1,*1$ para obtener un número que sea menor que $\frac{2009}{2008}$ pero mayor que $\frac{20009}{20008}$?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

20

Si $a = 2^{25}$, $b = 8^8$ y $c = 3^{11}$, entonces

- A) $a < b < c$ B) $b < a < c$ C) $c < b < a$ D) $c < a < b$ E) $b < c < a$

Las preguntas 21 a 30 valen 5 puntos cada una

21

¿Cuántos números de diez cifras, formados únicamente con las cifras 1, 2 y 3, son tales que dos cifras consecutivas cualesquiera difieren en 1? .

- A) 16 B) 32 C) 64 D) 80 E) 100

22

El Canguro tiene 2009 cubos unidad $1 \times 1 \times 1$, que dispone formando un paralelepípedo. También tiene 2009 pegatinas 1×1 que utiliza para colorear la superficie exterior del paralelepípedo. Una vez que ha terminado, le sobran pegatinas. ¿Cuántas?

- A) Más de 1000 B) 763 C) 476 D) 49 E) El Canguro no puede hacer eso

23

Si $x + y = \sqrt{5}$ y $x - y = \sqrt{3}$ entonces $\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}$ es

- A) 2 B) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ C) $16\sqrt{15}$ D) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ E) $\sqrt{15}$

24

Se escriben en una fila todos los divisores del número N , a excepción de N y de 1. El mayor de los divisores escritos es 45 veces mayor que el menor. ¿Cuántos números N cumplen esta condición?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) más de 2 E) imposible saberlo

25

¿Cuál es el menor entero n tal que $(2^2 - 1) \cdot (3^2 - 1) \cdot (4^2 - 1) \cdot \dots \cdot (n^2 - 1)$ es un cuadrado perfecto?

- A) 6 B) 8 C) 16 D) 27 E) otra respuesta

26

¿Para cuántos enteros a entre 1 y 25 el producto $a(a+1)(a+2)$ es múltiplo de 84?

- A) para ninguno B) 1 C) 2 D) 4 E) 6

27

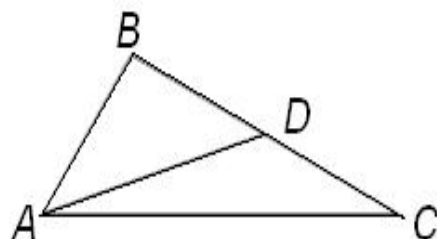
El Canguro está situado en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares. Puede saltar 1 unidad verticalmente u horizontalmente. Después de 10 saltos, ¿a cuántos puntos del plano puede llegar?

- A) 221 B) 100 C) 400 D) 441 E) ninguno de los anteriores

28

Sea AD la mediana del triángulo ABC . El ángulo $\angle ACB$ mide 30° , el ángulo $\angle ADB$ mide 45° . ¿Cuánto mide el ángulo $\angle BAD$?

- A) 45° B) 30° C) 25° D) 20° E) 15°

**29**

Hallar el menor número de elementos que hay que quitar del conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 16\}$

de tal manera que la suma de dos cualesquiera de los números que quedan es un cuadrado perfecto:

- A) 10 B) 9 C) 14 D) 7 E) 6

30

Un número primo es considera "raro" si es, o bien un número de una sola cifra, o si teniendo dos o más cifras, los dos números obtenidos al quitar su primera o su última cifra son también "raros". ¿Cuántos números primos raros hay?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 11