XVI CONCURSO
CANGURO MATEMÁTICO 2009

Nivel 6 (2º de Bachillerato)

Día 24 de marzo de 2009. Tiempo : 1 hora y 15 minutos

No se permite el uso de calculadoras. Hay una única respuesta correcta para cada pregunta. Cada pregunta mal contestada se penaliza con 1/4 de los puntos que le corresponderían si fuera correcta. Las preguntas no contestadas no se puntúan ni se penalizan. Inicialmente tienes 30 puntos.

Las preguntas 1 a 10 valen 3 puntos cada una.

1 En un acuario hay 200 peces. El 1 % de ellos son azules y el resto amarillos. ¿Cuántos peces amarillos hay que sacar del acuario para que los azules representen el 2% de todos los peces que quedan en el acuario?

A) 2 B) 4 C) 20 D) 50 E) 100

2 ¿Cuál de los siguientes números es el mayor?

A) $\sqrt{2}-\sqrt{1}$ B) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ C) $\sqrt{4}-\sqrt{3}$ D) $\sqrt{5}-\sqrt{4}$ E) $\sqrt{6}-\sqrt{5}$

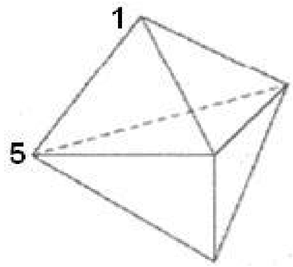
3 ¿Para cuántos números naturales n, es primo el número $n^2 + n$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) un número finito pero mayor que 2
E) un número infinito

4 María, Elena y Luis van a una cafetería. Cada uno de ellos compra tres vasos de zumo, dos helados y cinco bollos. ¿Cuál de las siguientes cantidades puede ser lo que se han gastado entre los tres?

A) 39,20 € B) 38,20 € C) 37,20 € D) 36,20 € E) 35,20 €

5 La figura muestra un sólido formado por 6 caras triangulares.
En cada vértice hay un número. Para cada cara, consideramos la suma de los tres números que hay en los vértices de esa cara. Si todas las sumas son iguales, y dos de los números, como se muestra en la figura, son 1 y 5, ¿cuál es la suma de los 5 números de los vértices del sólido?



A) 9 B) 12 C) 17 D) 18 E) 24

6 Con la notación k(K,r) representamos una circunferencia de centro K y radio r.
Las circunferencias f(F; 13), g(G; 15) se cortan en los puntos P y Q. La longitud del segmento PQ es 24. ¿Cuál de los siguientes valores puede ser la longitud del segmento FG?

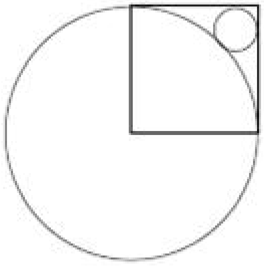
A) 2 B) 5 C) 9 D) 14 E) 18

7 Se quieren colorear las casillas de la tabla con los colores P, Q, R y S de tal manera que casillas contiguas no estén pintadas del mismo color (las casillas que comparten un vértice o un lado se consideran contiguas).
Algunas de las casillas se muestran coloreadas en la figura. ¿Cuáles son las posibilidades de coloración de la casilla sombreada?

P	Q			
R	S			
		Q		
Q				

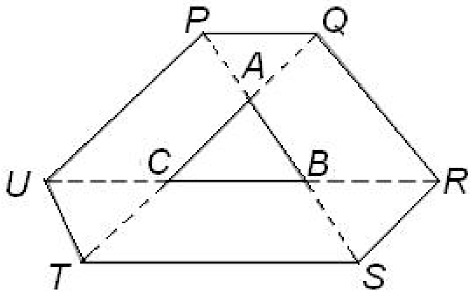
A) P ó Q B) sólo R C) sólo S D) R ó S
E) cualquiera de los colores P, Q, R ó S

8 El cuadrado de la figura tiene lado igual a 1.
Entonces, el radio del círculo pequeño es igual a:



A) $\sqrt{2}-1$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$

9 Los lados del triángulo ABC se prolongan para obtener los puntos P, Q, R, S, T y U de tal manera que |PA| = |AB| = |BS|, |TC| = |CA| = |AQ| y |UC| = |CB| = |BR|, tal como se indica en la figura.
Si el área del triángulo ABC es 1, ¿cuánto vale el área del hexágono PQRSTU?



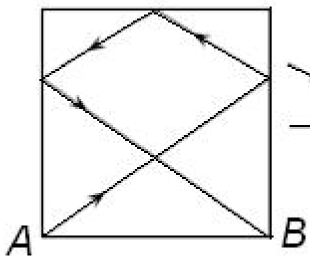
A) 9 B)10 C) 12 D)13 E) faltan datos

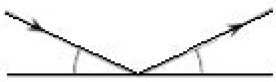
10 Una caja contiene 2 calcetines blancos, 3 rojos y 4 azules. Elisa sabe que un tercio de los calcetines tienen un agujero, pero no de qué color son los calcetines agujereados. Saca de la caja, al azar, y sin mirar, calcetines de la caja, esperando sacar dos calcetines sin agujero, del mismo color. ¿Cuántos calcetines debe sacar para estar segura de que puede conseguirlo?

A) 2 B) 3 C) 6 D) 7 E) 8

<u>Las preguntas 11 a 20 valen 4 puntos cada una</u>

11 En una mesa de billar cuadrada, de lado 2 m, se lanza una bola desde el vértice A. Después de tocar en tres bandas, como se indica, llega al vértice B.
¿Cuántos metros ha recorrido la bola? (La bola rebota en las bandas formando ángulos iguales con ellas, como se indica en la figura de la derecha)



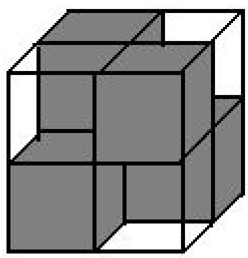


A) 7 B) $2\cdot\sqrt{13}$ C) 8 D) $4\cdot\sqrt{3}$ E) $2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$

12 2009 canguros, grises y rojos, comparan sus estaturas. Se sabe que un canguro gris es más alto que exactamente 8 canguros rojos, un canguro gris es más alto que exactamente 9 canguros rojos, un canguro gris es más alto que exactamente 10 canguros rojos, y así sucesivamente, y finalmente un canguro gris es más alto que todos los canguros rojos. ¿Cuántos canguros grises hay?

A) 1000 B) 1001 C) 1002 D) 1003 E) la situación descrita es imposible

13 Un cubo 2 × 2 × 2 está formado por cuatro cubos transparentes 1 × 1 × 1 y cuatro cubos no transparentes 1 × 1 × 1 .
Se colocan de tal forma que el cubo grande no es transparente, queriendo esto decir que no es posible ver a través de él ni de arriba a abajo, ni de frente a atrás, ni de derecha a izquierda. ¿Cuántos cubos no transparentes, como mínimo, hay que colocar formando un cubo 3 × 3 × 3 para que sea no transparente?



A) 6 B) 9 C) 10 D) 12 E) 18

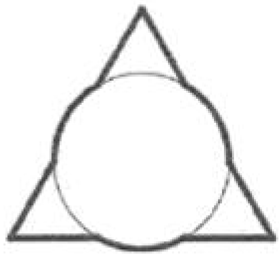
14 ¿Cuál es la última cifra del número $1^2-2^2+3^2\cdots-2008^2+2009^2$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

15 Hay 25 personas en una fila, que pueden ser veraces (dicen siempre la verdad) o mentirosos (siempre mienten). Todos, excepto la primera persona de la fila, dice que la persona que está delante de él es un mentiroso, y la primera persona de la fila dice que todos los que están detrás de él son mentirosos.¿Cuántos mentirosos hay en la fila?

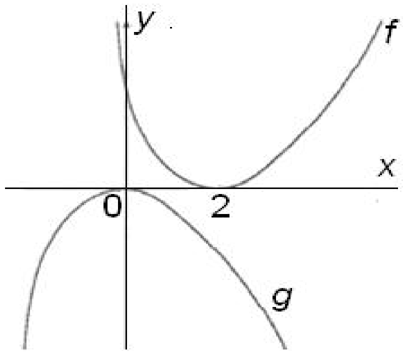
A) 0 B) 12 C) 13 D) 24 E) imposible saberlo

16 Superponemos un triángulo equilátero de lado 3 y un círculo de radio 1 haciendo coincidir los centros de ambas figuras
¿Cuánto vale el perímetro de la figura así obtenida (señalado con trazo más grueso)?



A) $3+2\pi$ B) $6+\pi$ C) $9+\frac{\pi}{3}$ D) 3π E) $9+\pi$

17 En la figura se muestran las gráficas de las funciones reales f y g. ¿Qué relación hay entre f y g?



A) g(x) = f(x + 2) B) g(x − 2) = −f(x)
C) g(x) = −f(−x + 2) D) g(−x) = −f(−x + 2)
E) g(2 − x) = −f(x)

18 A cada uno de los 100 participantes en un concurso de Matemáticas se le han propuesto 4 problemas. 90 participantes resolvieron el primer problema, 85 el segundo, 80 el tercero y 70 el cuarto.¿Cuál es el menor número posible de participantes que resolvieron los 4 problemas?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

19 Consideramos los números de 10 cifras, formados únicamente por las cifras 1, 2, 3, y tales que dos cifras contiguas cualesquiera difieran en 1. ¿Cuántos hay?

A) 16 B) 32 C) 64 D) 80 E) 100

20 Se construye un tabla cuadrada 3 × 3 de números reales tal que la suma de los números de cada fila, de cada columna y de cada diagonal (completa) es la misma. Dos de los números se muestran en la figura
¿Qué número debe estar en la posición a?

a		
		47
	63	

A) 16 B) 51 C) 54 D) 55 E) 110

<u>Las preguntas 21 a 30 valen 5 puntos cada una</u>

21 Dos corredores, A y B, corren alrededor de la pista de un estadio. Cada uno de ellos lo hace a velocidad constante. A corre más rápido que B y tarda 3 minutos en dar una vuelta al estadio. Si A y B empiezan a la vez, 8 minutos después A dobla a B por primera vez. ¿Cuánto tarda B en dar una vuelta al estadio?

A) 6 min B) 8 min C) 4 min 30 seg D) 4min 48 seg E) 4min 20 seg

22 Sea Z el número de números de 8 cifras, todas ellas distintas y ninguna de las cuales es 0. ¿Cuántos números de 8 cifras distintas, ninguna de las cuales es 0, son divisibles por 9?

A) $\frac{Z}{8}$ B) $\frac{Z}{3}$ C) $\frac{Z}{9}$ D) $\frac{8Z}{9}$ E) $\frac{7Z}{8}$

23 Una esfera tiene en ella inscrito un cubo (los vértices del cubo están en la superficie de la esfera). Estimar el porcentaje del volumen de la esfera que representa el volumen del cubo.

A) 12 % B) 37 % C) 65 % D) 80 % E) 94 %

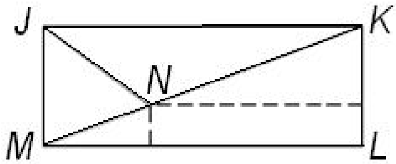
24 ¿Para cuántos enteros n, mayores o iguales que 3, existe un polígono convexo de n lados, cuyos ángulos están en la proporción 1 : 2 : . . . : n?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) más de 5

25 55 escolares toman parte en un concurso de matemáticas. Cuando el jurado corrige los problemas, los marca con ”+” si el problema fue resuelto, con ”−” si el problema fue mal resuelto, o con ”0” si el estudiante no contestó al problema. Más tarde se comprobó que no hubo dos estudiantes que obtuvieran el mismo número de ”+” y de ”−”.¿Cuál es el menor número posible de problemas del concurso?

A) 6 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

26 En el rectángulo JKLM, la bisectriz del ángulo KJM corta a la diagonal KM en el punto N. Las distancias de N a los lados LM y KL son, respectivamente, 1 y 8. Entonces LM vale:



A) $8+2\sqrt{2}$ B) $11-\sqrt{2}$ C) 10 D) $8+3\sqrt{2}$ E) $11+\frac{\sqrt{2}}{2}$

27 Si $K=\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}$ ¿cuántos valores posibles de K existen?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

28 Los números 1; 2; 3; . . . ; 99 se distribuyen en n grupos cumpliendo las condiciones siguientes:
1. cada número pertenece exactamente a un grupo.
2. al menos hay dos números en cada grupo;
3. si dos números están en el mismo grupo, entonces su suma no es divisible por 3.
El valor más pequeño de n con esta propiedad es:

A) 3 B) 9 C) 33 D) 34 E) 66

29 Un número primo es considera “raro” si es, o bien un número de una sola cifra, o si teniendo dos o más cifras, los dos números obtenidos al quitar su primera o su última cifra son también “raros”. ¿Cuántos números primos raros hay?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 11

30 Se define una sucesión de enteros mediante: $a_0=1, a_1=2$, $a_{n+2}=a_n+\left(a_{n+1}\right)^2$ (si $n\geq 2$)
El resto de la división de a_{2009} entre 7 es:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 5 E) 6