



XVII CONCURSO CANGURO MATEMÁTICO 2010



Nivel 6 (2º de Bachillerato)

Día 23 de marzo de 2010. Tiempo : 1 hora y 15 minutos

No se permite el uso de calculadoras. Hay una única respuesta correcta para cada pregunta. Cada pregunta mal contestada se penaliza con 1/4 de los puntos que le corresponderían si fuera correcta. Las preguntas no contestadas no se puntúan ni se penalizan. Inicialmente tienes 30 puntos.

Las preguntas 1 a 10 valen 3 puntos cada una.

1 Si las dos filas que se muestran tienen la misma suma, ¿qué número está representado por *?

| | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 2010 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | * |

- A) 1010 B) 1020 C) 1990 D) 1910 E) 2020

2 Dos cubos vacíos tienen bases de áreas 1 dm^2 y 4 dm^2 , respectivamente. Queremos usar el cubo menor para buscar agua en la fuente y llenar el cubo mayor. ¿Cuántas veces tendremos que ir a la fuente?

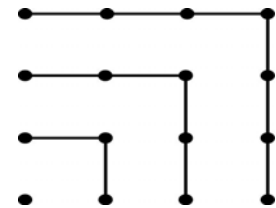
- A) 2 veces B) 4 veces C) 6 veces D) 8 veces E) 16 veces

2 Del total de puntos posibles de una prueba, Lucas consiguió el 85% y Rodrigo el 90%. Si Rodrigo tuvo un punto más que Lucas, ¿cuál es la máxima puntuación posible en esta prueba?

- A) 5 B) 17 C) 18 D) 20 E) 25

3 Observando la figura, podemos comprobar que $1+3+5+7 = 4 \times 4$.
¿Cuál es el valor de $1+3+5+7+\dots+17+19+21$?

- A) 10×10 B) 14×14 C) 12×12 D) 11×11 E) 13×13



4 ¿Cuántos números enteros positivos formados por cuatro cifras impares son divisibles por cinco?

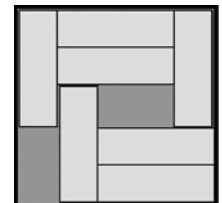
- A) 900 B) 625 C) 250 D) 125 E) 100

5 El director de la compañía dice: "Todos nuestros empleados tienen por lo menos 25 años". Más tarde se supo que eso no era verdad. Esto significa que

- (A) todos los empleados de la compañía tienen exactamente 25 años
 (B) todos los empleados de la compañía tienen más de 26 años
 (C) ninguno de los empleados ya tiene 25 años
 (D) algún empleado de la compañía tiene menos de 25 años
 (E) algún empleado de la compañía tiene exactamente 26 años

6 Siete piezas de $3\text{cm} \times 1\text{cm}$ se colocan en una caja de $5\text{cm} \times 5\text{cm}$. Se pueden deslizar las piezas en la caja, de modo que haya espacio para una pieza más. ¿Cómo mínimo, cuántas piezas hay que mover?

- A) 2 B) 4 C) 3 D) 5 E) imposible saberlo



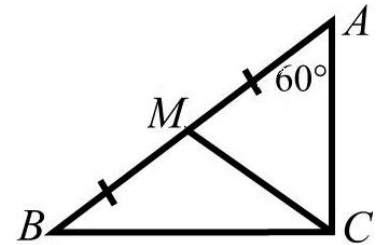
7 ¿Cuál de los números siguientes puede ser igual al número de aristas de algún prisma?

- A) 100 B) 200 C) 2008 D) 2009 E) 2010

8

El triángulo ABC es rectángulo en C , M es el punto medio de la hipotenusa AB y $\hat{A} = 60^\circ$. ¿Cuál es la medida del ángulo \hat{BMC} ?

- A) 105° B) 108° C) 110° D) 120° E) 125°



9

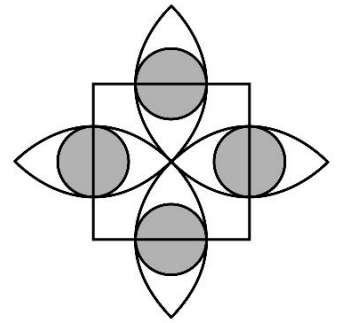
¿Cuántos números enteros positivos de 2 cifras xy son tales que las cifras x e y tienen la propiedad $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 0$?

- A) 1 B) 2 C) 6 D) 32 E) ninguno

10

En el dibujo, el lado del cuadrado mide 2, las semicircunferencias pasan por el centro del cuadrado y tienen sus centros en los vértices del cuadrado. Los círculos grises tienen sus centros sobre los lados del cuadrado y son tangentes a las semicircunferencias. ¿Cuánto vale la suma de las áreas grises?

- A) $4(3-2\sqrt{2})\pi$ B) $\sqrt{2}\pi$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$ D) π E) $\frac{1}{4}\pi$



Las preguntas 11 a 20 valen 4 puntos cada una

11

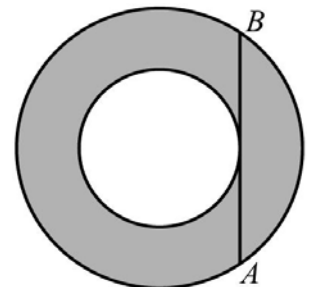
Los tres números $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[9]{7}$ son términos consecutivos de una progresión geométrica. El término siguiente de esa progresión es

- A) $\sqrt[5]{7}$ B) $\sqrt[12]{7}$ C) $\sqrt[10]{7}$ D) $\sqrt[9]{7}$ E) 1

12

En el dibujo, la cuerda \overline{AB} es tangente a la circunferencia concéntrica de menor radio. Si $AB = 16$, ¿cuál es el área de la región gris?

- A) 32π B) 63π C) 64π D) $32\pi^2$ E) 256π



13

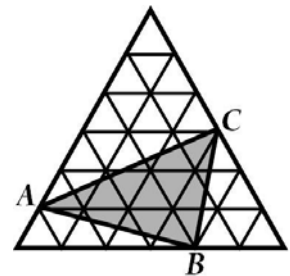
Los números enteros x e y satisfacen la ecuación $2x = 5y$. Solamente uno de los números siguientes es igual a la suma $x + y$. ¿Cuál es?

- A) 2007 B) 2008 C) 2009 D) 2010 E) 2011

14

En la figura, el triángulo grande es equilátero y consta de 36 triángulos equiláteros más pequeños, de área 1 cm^2 cada uno. ¿Cuál es el área del triángulo ABC ?

- A) 10 cm^2 B) 11 cm^2 C) 12 cm^2 D) 14 cm^2 E) 15 cm^2

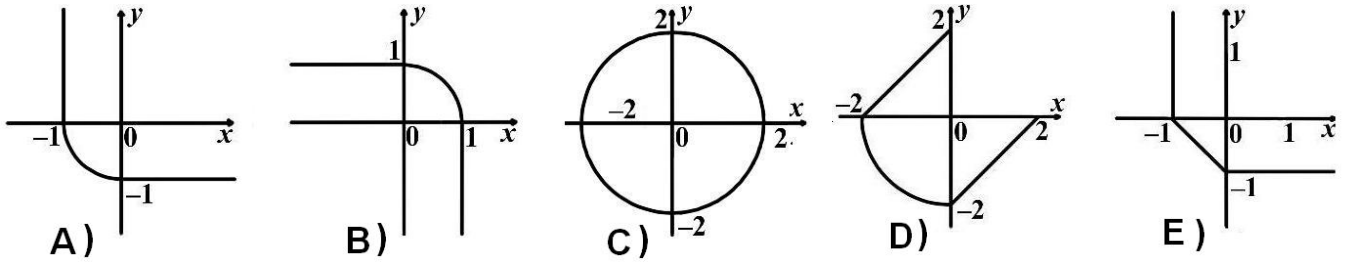


15

En una bolsa hay solo bolas azules, rojas y verdes, al menos una de cada uno de esos tres colores. Sabemos que, si retiramos cinco bolas de la bolsa sin verlas, con certeza dos serán rojas y al menos tres tendrán el mismo color. ¿Cuántas bolas azules hay en la bolsa?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) imposible saberlo sin más información

16 ¿Cuál de los gráficos siguientes representa el conjunto de las soluciones de la ecuación $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$?



17 ¿Cuántos triángulos rectángulos pueden formarse uniendo tres vértices cualesquiera de un polígono regular de 14 lados?

- A) 42 B) 84 C) 88 D) 98 E) 168

18 Cada signo * en la expresión $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10$ se sustituye por un signo “más” (+) o por un signo “por” (×), obteniéndose una expresión aritmética cuyo mayor valor posible es N . ¿Cuál es el menor divisor primo de N ?

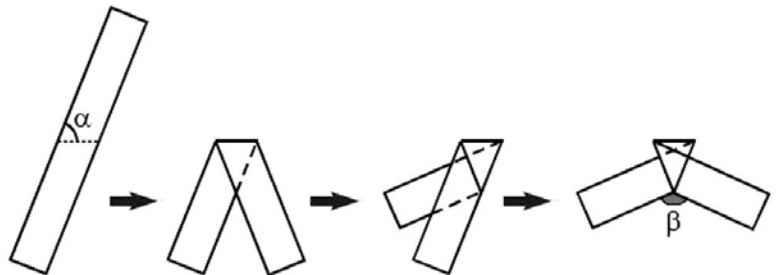
- A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) un número distinto de los anteriores

19 Los lados de un triángulo tienen como medidas los enteros positivos 13, x e y . Si $xy = 105$, ¿cuál es el perímetro del triángulo?

- A) 35 B) 39 C) 51 D) 69 E) 119

20 Una tira de papel se dobla tres veces como se ve en la figura. Si $\alpha = 70^\circ$, ¿cuánto vale β ?

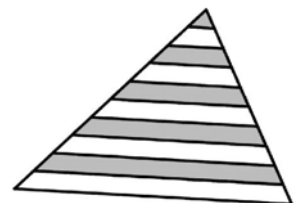
- A) 100° B) 110° C) 120°
D) 130° E) 140°



Las preguntas 21 a 30 valen 5 puntos cada una

21 Los segmentos paralelos a la base dividen cada uno de los otros dos lados en 10 segmentos iguales. ¿Qué porcentaje del área del triángulo es gris?

- A) 41,75% B) 45% C) 42,5 % D) 46% E) 47,5%



22 En una carrera con 100 corredores, no hubo dos que llegaran al mismo tiempo y, al ser preguntados en qué lugar llegaron, respondieron con números que variaban de 1 a 100. Pero la suma de los números dados en esas respuestas fue 4000. ¿Cuál es el menor número posible de corredores que mintieron al ser preguntados?

- A) 12 B) 13 C) 11 D) 10 E) 9

23 Se lanza un dado tres veces. Si el número de puntos obtenido en el tercer lanzamiento es igual a la suma de los dos números de puntos obtenidos en los lanzamientos anteriores, ¿cuál es la probabilidad de que el 2 haya aparecido al menos una vez?

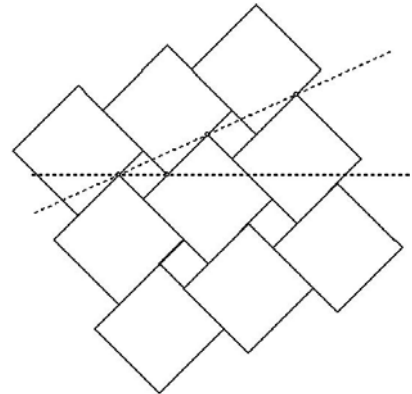
- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{91}{216}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{8}{15}$ E) $\frac{7}{12}$

24 El código de barras mostrado se compone de franjas blancas y negras alternadas, siendo negras las de los extremos. Cada una de las franjas, blanca o negra, tiene anchura 1 ó 2 y el ancho total del código es 12. ¿Cuántos códigos de barras diferentes, en esas condiciones, leídos de izquierda a derecha, es posible construir?



- A) 12 B) 24 C) 66 D) 132 E) 116

25 Un piso se recubre con baldosas cuadradas de dos tamaños diferentes, conforme se ve en la figura. Los lados de esos cuadrados son, respectivamente, a y b , siendo $a > b$. Si las líneas de puntos trazadas en la figura forman un ángulo de 30° , ¿cuál es la razón $a : b$?



- A) $2\sqrt{3} : 1$ B) $(3 + \sqrt{2}) : 1$ C) $(2 + \sqrt{3}) : 1$
 D) $3\sqrt{2} : 1$ E) $2 : 1$

26 La profesora escribió 10 veces cada uno de los números naturales de 1 a 10 en el encerado y pidió a los alumnos que hicieran lo siguiente: uno de ellos borra dos de los números y escribe la suma de ambos disminuida en uno; el siguiente borra dos de los números restantes y hace lo mismo. El tercero repite la operación, y así sucesivamente, hasta que queda un único número. ¿Cuál es ese número?

- A) un número menor que 400 B) 451 C) 460 D) 488 E) un número mayor que 500

27 El valor de la expresión $\frac{(2+3)(2^2+3^2)\dots(2^{1024}+3^{1024})(2^{2048}+3^{2048})+2^{4096}}{3^{2048}}$ es

- A) 2^{2048} B) 2^{4096} C) 3^{4096} D) 3^{2048} E) $3^{2048} + 2^{2048}$

28 La raíz cuadrada del número $0,\underbrace{44\dots4}_{100 \text{ veces}}$ se escribe en forma decimal. ¿Cuál es la 100ª cifra detrás de la coma?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

29 Sea $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $2.f(x) + 3.f\left(\frac{2010}{x}\right) = 5x$ Entonces $f(6) = \dots$

- A) 1 B) 923 C) 993 D) 1013 E) 2009

30 Los puntos P y Q pertenecen, respectivamente, a los catetos de medidas a y b de un triángulo rectángulo. Si K y H son los pies de las perpendiculares trazadas desde P y Q , respectivamente, sobre la hipotenusa, ¿cuál es el menor valor de la suma $KP + PQ + QH$?

- A) $a + b$ B) $\frac{2ab}{a+b}$ C) $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ D) $\frac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ E) $\frac{(a+b)^2}{2ab}$