



XIX CONCURSO CANGURO MATEMÁTICO 2012



Nivel 6 (2º de Bachillerato)

Día 15 de marzo de 2012. Tiempo : 1 hora y 15 minutos

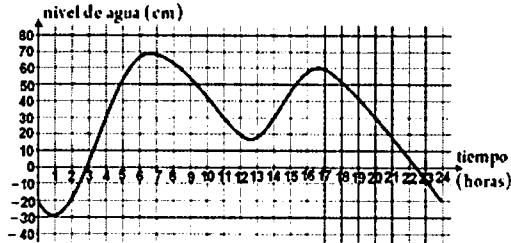
No se permite el uso de calculadoras. Hay una única respuesta correcta para cada pregunta. Cada pregunta mal contestada se penaliza con 1/4 de los puntos que le corresponderían si fuera correcta. Las preguntas no contestadas no se puntúan ni se penalizan. Inicialmente tienes 30 puntos.

Las preguntas 1 a 10 valen 3 puntos cada una.

1

La gráfica muestra las subidas y bajadas del nivel del agua en un puerto a lo largo de un día. ¿Durante cuántas horas ese nivel se mantuvo por encima de 30 cm?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 13



2

El número $\sqrt{2\sqrt{2}}$ es igual a:

- A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt[4]{4}$ D) $\sqrt[4]{2}$ E) 2

3

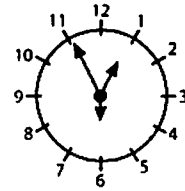
En una lista de cinco números, el primer número es 2 y el último 12. El producto de los tres primeros números es 30, el producto de los tres centrales es 90 y el producto de los tres últimos es 360. ¿Qué número está escrito en el centro de la lista?



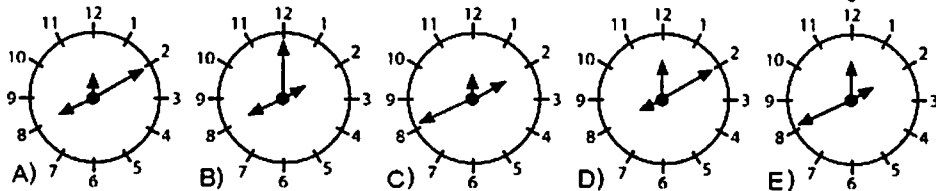
- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 10

4

Un reloj tiene tres agujas de diferente longitud (horaria, minutera y segundera). Se sabe que el reloj funciona correctamente. A las 12:55:30 las agujas están en las posiciones que aparecen en la figura de la derecha.

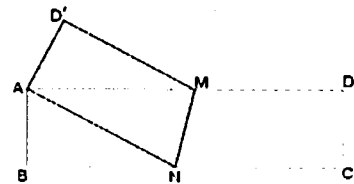


¿Cuál de las cinco siguientes mostrará el reloj a las 8:10:00?



5

Un rectángulo ABCD que mide 4cm x 16 cm se dobla a lo largo del segmento MN, como se ve en la figura, de manera que el vértice C coincide con A. ¿Cuál es el área, en cm², del cuadrilátero ANMD?



- A) 28 B) 30 C) 32 D) 48 E) 56.

6

La suma de las cifras de un número de nueve cifras es 8. ¿Cuánto vale el producto de esas cifras?

- A) 0 B) 1 C) 8 D) 9 E) 9!

7

El máximo valor del entero n, para el cual $n^{200} < 5^{300}$, es:

- A) 5 B) 6 C) 8 D) 11 E) 12

8

¿Cuál de las siguientes funciones satisface la ecuación $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$?

- A) $f(x) = \frac{2}{x}$ B) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ C) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ D) $f(x) = \frac{1}{x}$ E) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

9

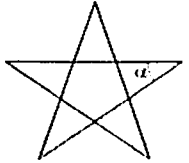
Un número real x verifica $x^3 < 64 < x^2$. ¿Cuál de las siguientes desigualdades es correcta?

- A) $0 < x < 64$ B) $-8 < x < 4$ C) $x > 8$ D) $-4 < x < 8$ E) $x < -8$

10

En el pentágono regular estrellado de la figura, cuánto vale el ángulo α ?

- A) 24° B) 30° C) 36° D) 45° E) 72°



Las preguntas 11 a 20 valen 4 puntos cada una

11

Mi edad es un número de 2 cifras, potencia de 5, y la de mi primo es un número de 2 cifras, potencia de 2. La suma de las cifras de nuestras edades es un número impar. ¿Cuál es el producto de las cifras de nuestras edades?

- A) 240 B) 2010 C) 60 D) 50 E) 300

12

Una agencia de viajes organiza cuatro excursiones opcionales a un grupo de turistas. La tasa de participación en cada una es del 80%. ¿Cuál es el menor porcentaje posible de los turistas que hacen las cuatro excursiones?

- A) 80% B) 60% C) 40% D) 20% E) 16%

13

El conjunto de soluciones de la desigualdad $|x| + |x-3| > 3$ es:

- A) $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ B) $(-3, 3)$ C) $(-\infty, -3)$ D) $(-3, +\infty)$ E) todos los números reales

14

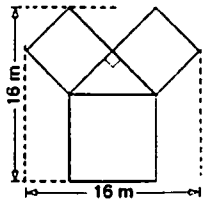
En Eslovaquia, las puntuaciones escolares van de 1 (la mejor) a 5. En una escuela eslovaca, un examen no resultó muy bien. La puntuación promedio fue 4. Los chicos lo hicieron un poco mejor, con un promedio del 3,6, mientras que las chicas lo hicieron un poco peor, con un promedio de 4,2. ¿Cuál de las siguientes frases es cierta?

- A) Hay el doble de chicos que de chicas. B) Hay 4 veces más chicos que chicas. C) Hay el doble de chicas que de chicos. D) Hay 4 veces más chicas que chicos. E) Hay tantos chicos como chicas.

15

La figura muestra un jardín cuadrado de lado 16 m, con plantaciones de rosas. Las rosas blancas están en los dos cuadrados iguales, y las rojas en el tercer cuadrado. Las rosas amarillas están en el triángulo. ¿Cuánto vale el área plantada con rosas?

- A) 114 m² B) 130 m² C) 144 m² D) 160 m² E) 186 m²



16

Se han vendido todas las entradas de la primera fila de un cine. Los asientos están numerados consecutivamente, empezando en el 1. Por error se vende una entrada duplicada de esta fila. La suma de los números de los asientos en todas las entradas vendidas en dicha fila es 857. ¿Cuál es el número de asiento del que se han vendido las dos entradas?

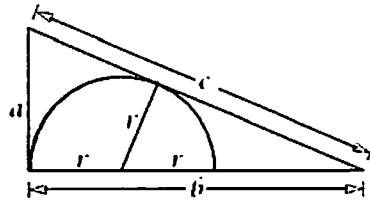
- A) 4 B) 16 C) 25 D) 37 E) 42

17

Los catetos del triángulo rectángulo de la figura miden a y b , y la hipotenusa mide c .

El radio, r , del semicírculo inscrito vale

- A) $\frac{a(c-a)}{2b}$ B) $\frac{ab}{a+b+c}$ C) $\frac{ab}{b+c}$
 D) $\frac{2ab}{a+b+c}$ E) $\frac{ab}{a+c}$



18

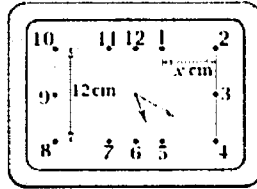
Un cuadrado ABCD tiene sus lados de longitud 2. Los puntos E y F son los puntos medios de los lados AB y AD, respectivamente. Sea G es un punto de CF tal que $3 \cdot \overline{CG} = 2 \cdot \overline{GF}$. El área del triángulo BEG es

- A) $\frac{7}{10}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{8}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{6}{5}$

19

El reloj de la figura tiene forma rectangular, pero cada una de sus agujas se mueve a velocidad constante, como en un reloj circular. La distancia entre los números 8 y 10 es 12 cm, y la distancia entre 1 y 2 es x cm. ¿Cuánto vale x ?

- A) $3\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$ D) $2 + \sqrt{3}$ E) $12 - 3\sqrt{3}$



20

El Canguro quiere construir un fila de dados pegando las caras que tengan el mismo número de puntos (la suma de puntos en caras opuestas es 7). Querría que la suma de los puntos en las caras exteriores de los dados de la fila fuera 2012. ¿Cuántos dados tiene que pegar?

- A) 70 B) 71 C) 142 D) 143 E) Es imposible que sumen 2012



Las preguntas 21 a 30 valen 5 puntos cada una

21

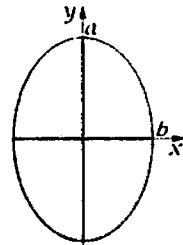
¿Cuál es el menor valor posible de un ángulo del triángulo isósceles ABC tal que una de sus medianas divide al triángulo en dos triángulos isósceles?

- A) 15° B) $22,5^\circ$ C) 30° D) 36° E) 45°

22

Supongamos que $a > b$. Si la elipse de la figura gira 360° alrededor del eje x , se obtiene un elipsoide E_x cuyo volumen denotamos $\text{Vol}(E_x)$. Si la elipse gira 360° en torno al eje y , se obtiene un elipsoide E_y de volumen $\text{Vol}(E_y)$. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

- A) $E_x = E_y$; y $\text{Vol}(E_x) = \text{Vol}(E_y)$
 B) $E_x = E_y$ pero $\text{Vol}(E_x)$ es distinto de $\text{Vol}(E_y)$
 C) Los elipsoides son distintos y $\text{Vol}(E_x) > \text{Vol}(E_y)$
 D) Los elipsoides son distintos y $\text{Vol}(E_x) < \text{Vol}(E_y)$
 E) Los elipsoides son distintos, pero sus volúmenes son iguales



23

Se consideran las dos operaciones siguientes que se pueden realizar en una fracción:

- sumarle 8 al numerador;
- sumarle 7 al denominador.

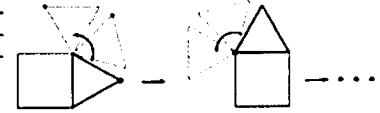
Cuando se realiza un total de n de tales operaciones, en algún orden, empezando con la fracción $\frac{7}{8}$, se llega a una fracción del mismo valor. ¿Cuál es el menor valor posible de n ?

- A) 56 B) 81 C) 109 D) 113 E) Es imposible

24

Un triángulo equilátero rueda sin deslizar alrededor de un cuadrado de lado 1, como se indica en la figura. ¿Cuál es la longitud del camino recorrido por el punto marcado cuando el triángulo y el punto vuelven a su posición inicial por primera vez?

- A) 4π B) $\frac{28}{3}\pi$ C) 8π D) $\frac{14}{3}\pi$ E) $\frac{21}{2}\pi$



25

¿Cuántas permutaciones (x_1, x_2, x_3, x_4) del conjunto de enteros $\{1,2,3,4\}$ tienen la propiedad de que la suma $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$ sea divisible por 3?

- A) 8 B) 12 C) 14 D) 16 E) 24

26

Después de una clase, en el encerado queda una figura formada por la gráfica de la función $y = x^2$ y 2012 rectas paralelas a la recta $y = x$, cada una de las cuales corta a la parábola en dos puntos. La suma de las abscisas de los puntos de intersección de las rectas y la parábola es:

- A) 0 B) 1 C) 1006 D) 2012 E) Imposible determinarlo

27

Tres vértices de un cubo (no situados los tres en la misma cara) son $P(3, 4, 1)$, $Q(5, 2, 9)$ y $R(1, 6, 5)$. ¿Cuál de los siguientes puntos es el centro del cubo?

- A) (4, 3, 5) B) (2, 5, 3) C) (3, 4, 7) D) (3, 4, 5) E) (2, 3, 5)

28

En la sucesión $1, 1, 0, 1, -1, \dots$ los dos primeros términos son $a_1 = a_2 = 1$. El tercero es la diferencia entre los dos anteriores: $a_3 = a_1 - a_2$. El cuarto es la suma de los dos anteriores: $a_4 = a_2 + a_3$. A continuación, $a_5 = a_3 - a_4$; $a_6 = a_4 + a_5$, y así sucesivamente. ¿Cuánto vale la suma de los primeros 100 términos de esta sucesión?

- A) 0 B) 3 C) -21 D) 100 E) -1

29

Juana elige dos números a y b del conjunto $\{1,2,3,\dots,26\}$. El producto ab es igual a la suma de los restantes 24 números. ¿Cuánto vale, en valor absoluto, la diferencia entre a y b ?

- A) 10 B) 9 C) 7 D) 2 E) 6

30

Los gatos del país de las Maravillas son cuerdos o locos. Si un gato cuerdo está en una habitación con tres gatos locos, se vuelve loco. Si un gato loco está en una habitación con tres gatos cuerdos, éstos reconocen que está loco. Tres gatos entran sucesivamente en una habitación vacía. Al cabo de un tiempo, entra un cuarto gato y sale el primero. Después, entra un quinto y sale el segundo, y así sucesivamente. Cuando entra el gato que hace el número 2012, descubren por primera vez que hay un gato loco en la habitación. ¿Cuál de las siguientes parejas de gatos se habrían vuelto locos después de entrar en la habitación?

- A) El 1° y el 2011° B) El 2° y el 2010° C) El 3° y el 2009°
 D) El 4° y el 2012° E) El 2° y el 2011°