



XIX CONCURSO CANGURO MATEMÁTICO 2012



Nivel 4 (4° de E.S.O.)

Día 15 de marzo de 2012. Tiempo : 1 hora y 15 minutos

No se permite el uso de calculadoras. Hay una única respuesta correcta para cada pregunta. Cada pregunta mal contestada se penaliza con 1/4 de los puntos que la corresponderían si fuera correcta. Las preguntas no contestadas no se puntúan ni se penalizan. Inicialmente tienes 30 puntos.

Las preguntas 1 a 10 valen 3 puntos cada una.

1 El 3 de marzo de 2010, Enrique celebró dos acontecimientos: era el día de su 72° cumpleaños y hace exactamente 34 años que dejó de fumar. ¿Qué año celebró o celebrará que ha estado sin fumar la mitad de sus años de vida?

- A) 2006 B) 2008 C) 2012 D) 2014 E) 2016

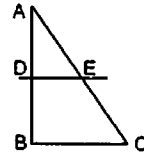
2 El número de enteros positivos n tales que $\frac{2012}{n+3}$ es entero, es igual a

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 2012

3 Se considera un cubo. ¿Cuántos triángulos equiláteros hay, cuyos vértices sean vértices del cubo?

- A) 6 B) 8 C) 12 D) 24 E) otra respuesta

4 El triángulo ABC de la figura es rectángulo en B; $\overline{AB} = 12$ y $\overline{AC} = 20$. Si D es el punto medio de \overline{AB} y la recta DE es paralela a la BC, entonces \overline{DE} mide

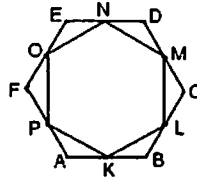


- A) 10 B) 8 C) 6 D) 5 E) 12

5 Para ir del guardarropa a la oficina hay que atravesar 8 puertas. Cinco personas (A,B,C,D y E colocadas en orden alfabético) van en fila del guardarropa a la oficina. En su camino, cada puerta es abierta por la primera persona de la fila, que deja pasar a sus cuatro colegas y a continuación cierra la puerta, pasando a ser el último de la fila. ¿Quién abre la última puerta?

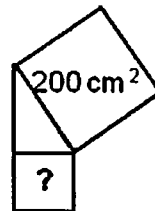
- A) A B) B C) C D) D E) E

6 ABCDEF es un hexágono regular de lado 2. KLMNOP es el hexágono cuyos vértices son los puntos medios de los lados del primero. ¿Cuánto mide el segmento KL?



- A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) 1 C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

7 Calcular el área del cuadrado gris de la figura, sabiendo que el cateto más largo del triángulo rectángulo mide 12 cm y el área del cuadrado grande es 200 cm².



- A) 160 B) 144 C) 560 D) 56 E) 23

8 El profesor les pide a Ana, Beatriz y Carlos que encuentren tres enteros positivos, M, N y P tales que $2012 = M^3 + N^2 + P$. Ana encuentra el mayor valor posible de M. A continuación, Beatriz encuentra el mayor valor posible de N, teniendo en cuenta el número que halló Ana. ¿Cuál es el valor de P que contestará Carlos, teniendo en cuenta los números hallados por sus compañeras?

- A) 1 B) 5 C) 11 D) 19 E) 28

9 En un triángulo, la medida de su área está expresada por un número, que es igual al que mide su perímetro. Entonces, el radio del círculo inscrito en el triángulo verifica

- A) $r \leq 1$ B) $r = \frac{3}{2}$ C) $r = 2$ D) $2 < r$ E) r depende del valor del área

10 Un ciclista y un motorista hacen el mismo recorrido, comenzando simultáneamente. La velocidad media del ciclista es 20 km/h y el motorista 30 km/h. El ciclista llega 1 h más tarde que el motorista. ¿Qué distancia han recorrido?

- A) 30 km B) 45 km C) 50 km D) 60 km E) No se puede saber

Las preguntas 11 a 20 valen 4 puntos cada una.

11 Los números 1, 3, 13 y 31 son considerados *atractivos* por un aritmético maniático. Para que 1310 sea también atractivo, ha de expresarse como una suma de números atractivos. ¿Cuántos sumandos, como mínimo, tendrá esa suma?

- A) 43 B) 44 C) 45 D) 46 E) 1310 nunca será atractivo

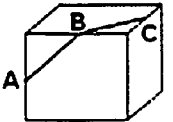
12 Sean $a = 1 + \frac{1}{2}$; $b = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$; $c = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$. ¿Cuál de las siguientes relaciones es correcta:

- A) $a < b < c$ B) $b < c < a$ C) $c < b < a$ D) $a < c < b$ E) $b < a < c$

13 De los cuatro enteros a, b, c y d se sabe que el producto abc es divisible por 9, pero no por 27; que el producto bcd es divisible por 3 pero no por 9, y que el producto acd es divisible por 9 pero no por 27. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es cierta?

- A) a es divisible por 9 B) a no es divisible por 3 C) d es divisible por 3
D) c no es divisible por 3 E) Ninguna de las anteriores es cierta

14 Calcular el ángulo ABC si A, B y C son los puntos medios de las aristas del cubo que se muestran en la figura

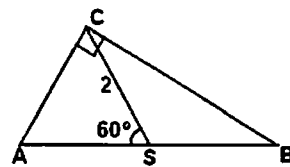


- A) 75° B) 90° C) 105° D) 120° E) 135°

15 Hallar el mayor número de signos más que hay que cambiar por signos menos en la suma $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$ para que la expresión resultante sea 5025 (el signo + delante del primer sumando, usualmente no se escribe, pero está ahí).

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) No es posible hacerlo

- 16 S es el punto medio de la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC. El segmento SC mide 2 y el ángulo $\angle ASC$ es de 60° .
¿Cuánto vale el área del triángulo ABC?



- A) $\frac{7}{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $11/3$ D) $3\sqrt{3}$ E) Otra respuesta

- 17 La suma de las longitudes de todas las aristas de un ortoedro es 48 cm, y su área total es 96 cm^2 . Su volumen, en cm^3 , es

- A) 36 B) 54 C) 64 D) 48 E) 72

- 18 En el torneo de lucha de los Juegos Olímpicos, el que pierde es eliminado. ¿Cuántos luchadores han participado, si después de la competición ha habido 32 participantes que han ganado más combates que los que han perdido?

- A) 64 B) 96 C) 128 D) 192 E) 256

- 19 Sean $x > 0$ e $y < 0$. ¿Qué es seguro que suceda si aumentamos x y disminuimos y ?

- A) $x - y$ disminuye B) xy aumenta C) $\frac{x}{y}$ disminuye D) $\frac{y}{x}$ disminuye E) $\frac{x \cdot y}{|x \cdot y|}$ no cambia

- 20 Entre los números 1, 2, 3, ..., 9 ¿cuál debe ser retirado para que el mínimo común múltiplo de los restantes sea el menor posible?

- A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

Las preguntas 21 a 30 valen 5 puntos cada una

- 21 Con 56 esferas iguales formamos un montón en forma de tetraedro regular. ¿Cuántos puntos de tangencia hay entre las esferas del montón?

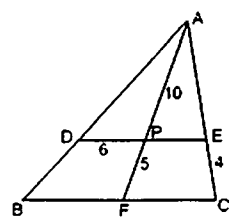
- A) 105 B) 120 C) 168 D) 210 E) 336

- 22 En cada una de las fracciones siguientes $\frac{1}{2012}, \frac{2}{2011}, \frac{3}{2010}, \dots, \frac{2011}{2}, \frac{2012}{1}$, la suma del numerador y el denominador vale 2013.

¿Cuántas fracciones propias (con el numerador menor que el denominador) e irreducibles hay en ese conjunto?

- A) 564 B) 600 C) 671 D) 1006 E) 2012

- 23 En el triángulo ABC, D es un punto de \overline{AB} , E es un punto de \overline{AC} , F es el punto medio de \overline{BC} . Las rectas DE y BC son paralelas. P es el punto de intersección de las recta AF y DE. Sabiendo que $DP = 6$, $PF = 5$, $EC = 4$ y $AP = 10$, calcular la longitud del segmento \overline{AB} .



- A) $2\sqrt{117}$ B) 15 C) 16 D) 18 E) $\sqrt{364}$

- 24 El Canguro se enfrenta a un monstruo de n cabezas. Si le corta 2 cabezas y le queda por lo menos 1, inmediatamente el monstruo tiene 4 cabezas más. Cuando el número de cabezas del monstruo es múltiplo de 3, el Canguro puede quemarle $2/3$ de las cabezas, y ya no le crecen más. Si en algún momento el monstruo tiene exactamente 1 cabeza, o más de 100, se convierte en invencible. ¿Para cuántos valores de n , entre 1 y 100, tiene el Canguro la posibilidad de matar al monstruo?

- A) 1 B) 33 C) 48 D) 50 E) 100

- 25 La suma de dos números naturales a y b es igual a 125. ¿Cuál de las siguientes relaciones puede ser cierta, para algún valor natural de k ?

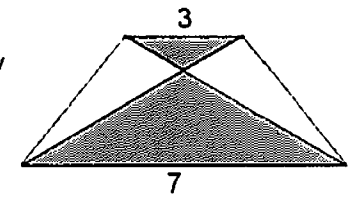
- A) $2^a \times 3^b = 12^k$ B) $2^a \times 3^b = 18^k$ C) $2^a \times 3^b = 36^k$
D) $2^a \times 3^b = 72^k$ E) ninguna de las anteriores

- 26 Si n es un entero positivo, hallar el menor número posible de divisores primos de $1 + 2^n + 3^n$.

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

- 27 Un trapecio isósceles tiene lados paralelos de longitudes 3 y 7. ¿Qué porcentaje del área del trapecio es la parte blanca?

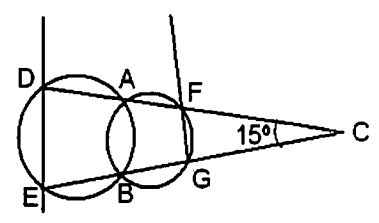
- A) 35 B) 38 C) 40 D) 41 E) 42



- 28 Calcular el valor de $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 99)(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 49 \cdot 50)}$

- A) 1 B) 100 C) $52 \cdot 54 \cdot \dots \cdot 98 \cdot 100$ D) 2^{50} E) $\frac{1}{98}$

- 29 Dos circunferencias se cortan en los puntos A y B. Se traza una recta por A y otra por B que se cortan en C formando un ángulo de 15° . La recta por A corta a los dos círculos en D y F, y la recta por B, en E y G, como se ve en la figura. ¿Qué ángulo forman las rectas DE y FG?



- A) 10° B) 15° C) 20°
D) 30° E) Son paralelas

- 30 Marcos y Elisa disponen de capitales iguales y planean invertirlos en el banco, a interés compuesto (la ganancia se añade al capital al final de cada año). Marcos elige una tasa fija del 2% anual. Lisa, una variable: del 1% el primer año, del 2% el segundo, del 3% el tercero, y así sucesivamente. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdad?

- A) En 3 años, Marcos gana más dinero B) En 3 años ambos ganan lo mismo
C) En 4 años, Marcos gana más dinero D) En 2 años, Elisa gana más dinero
E) la mayor ganancia depende del dinero invertido.