



XX CONCURSO CANGURO MATEMÁTICO 2013



Nivel 6 (2º de Bachillerato)

Día 21 de marzo de 2013 Tiempo : 1 hora y 15 minutos

No se permite el uso de calculadoras. Hay una única respuesta correcta para cada pregunta. Cada pregunta mal contestada se penaliza con 1/4 de los puntos que le corresponderían si fuera correcta. Las preguntas no contestadas no se puntúan ni se penalizan. Inicialmente tienes 30 puntos.

Las preguntas 1 a 10 valen 3 puntos cada una.

1

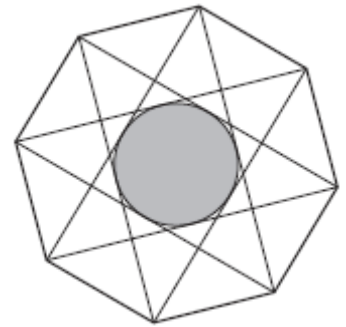
¿Cuál de los siguientes números es mayor?

- A) 2013 B) 2^{0+13} C) 20^{13} D) 201^3 E) 20×13

2

El lado del octógono regular grande de la figura mide 10 cm. ¿Cuánto mide el radio del círculo gris de la figura?

- A) 10 B) 7,5 C) 5 D) 2,5 E) 2



3

Un prisma tiene, en total, 2013 caras. ¿Cuántas aristas tiene?

- A) 2011 B) 2013 C) 4022 D) 4024 E) 6033

4

La raíz cúbica de 3^{3^3} es igual a

- A) 3^3 B) 3^{3^3-1} C) 3^{2^3} D) 3^{3^2} E) $(\sqrt{3})^3$

5

El año 2013 tiene la propiedad de que su número está formado por las cifras consecutivas 0, 1, 2, y 3. ¿Cuántos años han pasado desde la última vez que el número del año estuvo formado por cuatro cifras consecutivas?

- A) 467 B) 527 C) 581 D) 693 E) 990

6

Sea f una función lineal tal que $f(2013) - f(2001) = 100$. ¿Cuánto vale $f(2031) - f(2013)$?

- A) 75 B) 100 C) 120 D) 150 E) 180

7

Sabiendo que $2 < x < 3$, de las siguientes cuatro desigualdades ¿cuántas son ciertas?

$$4 < x^2 < 9 ; \quad 4 < 2x < 9 ; \quad 6 < 3x < 9 ; \quad 0 < x^2 - 2x < 3$$

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

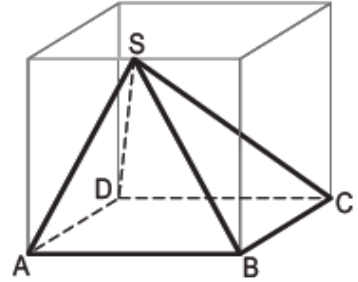
8

Seis superhéroes capturan a 20 villanos. El primer superhéroe captura 1, el segundo captura 2 y el tercero captura 3. El cuarto superhéroe captura más villanos que cualquiera de los otros 5 superhéroes. ¿Cuál es el menor número de villanos que debe haber capturado?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

9

En el cubo transparente de la figura se ve una pirámide no transparente ABCDS, de base ABCD, cuyo vértice S esta exactamente en el punto medio de una arista del cubo. Si se mira esta pirámide desde arriba, desde abajo, desde detrás, desde delante, desde la derecha y desde la izquierda. ¿Cuál de las siguientes vistas es imposible que se vea?



- A)
- B)
- C)
- D)
- E)

10

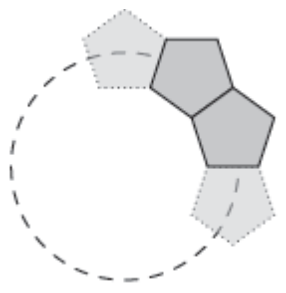
Cuando una cierta sustancia se derrite, su volumen se incrementa en $\frac{1}{12}$. ¿Cuánto decrece su volumen si se vuelve a solidificar?

- A) $\frac{1}{10}$
- B) $\frac{1}{11}$
- C) $\frac{1}{12}$
- D) $\frac{1}{13}$
- E) $\frac{1}{14}$

Las preguntas 11 a 20 valen 4 puntos cada una

11

Ramón tiene piezas de plástico iguales, con la forma de un pentágono regular. Las va disponiendo en círculo, como en la figura. ¿Cuántas piezas necesita para cerrar el círculo?



- A) 8
- B) 9
- C) 10
- D) 12
- E) 15

12

¿Cuántos enteros positivos n hay, tales que tanto $n/3$ como $3n$ sean números de tres cifras?

- A) 12
- B) 33
- C) 34
- D) 100
- E) 300

13

Una alfombra circular se pone sobre una malla cuadriculada. Todos los cuadrados que tengan más de un punto en común con la alfombra se colorean de gris. ¿Cuál de las figuras siguientes es imposible que aparezca?

- A)
- B)
- C)
- D)
- E)

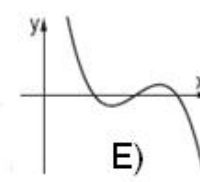
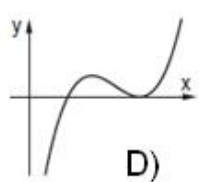
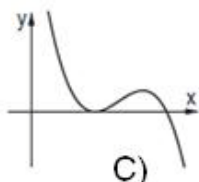
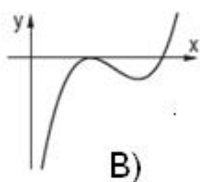
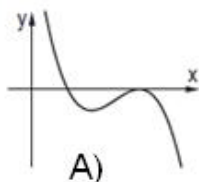
14

Se considera la siguiente proposición, relativa a una función f definida sobre el conjunto de los enteros: "Para todo x par, $f(x)$ es par". ¿Cuál de las siguientes es la negación de esta proposición?

- A) Para todo x par, $f(x)$ es impar
- B) para todo x impar, $f(x)$ es par
- C) para todo x impar, $f(x)$ es impar
- D) existe un número par x tal que $f(x)$ es impar
- E) existe un número impar x tal que $f(x)$ es impar

15

Se da la función $W(x) = (a - x)(b - x)^2$, donde $a < b$. Su gráfica es una de las siguientes. ¿Cuál es?

**16**

Se considera un rectángulo, uno de cuyos lados mide 5. El rectángulo se corta en un cuadrado y un rectángulo, de los cuales uno tiene área 4. ¿Cuántos rectángulos hay que cumplan estas condiciones?

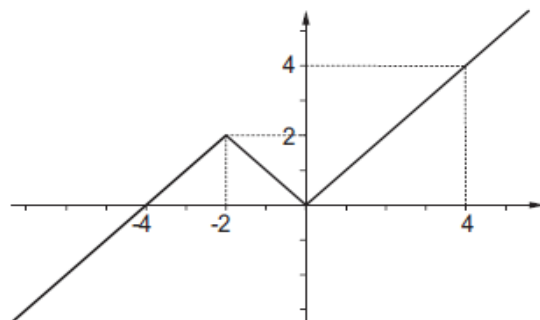
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17

Juan ha dibujado la gráfica de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, formada por dos semirrectas y un segmento, como se ve en la figura

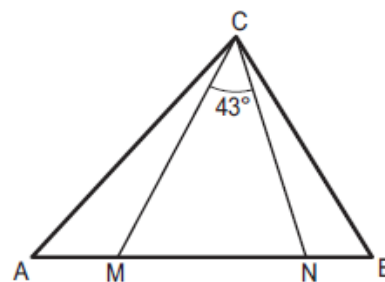
¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(f(f(x))) = 0$?

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

**18**

En el triángulo ABC los puntos M y N sobre el lado AB son tales que $AN = AC$ y $BM = BC$. Además, el ángulo MCN es de 43° , como se ve en la figura
¿Cuánto mide el ángulo ACB?

- A) 86° B) 89° C) 90° D) 92° E) 94°

**19**

¿Cuántos pares (x,y) de enteros positivos verifican $x^2y^3 = 6^{12}$?

- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) Otro valor

20

Una caja contiene 900 cartas numeradas desde 100 hasta 999. Dos cartas cualesquiera tienen números diferentes. Se eligen varias cartas y se calcula la suma de los dígitos de los números que hay en ellas. ¿Cuántas cartas, por lo menos, hay que elegir para estar seguros de que tres de las cartas tienen números cuya suma de dígitos es la misma?

- A) 51 B) 52 C) 53 D) 54 E) 55

Las preguntas 21 a 30 valen 5 puntos cada una

21

¿Cuántos pares (x, y) de enteros, con $x \leq y$, cumplen la condición de que su producto es igual a cinco veces su suma?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

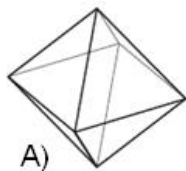
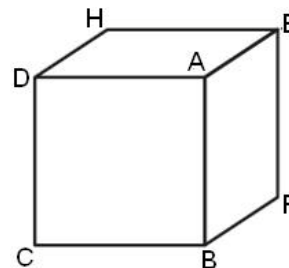
22

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por las dos propiedades siguientes: f es periódica, con período 5, y la restricción de f al intervalo $[-2, 3)$ es $x \rightarrow f(x) = x^2$. ¿Cuánto vale $f(2013)$?

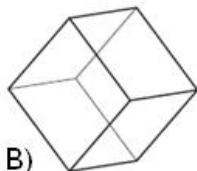
- A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 9

23

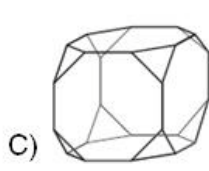
El cubo de la figura se corta por un plano que pasa por los vértices D, E y B, que son los más próximos al vértice A. Se repite esa operación con los restantes 7 vértices del cubo (es decir, se traza el plano que pasa por los tres vértices más próximos a cada uno). Uno de los trozos que quedan después de los 8 cortes contiene al centro del cubo original. ¿Qué forma tiene ese trozo?.



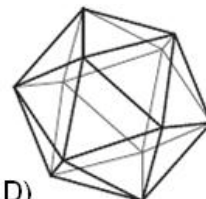
A)



B)



C)



D)

El centro del cubo pertenece a varios trozos
E)

24

¿Cuántas soluciones reales (x,y) tiene la ecuación $x^2 + y^2 = |x| + |y|$?

A) 1

B) 5

C) 8

D) 9

E) infinitas

25

Sea $\mathbf{N}_0 = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$ el conjunto de los números naturales, y $f: \mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{N}_0$ la función definida por $f(n) = \frac{n}{2}$ si n es par, y $f(n) = \frac{n-1}{2}$ si n es impar, para todo número natural n . Si k es un entero positivo, llamamos $f^k(n)$ al número representado por la expresión $f(f(\dots f(n)))$, en la que el símbolo f aparece k veces. Entonces, el número de soluciones de la ecuación $f^{2013}(n) = 1$ es:

A) 0

B) 4026

C) 2^{2012}

D) 2^{2013}

E) infinitas

26

Se dibujan varias rectas en el plano. La recta a interseca exactamente a tres rectas, y la recta b interseca exactamente a cuatro. La recta c interseca exactamente a n rectas, con $n \neq 3, 4$. Determinar el número de rectas dibujadas.

A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

E) otro número

27

La suma de los primeros n enteros positivos es un número de tres cifras iguales. ¿Cuánto vale la suma de las cifras de n ?

A) 6

B) 9

C) 12

D) 15

E) 18

28

En la Isla Encantada viven dos tipos de personas: Los Veraces, que dicen siempre la verdad, y los Embusteros, que siempre mienten. Me encuentro a dos personas que viven allí y pregunto al más alto si ambos son Veraces. Me contesta, pero de su respuesta no puedo averiguar qué son, así que pregunto al más bajo si el más alto es Veraz. Me contesta, y ahora ya puedo saber de qué tipo son. ¿Son Veraces o Embusteros?

A) Los dos son veraces

B) Los dos son Embusteros

C) El más alto es Veraz y el más bajo Embustero

D) El más alto es Embustero y el más bajo Veraz

E) No hay suficientes datos para decidir.

29

Se considera la sucesión de números definida por $a_1 = 1$; $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$, donde m y n son números naturales. El valor de a_{100} es

A) 100

B) 1000

C) 2012

D) 4950

E) 5050

30

En la rotonda de la figura entran 5 coches al mismo tiempo, cada uno por una dirección distinta. Cada uno de ellos no llega a completar una vuelta completa a la rotonda, y todos salen por direcciones distintas. ¿Cuántas combinaciones diferentes hay para que los coches dejen la rotonda?

A) 24

B) 44

C) 60

D) 81

E) 120

