MATEMÁTICAS

PRIMEIRA PARTE (Parte Común)

*(Nesta primeira parte **tódolos** alumnos deben responder a tres preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos tres bloques temáticos: Álxebra Lineal, Xeometría e Análise. A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.)*

Bloque 1 (Álxebra Lineal) (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. Ache tódalas matrices $A = (a_{ij})$, cadradas de orde tres, tales que $a_{21} = a_{32} = 0$ e $A + A^t = 4I$, sendo I a matriz identidade de orde tres e A^t a matriz trasposta de A, das que ademáis sábese que o seu determinante vale 10.

2. Discuta e interprete xeométricamente, según os diferentes valores do parámetro m, o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} -x + y - z &= -1 \\ 4x - 2y + 2z &= 2m \\ -3x - 2y + mz &= -4 \end{aligned}$$

Bloque 2 (Xeometría) (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. Calcule a distancia entre as rectas de ecuacións $r: \left\{ x = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{7} \right\}$ e $s: \left\{ x-2 = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \right\}$.

2. Demostre que os puntos P=(0,0,4), Q=(3,3,3), R=(2,3,4) e S=(3,0,1) son coplanarios e determine o plano que os contén.

Bloque 3 (Análise) (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. A. Enunciado e interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo integral para funcións continuas.

B. Sexa $f: [-2, 2] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua en [-2, 2] tal que $\int_{-2}^{-1} f(t)dt = \int_{1}^{2} f(t)dt$, ¿pódese asegurar que existen b e c en [-2, 2] tales que $b \leq -1$, $c \geq -1$ e $f(b) = f(c)$? Xustifique a súa resposta.

2. A. Enunciado da Regra de L'Hopital.

B. Calcule a relación entre a e b para que sexa continua en toda a recta real a función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{ax} - 1}{2x} & se \quad x \neq 0 \\ b & se \quad x = 0 \end{cases}$$

MATEMÁTICAS

SEGUNDA PARTE

Bloque 4.a. *(Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque **só** aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante os cursos académicos 2003/2004 ou 2004/2005. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)*

1. A. Definición de cota superior dunha sucesión de números reais. Definición de sucesión acotada inferiormente.

B. Demostre que a sucesión de termo xeral $a_n = \dfrac{4n-1}{n+1}$ é crecente e ache unha cota inferior positiva (xustificando que é cota inferior.)

2. A. Explique **BREVEMENTE** o método de integración de funcións racionais *P(x)/Q(x)*, no caso de que o polinomio do denominador, *Q(x)*, teña só raíces reais.

B. Calcule $\int \dfrac{2x-1}{x(x+1)^2}\,dx$.

Bloque 4.b. (Estatística) (*Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque **só** aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante o curso académico 2002/2003 ou anteriores. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)*

1. A. Propiedades da función de densidade dunha variable aleatoria que segue unha distribución normal.

B. Se X é unha variable aleatoria normal de media $\mu>0$ e varianza σ^2 entón $P\left(\dfrac{\mu}{2} \le X \le \dfrac{3\mu}{2}\right)$ vale:

a) cero

b) $2P\left(Z \le \dfrac{\mu}{2\sigma}\right)-1$, donde Z é unha variable aleatoria que segue unha distribución N(0,1).

c) ningunha das anteriores.
Elixa unha das tres respostas xustificando a súa elección.

2. A. A media dunha variable aleatoria pode ser negativa:
(a) Nunca **(b)** Sempre **(c)** Só se as probabilidades son negativas **(d)** Ningunha das anteriores.
Escolla unha das anteriores respostas e razoe por que as outras tres opcións non son correctas.

B. Se X é unha variable aleatoria discreta de media m, demostre, (empregando a definición de media) que a media da variable aleatoria discreta Y, con $Y = a + bX$, (para calesqueira $a,b\in\mathbf{R}$) é $a+bm$.

MATEMÁTICAS

PRIMEIRA PARTE (Parte Común)

(Nesta primeira parte ***tódolos*** *alumnos deben responder a tres preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos tres bloques temáticos: Álxebra Lineal, Xeometría e Análise. A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.)*

Bloque 1 **(Álxebra Lineal)** (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. Resolva a ecuación matricial: $A \cdot X + C = B$, sendo

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.Discuta e resolva, segundo os valores do parámetro α, o seguinte sistema de ecuacións. Interpréteo xeométricamente en cada caso:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x - \alpha y - 3z &= 0 \\ 5x + 3y - z &= 0 \end{aligned}$$

Bloque 2 **(Xeometría)** (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. A. ¿Que condición deben cumprir os coeficientes das ecuacións xerais de dous planos para que estes sexan perpendiculares?

B. Ache o ángulo que forman os planos $\pi : 2x - y + z - 7 = 0$ e $\sigma : x + y + 2z = 11$.

2. A. Definición de producto mixto de tres vectores. ¿Pode ocorrer que o producto mixto de tres vectores sexa cero sen ser ningún dos vectores o vector nulo? Razoe a resposta.

B. Para $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w},$ tres vectores no espacio tales que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e $|\vec{w}| = 5$, ache os valores mínimo e máximo do valor absoluto do seu producto mixto.

Bloque 3 **(Análise)** (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. A. Continuidade lateral dunha función nun punto.

B. Analice a continuidade, no punto $x = 0$, da función f dada por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^x - 1}{x} & se \ \ x < 0 \\ \dfrac{\cos(x)}{x^2 + 1} & se \ \ x \geq 0 \end{cases}$

2. A. Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema Fundamental do Cálculo Integral para funcións continuas.

B. Sexa $F(x) = \int_0^x sen(t^2)dt$. Calcule a segunda derivada da función F (**sen intentar resolver a integral**.)

MATEMÁTICAS

SEGUNDA PARTE

Bloque 4.a. *(Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque **só** aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante os cursos académicos 2003/2004 ou 2004/2005. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)*

1. Calcule:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+4}-n\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^n-8}{2^{n+1}}\right)$

2. Calcule $\displaystyle\int \frac{x^3+x+2}{x^2+3}\,dx$.

Bloque 4.b. **(Estatística)** (*Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque **só** aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante o curso académico 2002/2003 ou anteriores. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)*

1. Tódolos días se seleccionan, de maneira aleatoria, 15 unidades dun proceso de taponado de botellas co propósito de verificar a porcentaxe de taponados defectuosos. A xerencia decidíu deter o proceso cada vez que unha mostra de 15 unidades teña dous ou máis defectuosos. Se se sabe que a probabilidade de realizar un taponado defectuoso é p, ¿cal é a probabilidade de que, un determinado día, o proceso se deteña? (O resultado debe expresalo en función de p.)

Se $p = 0.1$, ¿é máis probable que nunha caixa non haxa ningún defectuoso ou que sexan todos defectuosos? Xustifique a súa resposta.

2. Un distribuidor de cristalerías empaqueta as copas en lotes de catro copas cada un. A función de masa de probabilidade do número de copas defectuosas en cada lote vén dada por:

k	0	1	2	3	4
P(X=k)	0.9	m	0.02	0.01	0.005

Pídese:

a) Calcule o valor de m.
b) Calcule a media da variable X.
c) Calcule a probabilidade de que polo menos o 50% das copas dun lote sexa defectuoso.

CONVOCATORIA DE XUÑO

A puntuación máxima de cada bloque é 2,5 puntos.

Soamente se puntuará a primeira pregunta respondida de cada un dos catro bloques.

Bloque 1 (Álxebra lineal)

EXERCICIO 1:

Formulación de $A + A^t = 4I$ (0,5 puntos). Obtención dos a_{ii} (0,25 puntos). Obtención de a_{12} e a_{23} (0,25 puntos). Obtención da condición $a_{13} + a_{31} = 0$ (0,25 puntos)

Formulación de det A = 10 (0,5 puntos). Obtención de a_{13} e a_{31} (0,75 puntos; descontaranse 0,5 puntos se só se dá un valor)

EXERCICIO 2:

Discusión (1,5 puntos), distribuidos en

Obtención de m (0,5 puntos). Sistema compatible determinado (0,5 puntos). Sistema incompatible (0,5 puntos)

Interpretación xeométrica (1 punto), distribuido en

Tres planos que se cortan nun punto (0,5 puntos).

Planos que se cortan dous a dous (0,5 puntos)

Bloque 2 (Xeometría)

EXERCICIO 1:

Formulación (rectas que se cruzan e como se pode calula-la distancia) (1 punto)

Determinación da distancia (1,5 puntos)

Descontaranse 0,5 puntos se se dá como resultado unha distancia negativa.

EXERCICIO 2:

Demostrar que os puntos son coplanarios (1,5 puntos)

Obtención da ecuación do plano (1 punto)

Bloque 3 (Análise)

EXERCICIO 1:

1.A (1 punto) distribuido en

Enunciado do teorema do valor medio do cálculo integral (0,5 puntos)

Interpretación xeométrica (0,5 puntos)

1.B (1,5 puntos)

2.A (1 punto)

2.B (1,5 puntos) distribuidos en

Continuidade nos puntos $x \neq 0$ (0,25 puntos)

Cálculo do $\lim_{x\to 0} f(x)$ (0,75 puntos)

Conclusión (0,5 puntos)

Bloque 4.a

1.A (1 punto) distribuido en

Definición de cota superior dunha sucesión de números reais (0,5 puntos)

Definición de sucesión acotada inferiormente (0,5 puntos)

1.B (1,5 puntos)

Demostrar que a sucesión é crecente (0,75 puntos)

Determinar unha cota inferior positiva (0,75 puntos)

2.A (1 punto) distribuido en

Dividir para reduci-lo problema ó caso de grado (P(x)) < grado (Q(x)) (0,25 puntos)

Descomposición do denominador en factores (0,25 puntos)

Descomposicición en suma de fraccións (0,25 puntos)

Determinación das constantes e integración dos sumandos (0,25 puntos).

2.B (1,5 puntos) distribuidos en

Descomposición en suma de fraccións (0,25 puntos)

Determinación das constantes (0,25 puntos)

Integración logarítmica (0,25 puntos)

Integración da potencia (0,5 puntos)

Constante de integración (0,25 puntos)

Bloque 4.b (Estatística)

1.A (1 punto)

1.B (1,5 puntos) distribuidos en

Tipifica-la variable (0,5 puntos)

Face-las transformacións (1 punto)

2.A (1 punto)

2.B (1,5 puntos)

Expresión da media de Y (0,5 puntos)

Cálculos (1 punto)

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

A puntuación máxima de cada bloque é 2,5 puntos.

Soamente se puntuará a primeira pregunta respondida de cada un dos catro bloques.

Bloque 1 (Álxebra lineal)

EXERCICIO 1:

Obtención de $X = A^{-1} (B - C)$ (1 punto)

Cálculo de A^{-1} (0,75 puntos)

Cálculo de $A^{-1} (B - C)$ (0,75 puntos)

EXERCICIO 2:

Discusión (1 punto), distribuido en

Sistema compatible determinado (0,5 puntos)

Sistema compatible indeterminado (0,5 puntos)

Resolución (0,5 puntos)

Interpretación xeométrica (1 punto), distribuido en

Tres planos que se cortan na orixe (0,5 puntos)

Tres planos que se cortan nunha recta (0,5 puntos)

Bloque 2 (Xeometría)

EXERCICIO 1:

Condición de perpendicularidade (1 punto)

Cálculo do ángulo que forman os planos (1,5 puntos)

EXERCICIO 2:

Definición de producto mixto de tres vectores (1 punto)

Condición para que o producto mixto de tres vectores non nulos sexa cero (0,5 puntos)

Valor mínimo e máximo do valor absoluto do producto mixto (1 punto)

Bloque 3 (Análise)

EXERCICIO 1:

1.A (1 punto)

1.B (1,5 puntos) distribuidos en

Cálculo do límite lateral pola esquerda (0,5 puntos)

Cálculo do límite lateral pola dereita (0,5 puntos)

Discontinuidade (0,5 puntos)

EXERCICIO 2:

2.A (1,5 puntos) distribuidos en

Enunciado do Teorema Fundamental do Cálculo Integral para funcións continuas (1 punto)

Interpretación xeométrica (0,5 puntos)

2.B (1 punto) distribuido en

Cálculo de $F'(x)$ (0,5 puntos)

Cálculo de $F''(x)$ (0,5 puntos)

Bloque 4.a

EXERCICIO 1:

a) (1,5 puntos)

b) (1 punto)

EXERCICIO 2: (2,5 puntos) distribuidos en

Reduci-lo problema ó caso de grado $(P(x)) <$ grado $(Q(x))$ (0,5 puntos)

Integración da potencia (0,25 puntos)

Integración logarítmica (0,5 puntos)

Integración arco tanxente (1 punto)

Constante de integración (0,25 puntos)

Bloque 4.b (Estatística)

EXERCICIO 1:

Formulación do problema (0,5 puntos)

Cálculos (0,75 puntos)

Caso $p = 0,1$ (1,25 puntos) distribuidos en

Cálculo de $P (X = 0)$ (0,5 puntos)

Cálculo de $P (X = 1)$ (0, 5 puntos)

Conclusión (0,25 puntos)

EXERCICIO 2

a) (0,5 puntos)

b) (0,75 puntos)

c) (1,25 puntos)