CiUG
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

PAU **Código: 26**

XUÑO 2011

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. a) Sexan C_1, C_2, C_3 as columnas primeira, segunda e terceira, respectivamente, dunha matriz cadrada M de orde 3 con $det(M) = 4$. Calcula, enunciando as propiedades de determinantes que utilices, o determinante da matriz cuxas columnas primeira, segunda e terceira son, respectivamente, $-C_2, 2C_1 - C_3, C_2 + C_3$

b) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula todos os valores de a e b para os que $A^{-1} = A^t$, sendo A^t a matriz trasposta de A.

2. a) ¿Son coplanarios os puntos $A(1,0,2), B(0,-1,1), C(-1,-2,0)$ e $D(0,2,2)$? Se existe, calcula a ecuación do plano que os contén.

b) Calcula a ecuación xeral e as ecuacións paramétricas do plano que é perpendicular ao plano $\alpha: 2x + y - 3z + 4 = 0$ e contén a recta que pasa polos puntos $P(-1,1,2)$ e $Q(2,3,6)$.

3. a) Enuncia o teorema de Rolle. Calcula o valor de k para que a función $f(x) = x^3 - kx + 10$ cumpla as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo $[-2,0]$ e para ese valor determina un punto do intervalo no que se anule a derivada de $f(x)$.

b) Calcula o dominio e os intervalos de crecemento e decrecemento da función $g(x) = ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ (Nota: ln=logaritmo neperiano).

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x) = x^2 - 2x + 1$, a súa recta tanxente no punto $(3,4)$ e o eixo OX (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice e concavidade ou convexidade).

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

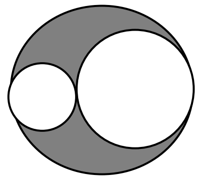
$$\begin{aligned} mx - 2y + 2z &= 1 \\ 2x + my + z &= 2 \\ x + 3y - z &= m \end{aligned}$$

b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $m = 1$.

2. a) Calcula a ecuación do plano que pasa polo punto $P(1,2,-3)$ e é perpendicular á recta
$$r: \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ 3x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

b) Calcula a distancia d do punto $Q(-1,0,-2)$ ao plano $\beta: x - 2y + 3z + 12 = 0$. Calcula, se existe, outro punto da recta r que tamén diste d do plano β.

3. Nunha circunferencia de radio 10 cm., divídese un dos seus diámetros en dúas partes que se toman como diámetros de dúas circunferencias tanxentes interiores a ela. ¿Que lonxitude debe ter cada un destes dous diámetros para que sexa máxima a área delimitada polas tres circunferencias (rexión sombreada)?



4. a) Define función derivable nun punto. Calcula, se existen, os valores de a e b, para que sexa derivable a función $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{e^x} & se\ x < 0 \\ x^2 + ax + b & se\ x \geq 0 \end{cases}$

b) Define integral indefinida dunha función. Calcula $\int x^2 \cos x\, dx$

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. a) Se A é unha matriz tal que $A^3+I=O$, sendo I a matriz identidade e O a matriz nula de orde 3, ¿cal é o rango de A? Calcula o determinante de A^{30}. Calcula A no caso de que sexa unha matriz diagonal verificando a igualdade anterior.

b) Dada a matriz $B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, calcula unha matriz X tal que $BXB-B=B^{-1}$

2. a) Dado o plano $\pi:\begin{cases} x= 2-\lambda+\mu \\ y= \lambda \\ z= \lambda+\mu \end{cases}$, calcula a ecuación da recta r que pasa polo punto $P(1,-2,1)$ e é perpendicular a π. Calcula o punto de intersección de r e π.

b) ¿Están aliñados os puntos $A(2,0,3)$, $B(0,0,1)$ e $C(2,1,5)$? Se non están aliñados, calcula a distancia entre o plano que determinan estes tres puntos e o plano π do apartado a).

3. a) Enuncia o teorema de Bolzano. ¿Podemos asegurar que a gráfica da función

$f(x)=3sen\left(\frac{x}{2}\right)-cos(x^2)$

corta o eixo OX nalgún punto do intervalo $(0,\pi)$? Razoa a resposta.

b) Descompón o número 40 en dous sumandos tales que o produto do cubo dun deles polo cadrado do outro sexa máximo. ¿Canto vale ese produto?

4. a) Calcula os valores de a,b,c sabendo que $y=ax^2+bx+1$ e $y=x^3+c$, teñen a mesma recta tanxente no punto $(1,2)$.

b) Enuncia a regra de Barrow. Calcula $\int_1^e\left(\frac{1}{x}-lnx\right)dx$. (Nota ln = logaritmo neperiano).

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} x+my+3z&=1\\ x+2y+mz&=m\\ x+4y+3z&=1 \end{aligned}$$

b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $m=4$.

2. a) Estuda a posición relativa da recta $r:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$ e a recta s que pasa polos puntos $P(0,2,1)$ e $Q(1,1,1)$. Calcula a distancia de r a s.

b) Calcula a ecuación xeral do plano π que é paralelo á recta r e contén á recta s.

3. a) Calcula os extremos relativos da función $f(x)=x^4-8x^2+1$. Calcula tamén o máximo absoluto e o mínimo absoluto desta función no intervalo $[-3,3]$.

b) Calcula os valores de a e b para que a función $f(x)=ax^2+bxlnx$ teña un punto de inflexión no punto $(1,2)$. Para estes valores de a e b, calcula o dominio e os intervalos de concavidade e convexidade de $f(x)$. (Nota ln = logaritmo neperiano).

4. a) Define primitiva e integral indefinida dunha función.

b) Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x)=-3x^2+3$ e a recta $y=-9$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade).

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola obtención do valor do determinante.
- 1 punto polo enunciado das propiedades de determinantes que utilice.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos pola obtención dos valores de *a* e *b*.

2) **a) 1,5 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto por probar que son coplanarios.
- 0,5 puntos pola ecuación do plano que os contén.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos pola ecuación xeral do plano.
- 0,5 puntos polas ecuacións paramétricas do plano.

3) **a) 1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema de Rolle.
- 0,25 puntos polo cálculo de k.
- 0,25 puntos polo cálculo do punto onde se anula a derivada da función.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,25 puntos polo dominio da función.
- 0,25 puntos pola derivada da función.
- 0,5 puntos polos intervalos de crecemento e decrecemento.

4) **2 puntos**, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola gráfica da parábola.
- 0,5 puntos pola ecuación da recta tanxente.
- 0,5 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

OPCIÓN B

1) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto polo estudo do rango das matrices
- 1 punto pola discusión do sistema.

b) 1 punto pola resolución do sistema para o caso $m = 1$.

2) **a) 1 punto** pola obtención dunha ecuación do plano.

b) 2 puntos, distribuídos en:

- 1 punto pola obtención da distancia do punto ao plano.
- 1 punto pola obtención do outro punto da recta.

3) **2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola función maximizada.
- 1 punto pola obtención dos valores que maximizan a área da rexión.

4) **a) 1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos pola definición de función derivable nun punto.
- 0,5 puntos polo cálculo do valores de *a* e *b*.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola definición de integral indefinida dunha función.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

5) **a) 1,5 puntos**, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola obtención do rango da matriz A.
- 0,5 punto polo cálculo do determinantes da matriz A^{30}.
- 0,5 puntos pola obtención da matriz diagonal.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos polo cálculo da matriz B^{-1}.
- 0,5 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos pola obtención da matriz X.

6) **a) 1,5 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola ecuación da recta r.
- 0,5 puntos polo punto de intersección da recta e o plano.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos por probar que os tres puntos non están aliñados.
- 0,5 puntos pola ecuación do plano que determinan os tres puntos.
- 0,5 puntos pola distancia entre os planos.

7) **a) 1 punto**, distribuídos en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema de Bolzano.
- 0,5 puntos pola aplicación do teorema de Bolzano.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,25 puntos pola formulación do problema
- 0,5 puntos pola obtención dos sumandos
- 0,25 puntos produto dos sumandos.

8) **a) 0,75 puntos**, distribuídos en:

- 0,25 puntos pola obtención de c.
- 0,5 puntos pola obtención de a e b.

b) 1,25 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos polo enunciado da regra de Barrow.
- 0,75 puntos pola integral.

OPCIÓN B

1) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto polo estudo do rango das matrices
- 1 punto pola discusión do sistema.

b) 1 punto, pola resolución do sistema para o caso $m = 4$.

5) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola posición relativa das rectas.
- 1 punto pola distancia entre as rectas.

b) 1punto, pola ecuación xeral do plano.

6) **a) 1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos polos extremos relativos.
- 0,5 puntos polos máximo e mínimo absolutos

b) 1 punto, distribuído en;

- 0,5 puntos pola obtención de a e b.
- 0,25 puntos polo dominio da función.
- 0,25 puntos polos intervalos de concavidade e convexidade.

7) **a) 0,5 puntos**.

b) 1,5 puntos, distribuídos en;

- 0,5 puntos pola gráfica da parábola.
- 0,5 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.