CiUG — COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA — USC	PAU XUÑO 2012	Código: 26

MATEMÁTICAS II

(Responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} m & m & m^2 \\ 1 & m^2 & m^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Estuda, segundo os valores de m, o rango da matriz A.

b) Resolve, se é posible, o sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para o valor $m = 1$.

2. Dados os puntos $A(3,0,2)$, $B(1,-2,0)$, $C(1,-1,3)$ e $D(\lambda, \lambda - 2, -\lambda)$

a) Determina o valor de λ para que A, B, C e D sexan coplanarios. ¿Para algún valor de λ son A, B, C e D vértices consecutivos dun paralelogramo?

b) Calcula as ecuacións paramétricas do plano π que pasa polo punto C e é perpendicular á recta r que pasa polos puntos A e B.

3. a) Enuncia o teorema de Bolzano. Probar que a función $f(x) = x^3 + 2x - 4$ corta o eixe OX nalgún punto do intervalo $[1,2]$. ¿Pode cortalo en máis dun punto?

b) Calcula $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x+2}{x^2+x+2} \right)^{1/x^2}$

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola $y = 3x - x^2$ e a súa recta normal no punto (3,0). (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixes, o vértice da parábola e a concavidade ou convexidade).

OPCIÓN B

1. Dado o sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 5 \\ x - 3y + 2z &= -4 \end{aligned}$$

a) Calcula o valor de α para que ao engadirlle a ecuación $\alpha x + y + z = 9$, resulte un sistema compatible indeterminado. Resólveo, se é posible, para α = 0.

b) ¿Existe algún valor de α para o cal o sistema con estas 3 ecuacións non ten solución?

2. a) Se $|\vec{v}| = 6$, $|\vec{w}| = 10$ e $|\vec{v} + \vec{w}| = 14$, calcula o ángulo que forman os vectores $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

b) Calcula as ecuacións paramétricas e a ecuación xeral do plano que pasa polos puntos $A(-1,5,0)$ e $B(0,1,1)$ e é paralelo á recta

$$r: \begin{cases} 3x + 2y \qquad - 3 = 0 \\ \qquad 2y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

3. a) Determina os valores de a para que a función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} a - x^2 & se \ \ x \leq 1 \\ \dfrac{2}{ax} & se \ \ x > 1 \end{cases}$$

sexa continua. ¿É derivable en $x = 1$ para algún valor de a?

b) Enunciado e interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo diferencial.

4. Calcula $\int_2^3 \frac{5x^3 - 3x + 1}{x^3 - x} dx$

MATEMÁTICAS II

(Responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. a) Calcula, segundo os valores de a, o rango de $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ a+1 & a & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$. Para $a = 1$, calcula o determinante da matriz $2A^t \cdot A^{-1}$

b) Sexa $B = \begin{pmatrix} -1/2 & x & 0 \\ y & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula x e y para que se cumpra que $B^{-1} = B^t$.

(Nota: A^t, B^t representan a matriz trasposta de A e B respectivamente).

2. Dado o plano $\pi: x - 2y + 3z + 6 = 0$

a) Calcula a área do triángulo de vértices os puntos de corte de π cos eixes de coordenadas.

b) Calcula a ecuación xeral do plano que é perpendicular ao plano π, paralelo á recta que pasa polos puntos B(0,3,0) e C(0,0,-2) e pasa pola orixe de coordenadas.

c) Calcula o punto simétrico da orixe de coordenadas respecto do plano $\pi: x - 2y + 3z + 6 = 0$

3. a) Calcula as asíntotas e os intervalos de crecemento e decrecemento de $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

b) Calcula $\int_1^e \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx$

4. a) Dunha función derivable $f(x)$ sabemos que pasa polo punto (0,1) e que a súa derivada é $f'(x) = xe^{2x}$. Calcula $f(x)$ e a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto correspondente a $x = 0$.

b) Enuncia o teorema fundamental do cálculo integral.

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores de m, o sistema

$$\begin{aligned} x + y &= m \\ x - my &= -13 \\ 3x + 5y &= 16 \end{aligned}$$

b) Resólveo, se é posible, para $m = 2$.

2. a) Estuda a posición relativa dos planos $\pi_1: x + y + z - 5 = 0$, $\pi_2: \begin{cases} x = 3 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$

Se se cortan nunha recta, escribe as súas ecuacións paramétricas.

b) Calcula a ecuación do plano π_3, que pasa pola orixe de coordenadas e é perpendicular a π_1 e π_2. Calcula a intersección de π_1, π_2 e π_3.

3. a) Enunciado e interpretación xeométrica do teorema de Rolle.

b) Se $c > 2$, calcula os valores de a, b, c para que a función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & se \ \ x < 2 \\ x + 1 & se \ \ x \geq 2 \end{cases}$ cumpra as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo $[0, c]$.

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola $y = -x^2 + 2x + 3$, a recta tanxente no punto onde a parábola ten un extremo e a tanxente á parábola no punto no que a tanxente é paralela á recta $y = 4x$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixes, o vértice da parábola e a concavidade ou convexidade).

CONVOCATORIA DE XUÑO

1) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola obtención dos valores de m que anulan o determinante de A.
- 1,5 puntos pola obtención do rango de A, segundo os valores de m.

b) 1 punto

2) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola obtención do valor de λ para que sexan coplanarios.
- 1 punto por xustificar que non constitúen un paralelogramo.

b) 1 punto

3) **a) 1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema de Bolzano.
- 0,25 puntos por xustificar que a función corta o eixe OX nalgún punto do intervalo [1,2].
- 0,25 puntos por xustificar que a función non corta o eixe OX en máis de un punto.

b) 1 punto

4) **2 puntos,** distribuídos en:

- 0,5 puntos por representar a parábola.
- 0,5 puntos pola obtención da recta normal.
- 0,5 puntos pola formulación da área.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

OPCIÓN B

1) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto por xustificar que o sistema é compatible indeterminado cando α=0.
- 1 punto pola resolución para α=0.

b) 1 punto

2) **a) 1 punto**

b) 2 puntos, distribuídos en:

- 1 punto pola ecuación xeral do plano
- 1 punto polas ecuacións paramétricas do plano

3) **a) 1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos pola determinación dos valores de a para que a función sexa continua.
- 0,5 puntos polo estudo da derivabilidade en x=1.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema do valor medio do cálculo diferencial
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo diferencial

4) 2 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola división do numerador entre o denominador e o cálculo das raíces do denominador.
- 0,5 puntos pola descomposición en suma de fraccións.
- 0,5 puntos pola integración.
- 0,5 puntos pola aplicación da regra de Barrow e obtención do valor da integral.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1) a) 2 puntos

b) 1 punto

2) 3 puntos (1 punto por cada unha das cuestións formuladas)

3) a) 1 punto

b) 1 punto

4) 2 puntos (0,5 puntos pola formulación teórica e 1,5 puntos pola resolución práctica)

OPCIÓN B

1) a) 2 puntos

b) 1 punto

2) a) 2 puntos

b) 1 punto

3) a) 1 punto

b) 1 punto

4) 2 puntos