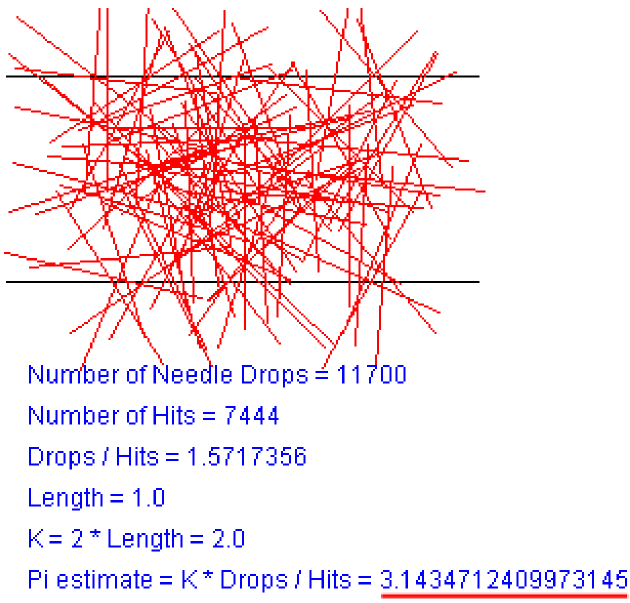
LA AGUJA DE BUFFÓN



DANIEL PADÍN PAZOS

BIOGRAFIA Y DESCRIPCION DEL EXPERIMENTO:

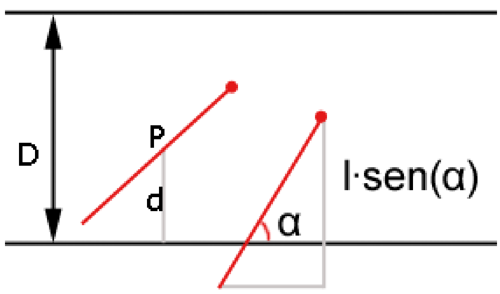
Georges Louis Leclerc: también conocido como conde de Buffon, fue un célebre matemático Francés que nació en 1707 y murió en 1788. Desde niño Buffon asistió a un colegio Jesuita donde descubrió su vocación por las matemáticas. Empezó a estudiar derecho por petición de su padre, pero pronto dejo estos estudios para poder dedicarse enteramente a la matemática. Su obra más importante fue la monumental enciclopedia "HISTORIA NATURAL", en 44 tomos que recopilaba el conocimiento científico con un fin eminentemente divulgativo. Cuando apenas tenía 20 años desarrolló el "teorema del binomio". Trabajó en otras ramas de las matemáticas como la geometría, la probabilidad, la teoría de números y el cálculo. A pesar de todo, su obra más importante es un famoso problema conocido como la "aguja de buffon", que mediante un problema de probabilidad pretendía hallar el número π. Este experimento consiste en dejar caer una aguja sobre una superficie rayada y anotar cuántas veces la aguja corta una línea, multiplicar el número de tiradas por 2 y dividir el resultado entre el número de veces que la aguja cruzó alguna línea.

EXPLICACIÓN DEL EXPERIMENTO Y PROBABILIDAD DE CORTE

-Partimos de una red de líneas paralelas equidistantes, dibujadas sobre un plano con una separación D. Tomaremos también una aguja de longitud L, de manera que L sea menor que D.

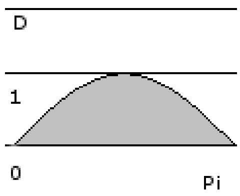
-La probabilidad media de que la aguja toque una línea de la red si la lanzamos de una forma aleatoria será:

· Determinado el punto medio de la aguja (P), llamaremos “d” la distancia hasta la paralela más cercana y “a” al ángulo que forma la aguja o su prolongación con la paralela.



Se deduce que la condición “l·sin (α) <D “es necesaria y suficiente para que la aguja corte la paralela. Por lo tanto, si la aguja es arrojada al azar a la red de paralelas, el valor numérico del ángulo “α” estará en el intervalo $0 \leq \alpha \leq \pi$ mientras que el valor de la longitud d podrá tomar todos los valores del intervalo $0<d<D$.

El par [α, d] es un elemento cualquiera del rectángulo [0, π] x [0, d]. Ahora bien: la condición de que corte 1, a su vez establece que en tal caso, el par (α, d) estará ubicado debajo del lóbulo de la sinusoide (curva que procede de una función, asociada al seno) f (α) = l · sin (α) tal como se observa en la siguiente figura:



Visto esto, la definición de la probabilidad geométrica de que una aguja corte una paralela será el cociente entre el área de la sinusoide de color gris sobre el área del rectángulo que la contiene:

$$\textbf{(P)=} \quad \frac{\int_0^{\pi} l \cdot \mathrm{sen}(\alpha) d\alpha}{\pi \cdot D}$$

El resultado de resolver la integral es: p= (2·l) / (π·D) , que fue lo que llamó la atención de estudiosos, ya que con esta expresión se puede hacer un experimento aleatorio que determina aproximadamente el valor de π. De este modo, si p (probabilidad) se reemplaza en la anterior expresión por el cociente $\frac{N_0}{N}$ entre el número de cortes de la aguja sobre el número total de tiradas se obtiene un valor aproximado a π:

$$\pi \approx \frac{2 \cdot l \cdot N}{D \cdot N_0}$$

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Como ya se explicó en el documento anterior, George Louis Buffón demostró que lanzando una aguja de longitud L de forma aleatoria sobre una superficie con líneas paralelas distanciadas entre sí por una longitud D, la probabilidad de que esta corte una paralela obedece a la siguiente fórmula:

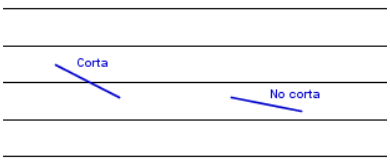
$$(L\cdot \pi) / (D\cdot 2)$$

Y como también se demostró anteriormente esta probabilidad se puede emplear para hallar π.

$$\pi \approx (L\cdot \pi) / (D\cdot 2)$$

COMO LLEVAR A CABO EL EXPERIMENTO

-Lanzar sobre las paralelas una serie de agujas (cuantas más, más preciso será el resultado) de la forma más aleatoria posible.



-Hacer una tabla o grafica del número de cortes y el de tiradas (ejemplo en la siguiente pág.).

-La división del número total de tiradas y el de veces que una aguja corta una línea tiende a π, y se acercará más o menos dependiendo del número de tiradas:

$$\pi \approx (2\cdot nº\ tiradas) / (nº\ cortes)$$

-En caso de que la longitud de la aguja sea menor que la distancia entre líneas se aplicará esta otra expresión:

$$\pi \approx (2\cdot nº\ tiradas \cdot D) / (nº\ cortes \cdot L)$$

EXPERIMENTO RESUELTO

-Esta es la tabla con el número de tiradas y el de cortes. Para esta comprobación solo he realizado 15 tiradas porque con ellas ya había obtenido un valor de π bastante aproximado.

LANZAMIENTO	CORTA	LANZAMIENTO	CORTA
1º	si	8º	no
2º	si	9º	si
3º	no	10º	si
4º	si	11º	si
5º	no	12º	no
6º	si	13º	si
7º	si	14º	si
		15º	si

-Aplicados los datos anteriores de la tabla a las expresiones vistas en el apartado anterior,

$$\pi \approx (2 \cdot \text{nº tiradas} \cdot D) / (\text{nº cortes} \cdot L)$$

Nos quedaría una operación así:

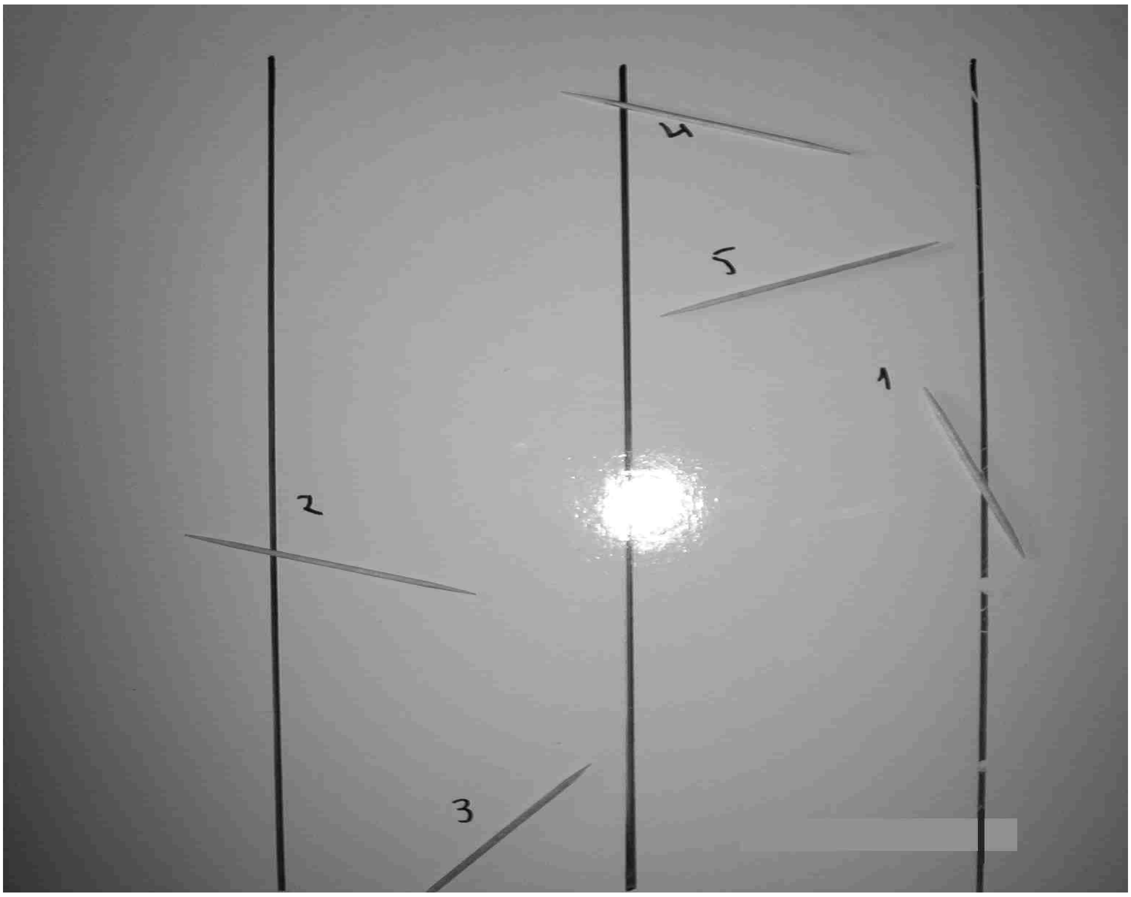
$$(2 \cdot 15 \cdot 7.5) / (11 \cdot 6{,}5) = 225 / 71.5 = 3{,}146853146853146853146853146853 1$$

* Evidentemente no se puede realizar un experimento de probabilidad con un número tan reducido de tiradas así que he incluido 4 series de 50 lanzamientos, de los que hallé el resultado por separado y luego hice la media:

SERIE	Nº LANZAMIENTOS	Nº CORTES	RESULTADO
1	50	33	3.03030303030391
2	50	34	2.94117647058738
3	50	32	3.12500000000000
4	50	29	3.44827586206884
5	50	39	2.56410256410163
MEDIA	**250**	**167**	**3.021771585412352**

-Esta fotografía es una representación gráfica del experimento, pero no es válido ni puede incluirse en la “tabla de probabilidad”.

NÚMERO DE LANZAMIENTOS	5
NÚMERO DE CORTES	3



- Mediante una simulación por ordenador he hecho este experimento con un elevado número de tiradas, lo que en teoría debería dar un resultado muy aproximado a π, aunque nunca se llegan a obtener resultados muy precisos:

Numero de tiradas	10000000
Numero de cortes	6366198
Valor obtenido de π	3.14159251722958

ENLACES

Esta es la lista con algunas de las páginas que he consultado para realizar este trabajo, entre otras con información sobre el tema:

Información sobre el Conde Bufón y una pequeña biografía:

http://www.biografiasyvidas.com/biografia/b/buffon.htm

Documento sobre el experimento en general:

http://es.wikipedia.org/wiki/Aguja_de_Buffon

Explicación fácil del experimento, con enlaces al simulador de lanzamientos:

http://ciencianet.com/buffon.html

En esta página aparece explicada la parte de las integrales, entre otros experimentos matemáticos

http://www.rinconmatematico.com/miro/probgeom/probgeom.htm

Otra explicación de la probabilidad de corte.

http://www.genciencia.com/2006/08/28-el-problema-de-la-aguja-de-buffon

Esta página genera un gráfico en tiempo real del resultado de múltiples lanzamientos.

http://library.thinkquest.org/C0110195/history/buffon_sp.html

ALGUNAS CIFRAS DE π

PI = 3,1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 69399375105820974944 5923078164 0628620899 8628034825
34211706798214808651 3282306647 0938446095 5058223172 53594081284811174502 8410270193 8521105559
6446229489 54930381964428810975 6659334461 2847564823 3786783165 27120190914564856692 3460348610
4543266482 1339360726 02491412737245870066 0631558817 4881520920 9628292540 91715364367892590360
0113305305 4882046652 1384146951 94151160943305727036 5759591953 0921861173 8193261179
31051185480744623799 6274956735 1885752724 8912279381 83011949129833673362 4406566430 8602139494
6395224737 19070217986094370277 0539217176 2931767523 8467481846 76694051320005681271 4526356082
7785771342 7577896091 73637178721468440901 2249534301 4654958537 1050792279 68925892354201995611
2129021960 8640344181 5981362977 47713099605187072113 4999999837 2978049951 0597317328
16096318595024459455 3469083026 4252230825 3344685035 26193118817101000313 7838752886 5875332083
8142061717 76691473035982534904 2875546873 1159562863 8823537875 93751957781857780532 1712268066
1300192787 6611195909 21642019893809525720 1065485863 2788659361 5338182796 82303019520353018529
6899577362 2599413891 2497217752 83479131515574857242 4541506959 5082953311 6861727855
88907509838175463746 4939319255 0604009277 0167113900 98488240128583616035 6370766010 4710181942
9555961989 46767837449448255379 7747268471 0404753464 6208046684 25906949129331367702 8989152104
7521620569 6602405803 81501935112533824300 3558764024 7496473263 9141992726 04269922796782354781
6360093417 2164121992 4586315030 28618297455570674983 8505494588 5869269956 9092721079
75093029553211653449 8720275596 0236480665 4991198818 34797753566369807426 5425278625 5181841757
4672890977 77279380008164706001 6145249192 1732172147 7235014144 19735685481613611573 5255213347
5741849468 4385233239 07394143334547762416 8625189835 6948556209 9219222184 27255025425688767179
0494601653 4668049886 2723279178 60857843838279679766 8145410095 3883786360 9506800642
25125205117392984896 0841284886 2694560424 1965285022 21066118630674427862 2039194945 0471237137
8696095636 43719172874677646575 7396241389 0865832645 9958133904 78027590099465764078 9512694683
9835259570 9825822620 52248940772671947826 8482601476 9909026401 3639443745 53050682034962524517
4939965143 1429809190 6592509372 21696461515709858387 4105978859 5977297549 8930161753
92846813826868386894 2774155991 8559252459 5395943104 99725246808459872736 4469584865 3836736222
6260991246 08051243884390451244 1365497627 8079771569 1435997700 12961608944169486855 5848406353
4220722258 2848864815 84560285060168427394 5226746767 8895252138 5225499546 66727823986456596116
3548862305 7745649803 5593634568 17432411251507606947 9451096596 0940252288 7971089314
56691368672287489405 6010150330 8617928680 9208747609 17824938589009714909 6759852613 6554978189
3129784821 68299894872265880485 7564014270 4775551323 7964145152 37462343645428584447 9526586782
1051141354 7357395231 13427166102135969536 2314429524 8493718711 0145765403 59027993440374200731
0578539062 1983874478 0847848968 33214457138687519435 0643021845 3191048481 0053706146
80674919278191197939 9520614196 6342875444 0643745123 71819217999839101591 9561814675 1426912397
4894090718 64942319615679452080 9514655022 5231603881 9301420937 62137855956638937787 0830390697
9207734672 2182562599 66150142150306803844 7734549202 6054146659 2520149744 28507325186660021324
3408819071 0486331734 6496514539 05796268561005508106 6587969981 6357473638 4052571459
10289706414011097120 6280439039 7595156771 5770042033 78699360072305587631 7635942187 3125147120
5329281918 26186125867321579198 4148488291 6447060957 5270695722 09175671167229109816 9091528017
3506712748 5832228718 35209353965725121083 5791513698 8209144421 0067510334 67110314126711136990
8658516398 3150197016 5151168517 14376576183515565088 4909989859 9823873455 2833163550
76479185358932261854 8963213293 3089857064 2046752590 70915481416549859461 6371802709 8199430992
4488957571 28289059232332609729 9712084433 5732654893 8239119325 97463667305836041428 1388303203
8249037589 8524374417 02913276561809377344 4030707469 2112019130 2033038019 76211011004492932151
6084244485 9637669838 9522868478 31235526582131449576 8572624334 4189303968 6426243410
77322697802807318915 4411010446 8232527162 0105265227 21116603966655730925 4711055785 3763466820
6531098965 26918620564769312570 5863566201 8558100729 3606598764 86117910453348850346 1136576867
5324944166 8039626579 78771855608455296541 2665408530 6143444318 5867697514 56614068007002378776
5913440171 2749470420 5622305389 94561314071127000407 8547332699 3908145466 4645880797
27082668306343285878 5698305235 8089330657 5740679545 71637752542021149557 6158140025 0126228594
1302164715 50979259230990796547 3761255176 5675135751 7829666454 77917450112996148903 0463994713
2962107340 4375189573 59614589019389713111 7904297828 5647503203 1986915140 28708085990480109412
1472213179 4764777262 2414254854 54033215718530614228 8137585043 0633217518 2979866223
71721591607716692547 4873898665 4949450114 6540628433 66393790039769265672 1463853067 3609657120
9180763832 71664162748888007869 2560290228 4721040317 2118608204 19000422966171196377 9213375751
1495950156 6049631862 94726547364252308177 0367515906 7350235072 8354056704 03867435136222247715
8915049530 9844489333 0963408780 76932599397805419341 4473774418 4263129860 8099888687
41326047215695162396 5864573021 6315981931 9516735381 29741677294786724229 2465436680 0980676928
2382806899 64004824354037014163 1496589794 0924323789 6907069779 42236250822168895738 3798623001
5937764716 5122893578 60158816175578297352 3344604281 5126272037 3431465319 77774160319906655418
7639792933 4419521541 3418994854 44734567383162499341 9131814809 2777710386 3877343177
20754565453220777092 1201905166 0962804909 2636019759 88281613323166636528 6193266863 3606273567
6303544776 28035045077723554710 5859548702 7908143562 4014517180 62464362679456127531 8134078330
3362542327 8394497538 24372058353114771199 2606381334 6776879695 9703098339 13077109870408591337
4641442822 7726346594 7047458784 77872019277152807317 6790770715 7213444730 6057007334