RESOLUCIÓN ECUACIÓN LOGARÍTMICA

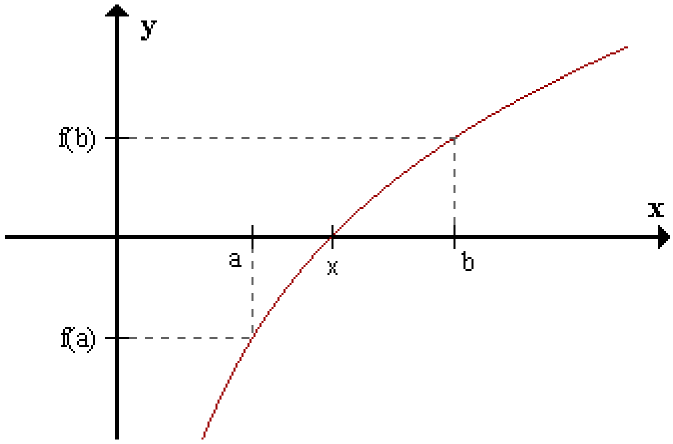
El objetivo del siguiente trabajo es la resolución de la ecuación logarítmica siguiente:

$$\log_2(3x-3) = \log_3(4x+5)$$

Al resultar imposible resolverla mediante el uso de cualquier método general de resolución de logaritmos, es decir, mediante la aplicación de sus propiedades elementales recurriremos al uso del *Teorema de Bolzano*, el teorema más básico relacionado con el *Teorema del Valor Intermedio.*

El enunciado del *Teorema de Bolzano* es el siguiente:

- Si una función f(x) es una función continua definida en el intervalo cerrado $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ si $f(\mathfrak{a})$ es mayor que 0 y $f(\mathfrak{b})$ menor que 0 (o viceversa) es decir, son de distinto signo, existe un punto x en el intervalo $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ tal que f(x)=0.



- Geométricamente, el teorema establece que si dos puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ de la gráfica de una función continua están situados en diferentes lados del eje x, entonces la gráfica intersecta al eje en algún punto x entre a y b.

La **<u>resolución</u>** del logaritmo sería la siguiente:

1. Partiremos de las premisas por las cuales (por definición) tanto $(3x-3)$ como $(4x+5)$ deben ser mayores que 0. Y por lo tanto, la x será, como se puede observar, mayor que 1.

$$\left.\begin{array}{l}(3x-3) > 0 \\ \\ (4x+5) > 0\end{array}\right\} \Rightarrow x > 1$$

2. A continuación, utilizando la propiedad de cambio de base de los logaritmos: $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$ cambiaremos la ecuación logarítmica inicial por una con logaritmos neperianos, calculables con la calculadora:

$$\frac{\ln(3x-3)}{\ln 2} = \frac{\ln 4x+5}{\ln 3}$$

3. Ahora lo igualaremos a 0:

$$\ln 2 \cdot \ln(4x+5) - \ln 3 \cdot \ln(3x-3) = 0$$

4. Esta ecuación la tomaremos como f(x) que debe ser igual a 0. Ahora es cuando usaremos el teorema de Bolzano. Para ello tomaremos dos números (a y b) y los sustituiremos por x en la ecuación. Si el 1º (a) es positivo y el 2º (b) es negativo esto querrá decir que el número que buscamos (x) se encuentra entre estos dos. Habría que repetir este proceso hasta que el resultado de ambos fuese cero aunque en este caso solo hallaremos tres decimales:

$$\left.\begin{array}{l} f\ (2) = +0{,}57093 \\ \\ f\ (3) = -0{,}00461 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2,\_\_\_\_\_\_$$

Podemos observar que el número que buscamos está mucho más cerca de 3 que de 2, ya que el resultado que obtenemos al sustituir x por 3 en la ecuación se acerca mucho mas a 0 que si sustituimos la x por 2. Ahora habría que reducir el intervalo, sabiendo esto lo haremos por la parte del 2:

$f\ (2{,}5) = 0{,}22467 \Rightarrow$ es mayor que 0, el nº que buscamos está entre 2,5 y 3. Seguimos haciendo lo mismo:

$f\ (2{,}9) = 0{,}03523 \Rightarrow$ sigue siendo mayor que 0, x estará entre 2,9 y 3. De esto deducimos que $x = 2{,}9\_\_\_\_\_$

Seguimos haciendo lo mismo:

$$\left.\begin{array}{l} f\ (2{,}95) = 0{,}01499 > 0 \Rightarrow x > 2{,}95 \\ f\ (2{,}98) = 0{,}00315 > 0 \Rightarrow x > 2{,}98 \\ f\ (2{,}99) = -0{,}00074 < 0 \Rightarrow x < 2{,}99 \end{array}\right\} x = 2.98\_\_\_\_\_\_$$

Continuamos hasta los 3 decimales:

$$\left.\begin{array}{l} f\ (2{,}988) = 0{,}00003 \\ \\ f\ (2{,}989) = -0{,}00035 \end{array}\right\}$$ x estaría entre 2,988 y 2.989, por tanto sería 2,988______

Podríamos seguir con este procedimiento y hallar todos los decimales que quisiéramos, hasta que un número nos diese como resultado exactamente 0.

SOLUCIÓN (Aproximando el resultado a las milésimas):

X = 2,988

Fernando Paradela Oubiña